Einleitung

in die

analytische Geometrie der Ebene

von

W. Dette, Oberlehrer.

Beilage zum Programm des Realgymnasiums

zu

Elberfeld.

Ostern 1893.

REALGYMNASIUM ... BIBLIOTHEK

Progr.-Nr. 479.

Elberfeld.

Gedruckt bei Sam. Lucas.

9eL
5 (1893)

479 (b.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Abschnitt I.

Konstante, Veränderliche, Funktion.

1. Konstante, Veränderliche.

Konstant heisst eine Zahl, welche im Verlaufe einer Rechnung denselben Wert behält; veränderlich ist das Gegenteil von konstant.

Beispiel. Ist c der Weg, welchen ein Punkt in jeder Zeiteinheit zurücklegt, t die Anzahl der Zeiteinheiten, welche seit dem Zeitpunkte verflossen sind, von welchem ab die Zeit gerechnet wird (Zeitnullpunkt), S der in t Zeiteinheiten zurückgelegte Weg, so ist $S = ct$. In dieser Gleichung ist c konstant, S und t sind veränderlich.

2. Arten der Veränderlichkeit.

Die Werte, welche eine Veränderliche annehmen soll, bilden entweder eine Reihe oder eine stetige Folge.

Beispiele.

1. Durch n Punkte, von denen nicht drei in einer Geraden liegen, lassen sich $\frac{n(n-1)}{2}$ Gerade legen. In diesen Ausdruck ist für n jede ganze Zahl zu setzen, welche grösser ist als 2. Die Werte, welche n annehmen soll, bilden eine Reihe. (Reihe der natürlichen Zahlen.)

2. In der Gleichung $S = ct$ soll t jeden beliebigen reellen Wert erhalten. Die für t zu setzenden Werte bilden demnach eine stetige Folge.

Unter dem absoluten Wert einer reellen Zahl versteht man ihren Wert ohne Vorzeichen.

Eine Veränderliche x heisst unendlich klein, wenn die absoluten Werte, welche sie durchlaufen soll, kleiner werden als jede noch so kleine vorgegebene Zahl; sie heisst unendlich gross, wenn diese Werte grösser werden, als jede noch so grosse vorgegebene Zahl. Bezeichnungen: $\lim x = 0$; $x = \infty$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Funktion.

Ein Ausdruck, welcher veränderliche Grössen enthält, wird Funktion dieser Veränderlichen genannt. Der Ausdruck — die Funktion — erhält also erst dann einen bestimmten Wert, wenn seine Veränderlichen bestimmte Werte erhalten. Deshalb heisst die Funktion auch abhängige Veränderliche im Gegensatz zu den unabhängigen Veränderlichen, durch deren besondere Werte sie bestimmt wird.

Beispiel. $\sqrt{25 - x^2}$ ist eine Funktion von x. Nennt man den für irgend ein gewähltes x berechneten numerischen Wert dieses Ausdrucks y, so ist $y = \sqrt{25 - x^2}$, wo y die Funktion (abhängige Veränderliche), x die unabhängige Veränderliche bezeichnet. Wird die Gleichung $y = \sqrt{25 - x^2}$ nach x aufgelöst, so folgt $x = \sqrt{25 - y^2}$. Zu jedem Werte von y gehört ein bestimmter Wert von x; x ist demnach hier abhängig von dem unabhängigen y. Ist daher y Funktion von x, so kann auch x als Funktion von y aufgefasst werden.

Soll ausgedrückt werden, dass y Funktion von x ist, ohne dass die Art der Abhängigkeit angegeben wird, so schreibt man $y = f(x)$ oder $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ oder ähnlich. — Was bedeutet demnach $z = f(x, y)$, $u = F(x, y, z)$?

Eine ganze Funktion einer oder mehrerer Veränderlichen ist ein Polynom von einer endlichen Anzahl von Gliedern, von denen jedes Potenzen der Veränderlichen mit nur positiven, ganzen Exponenten als Faktoren enthält. Der höchste Exponent der Veränderlichen bestimmt den Grad der ganzen Funktion. So ist $a x^2 + b x + c$ eine ganze Funktion zweiten Grades von x, $a x^2 + b x y + c y^2$ eine ganze Funktion zweiten Grades von x und y.

Der Quotient zweier ganzen Funktionen heisst gebrochene Funktion. Ganze und gebrochene Funktionen werden rationale Funktionen genannt; irrationale Funktionen siud Polynome, deren Glieder Bruchpotenzen der Veränderlichen enthalten. Rationale und irrationale Funktionen heissen algebraische, alle übrigen transscendente Funktionen.

Eine Funktion $f(x)$ heisst stetig an der Stelle $x = a$, wenn immer eine Zahl η so angegeben werden kann, dass der absolute Wert der Differenz $f(a \pm \eta) - f(a)$ kleiner ist als eine beliebig klein vorgegebene Zahl ε und kleiner bleibt, wenn η kleiner gewählt wird; sie heisst unstetig, wenn dies nicht der Fall ist.

Beispiele.

1. $f(x) = x^2 + p x + q$ ist stetig für jeden Wert $x = a$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. $f(a \pm \eta) - f(a) = (a \pm \eta)^2 + p(a \pm \eta) + q - (a^2 + pa + q)$
$= \pm 2a\eta + \eta^2 \pm p\eta$
$= \pm \eta (2a + p \pm \eta)$.

Der zweite Faktor ist eine endliche Zahl, das Produkt wird demnach kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Zahl ε, wenn η klein genug gewählt wird, es bleibt kleiner bei abnehmendem η.

2. $f(x) = \frac{1}{x-a}$ ist unstetig für $x = a$, stetig für jedes andere x.

Beweis. $f(x+\eta) - f(x) = \frac{1}{x+\eta-a} - \frac{1}{x-a} = \frac{-\eta}{(x-a)(x-a+\eta)}$.

So lange x eine von a verschiedene Konstante ist, d. h. so lange $x - a$ ein fester endlicher Wert, ist auch der Nenner dieses Bruches endlich; der Wert des Bruches wird kleiner als jede noch so kleine angegebene Zahl, wenn nur η klein genug gewählt wird, und er bleibt kleiner bei abnehmendem η. Nähert sich jedoch x dem Werte a unaufhörlich, so ist schon für $x - a = \eta$ der Wert dieses Bruches $\frac{-\eta}{2\eta^2} = -\frac{1}{2\eta}$; dieser Wert wird — absolut genommen — um so grösser, je kleiner η gewählt wird.

4. Gleichungen.

Die Gleichung $y = f(x)$, in welcher y den für irgend eine Zahl x berechneten numerischen Wert von $f(x)$ bezeichnet, wird Funktions- oder analytische Gleichung genannt.

Sollen die Werte von x gesucht werden, für welche die Funktion $f(x)$ Null wird, so wird diese Aufgabe ausgedrückt durch die Bestimmungsgleichung $f(x) = 0$.

Unter einer identischen Gleichung versteht man eine Gleichung, deren eine Seite nur eine nach arithmetischen Sätzen erfolgte Umformung der anderen ist. (Zeichen: $\equiv$).

Beispiele. 1. $y = x^2 - 8x + 15$ (Funktionsgleichung).
2. $x^2 - 8x + 15 = 0$ (Bestimmungsgleichung).
3. $\left.\begin{array}{l} 3^2 - 8 \cdot 3 + 15 \equiv 0 \\ 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 \equiv 0 \\ (a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2 \end{array}\right\}$ Identische Gleichungen.

5. Aufstellung der einander zugehörigen Werte einer Veränderlichen und einer Funktion derselben.

Die einander zugehörigen Werte einer Veränderlichen und ihrer Funktion können behufs grösserer Übersichtlichkeit in eine Tafel neben einander gesetzt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Abschnitt II.

Die Gerade.

8. Die Gleichung der Geraden aufzustellen, welche die Axen des (rechtwinkligen) Koordinatensystems in den Punkten (a, 0) **und** (0, b) **schneidet.**

Auflösung. Eine Gerade, welche nicht durch den Anfangspunkt geht, kann im Koordinatensystem vier verschiedene Lagen haben. I. $a > 0, b > 0$; II. $a < 0, b > 0$; III. $a < 0, b < 0$; IV. $a > 0, b < 0$.

I. $a > 0, b > 0$.

1. C sei irgend ein Punkt (x, y) der Geraden zwischen den Schnittpunkten A und B mit den Koordinatenaxen. Fig. 2a.

Dann ist

$$2 . \triangle COA + 2 . \triangle BOC = 2 . \triangle BOA,$$

oder, wenn OA, OB, u. s. w. die Masszahlen der betreffenden Strecken sind,

$$OA . CD + OB . CE = OA . OB,$$

$$ay + bx = ab,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Diese Gleichung besteht zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden zwischen A und B, daher gilt sie für die Koordinaten jedes Punktes der Geraden zwischen A und B.

2. C sei ein beliebiger Punkt (x, y) der Geraden auf der Verlängerung von AB. Fig. 2b.

Man erhält

$$2 . \triangle COA - 2 . \triangle COB = 2 . \triangle BOA,$$

$$OA . CD - OB . CE = OA . OB,$$

$$a . y - b . (-x) = a . b,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Die gefundene Gleichung besteht zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes der Verlängerung von AB, folglich besteht sie zwischen den Koordinaten jedes Punktes dieser Verlängerung.

3. C sei ein beliebiger Punkt (x, y) der Verlängerung von BA, Fig. 2c.

Es ergiebt sich:

$$2 . \triangle BOC - 2 . \triangle AOC = 2 . \triangle BOA,$$

$$OB . CE - OA . CD = OA . OB,$$

$$b . x - a . (-y) = a . b,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wie in den beiden ersten Fällen schliesst man auf die Gültigkeit der Gleichung für die Koordinaten jedes Punktes der Verlängerung von BA.

Die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ besteht demnach zwischen den Koordinaten (x, y) aller Punkte einer Geraden von der Lage I, d. h. sie ist die Gleichung dieser Geraden.

Aufgabe. Stelle die Gleichungen von Geraden auf, welche die Lagen II, III, IV haben.

Für jede Lage findet sich die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Im Folgenden wird die Masszahl einer Strecke zugleich zur Bezeichnung der Strecke selbst verwendet, die Längeneinheit also weggelassen werden; eine Strecke, die auf einer Axe vom Nullpunkte aus gemessen ist, wird durch die an ihrem Endpunkt befindliche (positive oder negative) Zahl bezeichnet. Daher heisst die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ die Gleichung der Geraden bezogen auf ihre Axenabschnitte.

9. Gleichung der Geraden bezogen auf den Winkel mit der x-Axe.

Nach y aufgelöst lautet die Gleichung der Geraden

$$y = -\frac{b}{a}x + b.$$

Der Koeffizient von x ist die Tangente des hohlen Winkels, welchen der oberhalb der x-Axe liegende Teil der Geraden mit der positiven Richtung der x-Axe bildet.

Beweis. 1. Fig. 3a. $-\frac{b}{a} = -\frac{OB}{OA} = \operatorname{tg}\psi = -(-\operatorname{tg}\varphi) = \operatorname{tg}\varphi.$

2. Fig. 3b. $-\frac{b}{a} = -\frac{OB}{-OA} = +\frac{OB}{OA} = \operatorname{tg}\varphi.$

3. Fig. 3c. $-\frac{b}{a} = -\frac{-OB}{-OA} = -\frac{OB}{OA} = -\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi.$

4. Fig. 3d. $-\frac{b}{a} = -\frac{OB}{OA} = +\frac{OB}{OA} = \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi.$

Die Grösse $m = -\frac{b}{a}$ wird deshalb Richtungskoeffizient der Geraden genannt, und die Gleichung $y = mx + b$ heisst die Gleichung der Geraden bezogen auf den Winkel mit der x-Axe.

Zusätze. 1. Sind zwei Gerade parallel, so sind ihre Richtungskoeffizienten einander gleich.

2. Sind die Richtungskoeffizienten zweier Geraden einander gleich, so sind die Geraden parallel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgaben.

1. Wie lautet die Gleichung der Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht und mit der x-Axe den Winkel φ bildet?
2. Die Gleichungen der Geraden aufzustellen, welche durch den Anfangspunkt gehen und mit der x-Axe die Winkel 0^0, 33^0, 45^0, $22^1/_2{}^0$, 60^0, 90^0 bilden.
3. Welches ist die Gleichung der Geraden, die parallel zur x-Axe im Abstande l gezogen ist?
4. Gleichung der Geraden parallel zur y-Axe im Abstande l?
5. Welches sind die Gleichungen der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite 2 a, wenn die Mitte einer Seite in den Nullpunkt, die gegenüberliegende Spitze in die Ordinatenaxe fällt?
6. Die Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks fällt auf den Nullpunkt, die Spitze in die Ordinatenaxe; welches sind die Gleichungen der Seiten, wenn die Grundlinie 2 a, ein Schenkel b ist?
7. Die Hypotenuse 2 a eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks liegt auf der x-Axe und wird vom Nullpunkt halbiert; die Gleichungen der Seiten aufzustellen.

10. Den Winkel zu bestimmen, unter welchem sich die Geraden $y = mx + b$ und $y = m_1 x + b_1$ schneiden. Figur 4.

Die Gerade $y = mx + b$ bilde mit der x-Axe den Winkel α, die Gerade $y = m_1 x + b_1$ den Winkel β, der von beiden Geraden eingeschlossene Winkel sei γ; dann ist

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta} = \frac{m - m_1}{1 + m m_1}.$$

Zusätze.

1. Parallele Gerade haben gleiche Richtungskoeffizienten.
2. Gerade von gleichen Richtungskoeffizienten sind parallel.
3. Das Produkt der Richtungskoeffizienten zweier zu einander senkrechten Geraden ist — 1.
4. Ist das Produkt der Richtungskoeffizienten zweier Geraden gleich — 1, so stehen die Geraden senkrecht zu einander.

Aufgaben.

1. Die Gleichung der Geraden aufzustellen, welche durch den Nullpunkt geht und senkrecht ist zu $y = \frac{x}{3}\sqrt{3} + 4$.
2. Gleichung der Geraden, welche parallel zu $y = \frac{x}{3}\sqrt{3} + 4$ auf der y-Axe die Strecke — 6 abschneidet?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. In welchem Punkte schneidet $y = \frac{x}{3}\sqrt{3} - 6$ die x-Axe?

4. Welches ist die Gleichung der Geraden, welche senkrecht ist zu $y = x\sqrt{3} + 5$ und auf der y-Axe die Strecke $+ 6$ abschneidet?

11. Jede Gleichung ersten Grades inbezug auf x und y stellt eine Gerade dar.

Beweis. Löst man $Ax + By + C = 0$ nach y auf, so folgt $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$; dies ist die Gleichung der Geraden vom Richtungskoeffizienten $-\frac{A}{B}$, welche auf der y-Axe die Strecke $-\frac{C}{B}$ abschneidet.

Aufgaben.

1. Die Axenabschnitte der Geraden $5x + 7y = 9$ zu suchen.
2. Welchen Winkel bildet der obere Teil der Geraden $2x + 3y = 1$ mit der positiven x-Axe?
3. Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden $3x + 4y = 5$ und $4x - 3y = 2$?
4. Welchen Winkel bilden die Geraden $5x + 6y = 3$ und $2x - 3y = 5$ mit einander?

12. Die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden $Ax + By + C = 0$ und $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ zu finden.

Die Koordinaten (x_1, y_1) des Schnittpunktes machen beide Gleichungen identisch, also

$$A x_1 + B y_1 + C \equiv 0.$$
$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 \equiv 0.$$

Man findet

$$x_1 = \frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B}, \quad y_1 = \frac{A_1C - AC_1}{AB_1 - A_1B}.$$

Aufgabe. Die Gleichungen $4x + y = 23$ und $x + 2y = 11$ durch Zeichnung aufzulösen.

Man konstruiere die Geraden durch Eintragung ihrer Axenabschnitte in das Koordinatensystem und lese die Koordinaten des Schnittpunktes auf den Axen ab; diese sind die gesuchten Unbekannten.

13. Die Gleichung der Geraden zu bestimmen, welche durch zwei gegebene Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht.

Ist m der Richtungskoeffizient der Geraden, b ihr Abschnitt auf der Ordinatenaxe, so gilt für die Koordinaten (x, y) jedes ihrer Punkte die Gleichung

$$y = mx + b \qquad (1)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zur Bestimmung der Unbekannten m und b sind zwei Gleichungen erforderlich. Da die Puukte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf der Geraden liegen, so genügen ihre Koordinaten der Gleichung (1), demnach

$$y_1 = mx_1 + b \qquad (2)$$
$$y_2 = mx_2 + b \qquad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (4)$$

aus (2) und (3) $\quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad (5)$

aus (4) und (5) $\quad y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$

Aufgaben. 1. Die Gleichung der Geraden zu bestimmen, welche durch die Punkte $(5, -3)$ und $(-4, 3)$ geht. Welchen Winkel bildet die Gerade mit der x-Axe? Welches sind ihre Axenabschnitte?

2. Gleichung der Geraden, welche auf $y = ax + \alpha$ senkrecht steht und durch den Punkt (x_1, y_1) geht?

3. Gleichung der Geraden, welche zu $y = ax + \alpha$ parallel ist und durch (x_1, y_1) geht?

4. Die Gleichungen der drei Ecktransversalen des Dreiecks § 9 Aufg. 5 nach den Mitten der Gegenseiten aufzustellen; dieselben schneiden sich in einem Punkte und sind senkrecht zu den Gegenseiten.

5. Welches sind die Gleichungen der seitenhalbierenden Ecktransversalen und der Höhen des Dreiecks § 9 Aufgabe 6?

6. Die Gleichungen der Seitenhalbierenden des Dreiecks § 9 Aufg. 7 aufzustellen und zu zeigen, dass diese Geraden sich in einem Punkte schneiden.

14. Die Länge des vom Anfangspunkte auf die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ gefällten Lotes zu berechnen.

Das rechtwinklige Dreieck, dessen Katheten die Axenabschnitte a und b sind, hat die Hypotenuse $\sqrt{a^2 + b^2}$, die Höhe p. Der doppelte Inhalt desselben ist einerseits $\pm ab$, andererseits $p\sqrt{a^2 + b^2}$; somit ist

$$p\sqrt{a^2 + b^2} = \pm ab \qquad (1)$$

wo das positive oder negative Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem a und b gleichartige oder ungleichartige Zahlen sind; aus (1) folgt

$$p = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Welches ist die Länge des Lotes, das vom Anfangspunkt auf die Gerade $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ gefällt ist?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

15. Normalform der Gleichung der Geraden.

Beseitigt man in der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ die Nenner und dividiert durch $\sqrt{a^2 + b^2}$, so erhält man

$$\frac{x \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{y\,a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{a\,b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \qquad (1).$$

Im Folgenden wird die Drehung einer Geraden um einen ihrer Endpunkte positiv genannt, wenn sie in demselben Sinne erfolgt wie die Vierteldrehung um den Anfangspunkt, durch welche die positive x-Axe in die Lage der positiven y-Axe gelangt.

Bezeichnet nun α die Grösse der positiven Drehung, welche die positive x-Axe um den Anfangspunkt machen muss, um in die Lage von p zu gelangen, so wird aus (1) für jede Lage der Geraden

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 \qquad (2).$$

Beweis.

1. $a > 0,\ b > 0$ Fig. 5a.

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{OB}{AB} = \cos\beta = \cos\alpha;$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{OA}{AB} = \sin\beta = \sin\alpha;$$

$$\frac{a\,b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = p.$$

Gleichung (1) wird $x \cos\alpha + y \sin a - p = 0$.

2. $a < 0,\ b > 0$ Fig. 5b.

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{OB}{AB} = \cos\beta = \cos\alpha_1 = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-OA}{AB} = -\sin\beta = -\sin\alpha_1 = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\frac{a\,b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -p.$$

Gleichung (1) ergiebt $-x \cos\alpha - y \sin\alpha - (-p) = 0$,

oder $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$.

3. $a < 0,\ b < 0$ Fig. 5c.

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-OB}{AB} = -\cos\beta = -\cos\alpha_1 = -\cos(\alpha - \pi) = \cos\alpha;$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-OA}{AB} = -\sin\beta = -\sin\alpha_1 = -\sin(\alpha - \pi) = \sin\alpha;$$

$$\frac{a\,b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = p.$$

Gleichung (1) wird $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. $a > 0,\ b < 0.$ Fig. 5d.

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-OB}{AB} = -\cos\beta = -\cos\alpha_1 = -\cos(2\pi-\alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{OA}{AB} = \sin\beta = \sin\alpha_1 = \sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = -p.$$

Gleichung (1) ergiebt

$$-x\cos\alpha - y\sin\alpha - (-p) = 0,$$

oder $$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Diese Gleichung heisst die Gleichung der Geraden in der Normalform.

16. Entfernung eines Punktes von einer Geraden.

Bezeichnet q die Entfernung eines Punktes (ξ, η) von der Geraden $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. so ist $\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p = \pm q$, wo das positive Vorzeichen gilt, wenn (ξ, η) und der Anfangspunkt auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen, das negative, wenn sie sich auf derselben Seite befinden.

Beweis.

Fall 1. (ξ, η) und der Anfangspunkt befinden sich auf verschiedenen Seiten der Geraden $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Fig. 6a.

Man zeichne die Parallele zu $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ durch (ξ, η); die Gleichung derselben lautet

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - (p+q) = 0 \qquad (1)$$

(ξ, η) ist ein Punkt dieser Geraden, folglich

$$\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - (p+q) \equiv 0 \qquad (2)$$

oder $$\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p \equiv +q.$$

Der Beweis ist derselbe für jede Lage der Geraden, da die Gültigkeit der Gleichung $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ für jedes α von 0 bis 2π in § 15 erwiesen ist.

Fall 2. (ξ, η) und der Anfangspunkt liegen auf derselben Seite der Geraden $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

1, $q < p$ Fig. 6b.

Die Parallele zu $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ durch den Punkt (ξ, η) hat die Gleichung

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - (p-q) = 0 \qquad (1)$$

(ξ, η) ist ein Punkt dieser Geraden, folglich

$$\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - (p-q) \equiv 0 \qquad (2)$$

oder $$\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p \equiv -q.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Beweis ist derselbe für alle Werte von α zwischen 0 und 2π.

2, $q > p$ Fig. 6c.

Die Gleichung der Parallelen zu $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ durch (ξ, η) ist

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - (q - p) = 0,$$

oder $$x\cos(\pi+\alpha) + y\sin(\pi+\alpha) - (q - p) = 0,$$

$$-x\cos\alpha - y\sin\alpha - (q - p) = 0,$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + (q - p) = 0. \qquad (1)$$

Da (ξ, η) auf dieser Geraden liegt, so ist

$$\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha + (q - p) \equiv 0 \qquad (2)$$

d. h. $\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p \equiv -q$.

Da für alle α $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$, $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$, so ist der Beweis derselbe für alle Werte von α zwischen 0 und 2π, d. h. für alle Lagen der Geraden $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

Folgerung. Beim Durchgange des Punktes (ξ, η) durch die Gerade $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ geht der Ausdruck $\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p$ vom Positiven durch Null ins Negative über.

17. Stellen die Gleichungen $Ax + By + C = 0$ und $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dieselbe Gerade dar, so unterscheiden sich ihre linken Seiten nur durch einen konstanten Faktor.

Beweis. Da die Gleichungen dieselbe Gerade darstellen, so müssen die Axenabschnitte dieser Geraden sich aus beiden Gleichungen als dieselben ergeben.

Für $y = 0$ folgt $a = -\frac{C}{A} = -\frac{C_1}{A_1}$,

d. h. $C : A = C_1 : A_1$,

oder $A : A_1 = C : C_1$. (1)

Für $x = 0$ erhält man

$$b = -\frac{C}{B} = -\frac{C_1}{B_1},$$

oder $B : B_1 = C : C_1$. (2)

Es sei nun $\frac{C}{C_1} = k$, so ist nach (1) und (2) auch $\frac{A}{A_1} = k$, $\frac{B}{B_1} = k$,

d. h. $A = kA_1$, $B = kB_1$, $C = kC_1$;

daher $Ax + By + C \equiv k(A_1x + B_1y + C_1)$.

18. Die Gleichung der Geraden $Ax + By + C = 0$ auf die Normalform zu bringen.

Ist p das vom Anfangspunkte auf die Gerade $Ax + By + C = 0$ gefällte Lot und α der Winkel, den dieses Lot mit der positiven

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

x-Axe bildet, so ist $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ die Gleichung dieser Geraden in der Normalform. Nach § 17 ist

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p \equiv k\,(Ax + By + C),$$

demnach $\cos\alpha = kA$, $\sin\alpha = kB$, $-p = kC$.

Die beiden ersten Gleichungen ergeben

$$k^2 (A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel bestimmt sich aus der dritten Gleichung $-p = kC$. Da p eine absolute Zahl, $-p$ also negativ ist, so sind k und C ungleichartig, d. h. das positive Vorzeichen der Wurzel ist zu wählen, wenn C negativ, das negative, wenn C positiv ist.

Die Normalform der Gleichung $Ax + By + C = 0$ ist demnach

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p \equiv \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

19. Die Entfernung des Punktes (ξ, η) von der Geraden $Ax + By + C = 0$ zu bestimmen.

Man bringe die Gleichung $Ax + By + C = 0$ auf die Normalform und setze in die linke Seite statt x und y ξ bezw. η ein. Man findet

$$q = \pm \frac{A\xi + B\eta + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Das Vorzeichen des Bruches bestimmt sich nach § 16, dasjenige der Wurzel nach § 18.

Aufgaben.

1. Die Entfernung des Punktes (ξ, η) von $Ax + By + C = 0$ zu bestimmen, wenn $C > 0$.
2. Dieselbe Aufgabe, wenn $C < 0$.
3. Welche Entfernung hat der Punkt (5, 6) von $3x + 4y + 4 = 0$ und auf welcher Seite der Geraden liegt er?
4. Die Entfernung des Nullpunktes von der Geraden $3x + 4y + 4 = 0$ zu berechnen.

20. Den Inhalt Δ des Dreiecks zu berechnen, dessen Ecken die Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) haben. Figur 7.

Es ist

$$\Delta = \frac{gh}{2}, \qquad (1)$$

$$g = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2)$$

Um die Höhe h zu bestimmen, setzt man in die linke Seite der Normalform der Gleichung von AB für x, y die Koordinaten x_3, y_3

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von C ein. Die Gleichung von AB lautet nach § 13

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (3)$$

Die Normalform ist

$$\frac{(x_2 - x_1)y - (y_2 - y_1)x - (y_1 x_2 - x_1 y_2)}{\pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = 0 = \frac{N}{\pm g} \qquad (4)$$

(Vorzeichen nach § 18).

Demnach ist

$$h = \pm\frac{(x_2 - x_1)y_3 - (y_2 - y_1)x_3 - (y_1 x_2 - x_1 y_2)}{\pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \pm\frac{N_3}{\pm g} \qquad (5)$$

(Vorzeichen des Bruches nach § 16).

Man erhält

$$\Delta = \frac{gh}{2} = \pm\frac{1}{2}g.\frac{N_3}{g} = \pm\frac{1}{2}N_3 \qquad (6)$$

oder $$\Delta = \pm\frac{1}{2}\left\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right\} \qquad (7)$$

Ordnet man nach den y, so ergiebt sich

$$\Delta = \pm\frac{1}{2}\left\{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)\right\} \qquad (8)$$

Beispiel: Inhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Koordinaten (4, 3), (2, 1), (5, 7) haben.

21. Unter welcher Bedingung liegen drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) auf einer Geraden?

Auflösung 1. Die Gleichung der Geraden, welche durch (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht, ist $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Soll (x_3, y_3) ein Punkt dieser Geraden sein, so muss sein

$$y_3 - y_1 \equiv \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1),$$

oder $$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \equiv 0,$$

oder auch $$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) \equiv 0.$$

Auflösung 2. Nach § 20 ist der Inhalt eines Dreiecks von den Eckpunktskoordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

$$\Delta = \pm\frac{1}{2}\left\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right\}$$

oder $$\Delta = \pm\frac{1}{2}\left\{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)\right\}.$$

Fallen die drei Eckpunkte in eine Gerade, so wird $\Delta = 0$, d. h.

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

oder $$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

22. Ist $\mathfrak{A}_0 \equiv A_0 x + B_0 y + C_0$, $\mathfrak{A}_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1$, k eine beliebige Konstante, so ist $\mathfrak{A}_0 + k\,\mathfrak{A}_1 = 0$ die Gleichung einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{A}_0 = 0$ und $\mathfrak{A}_1 = 0$ geht.

Beweis. $\mathfrak{A}_0 + k\,\mathfrak{A}_1 = 0$ ist die Gleichung einer Geraden. Es ist nämlich $\mathfrak{A}_0 + k\,\mathfrak{A}_1 \equiv (A_0 + k\,A_1)\,x + (B_0 + k\,B_1)\,y + (C_0 + k\,C_1)$. Bezeichnet man die Konstanten der Reihe nach mit A, B, C, so erhält die Gleichung $\mathfrak{A}_0 + k\,\mathfrak{A}_1 = 0$ die Form $A\,x + B\,y + C = 0$, sie ist daher nach § 11 die Gleichung einer Geraden.

Diese Gerade geht durch den Schnittpunkt (x_1, y_1) der Geraden $\mathfrak{A}_0 = 0$ und $\mathfrak{A}_1 = 0$; denn da $\mathfrak{A}_0\,(x_1, y_1) \equiv 0$ und $\mathfrak{A}_1\,(x_1, y_1) \equiv 0$, so ist auch $\mathfrak{A}_0\,(x_1, y_1) + k\,\mathfrak{A}_1\,(x_1, y_1) \equiv 0$, d. h. (x_1, y_1) ist ein Punkt der Geraden $\mathfrak{A}_0 + k\,\mathfrak{A}_1 = 0$.

23. Geht eine Gerade durch den Schnittpunkt zweier Geraden $\mathfrak{A}_0 = 0$ und $\mathfrak{A}_1 = 0$, so gilt für die Koordinaten (x, y) jedes ihrer Punkte die Gleichung $\mathfrak{A}_0 + k\,\mathfrak{A}_1 = 0$, wo k eine Konstante ist. Figur 8.

Beweis. 1. Die Gerade teile den von $\mathfrak{A}_0 = 0$ und $\mathfrak{A}_1 = 0$ gebildeten Winkel, in welchem der Anfangspunkt O liegt.

Sind (ξ, η) die Koordinaten eines beliebigen Punktes P der Geraden AP, PB und PC die von P auf $\mathfrak{A}_0 = 0$ und $\mathfrak{A}_1 = 0$ gefällten Lote, so ist

$$AP = \frac{PB}{\sin\alpha_0} = \frac{PC}{\sin\alpha_1};$$

$$PB - \frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_1} \cdot PC = 0;$$

$$-\frac{\mathfrak{A}_0\,(\xi, \eta)}{\pm\sqrt{A_0^2 + B_0^2}} + \frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_1} \cdot \frac{\mathfrak{A}_1\,(\xi, \eta)}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = 0;$$

$$\mathfrak{A}_0\,(\xi, \eta) - \frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_1} \cdot \frac{\pm\sqrt{A_0^2 + B_0^2}}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\,\mathfrak{A}_1\,(\xi, \eta) = 0,$$

oder $\mathfrak{A}_0\,(\xi, \eta) + k\,\mathfrak{A}_1\,(\xi, \eta) = 0.$

Da die Gleichung zwischen den Koordinaten ξ, η eines beliebigen Punktes P der Geraden besteht, so gilt sie für die Koordinaten x, y jedes Punktes dieser Geraden; also

$$\mathfrak{A}_0 + k\,\mathfrak{A}_1 = 0.$$

2. Für eine Gerade AP_1, die den Winkel teilt, in welchem O nicht liegt, ist die Betrachtung — abgesehen von einem Vorzeichen — dieselbe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgaben.

1. Die Gleichung der Geraden zu suchen, welche den Anfangspunkt mit dem Schnittpunkte von $\mathfrak{A}_0 = 0$ und $\mathfrak{A}_1 = 0$ verbindet.

   Auflösung. Die gesuchte Gleichung ist $\mathfrak{A}_0 + k\,\mathfrak{A}_1 = 0$, wo k zu bestimmen ist. Da (0, 0) auf dieser Geraden liegt, so ist $\mathfrak{A}_0\,(0, 0) + k\,\mathfrak{A}_1\,(0, 0) = 0$; $k = -\frac{\mathfrak{A}_0\,(0, 0)}{\mathfrak{A}_1\,(0, 0)} = -\frac{C_0}{C_1}$. Die gesuchte Gleichung ist $C_1\,\mathfrak{A}_0 - C_0\,\mathfrak{A}_1 = 0$.

2. Die Gleichung der Geraden aufzustellen, welche durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{A}_0 = 0$ und $\mathfrak{A}_1 = 0$ parallel zur x-Axe gezogen ist.

   Aufl. Die gesuchte Gleichung ist $\mathfrak{A}_0 + k\,\mathfrak{A}_1 = 0$; k ist zu bestimmen. Da die Gerade parallel zur x-Axe ist, so muss der Koeffizient von x Null sein. Also $A_0 + k\,A_1 = 0$; $k = -\frac{A_0}{A_1}$. Die verlangte Gleichung lautet: $A_1\,\mathfrak{A}_0 - A_0\,\mathfrak{A}_1 = 0$.

3. Gl. der Geraden, welche durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{A}_0 = 0$ und $\mathfrak{A}_1 = 0$ geht parallel zur y-Axe? Aufl. $B_1\,\mathfrak{A}_0 - B_0\,\mathfrak{A}_1 = 0$.

4. Gl. der Geraden durch denselben Schnittpunkt und (x_1, y_1)?

   Aufl. $\mathfrak{A}_1\,(x_1, y_1)\,\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0\,(x_1, y_1)\,\mathfrak{A}_1 = 0$.

5. Gl. der Geraden, welche den Punkt (2, 3) mit dem Schnittpunkte von $2x + 3y + 1 = 0$ und $3x - 4y - 5 = 0$ verbindet?

   Aufl. In Aufgabe 4 ist zu setzen: $\mathfrak{A}_0 \equiv 2x + 3y + 1$, $\mathfrak{A}_1 \equiv 3x - 4y - 5$, $\mathfrak{A}_0\,(2, 3) = 14$, $\mathfrak{A}_1\,(2, 3) = -11$. Die gesuchte Gleichung ist $11\,(2x + 3y + 1) + 14\,(3x - 4y - 5) = 0$, oder $64x - 23y - 59 = 0$.

6. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind $y = 5x + 6$, $y = -3x + 4$, $y = 2x - 1$; die Gleichungen der Höhen und der Winkelhalbierenden aufzustellen ohne vorherige Bestimmung der Koordinaten der Eckpunkte.

   Anmerkung. Für die folgenden Aufgaben über Gerade im Dreiecke wird festgesetzt: Der Anfangspunkt des Koordinatensystems ist in das Dreieck gelegt; a bezeichnet abkürzend den Ausdruck $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$: $a_0 \equiv x\cos\alpha_0 + y\sin\alpha_0 - p_0$; u. s. w.

7. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks seien $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$; die Gleichungen der Winkelhalbierenden aufzustellen. Fig. 9.

   Aufl. Die Entfernungen irgend eines Punktes (ξ, η) der Halbierenden des Winkels A von den Seiten $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$ sind $-a_1\,(\xi, \eta)$ und $-a_2\,(\xi, \eta)$; diese Entfernungen sind ein-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ander gleich, daher $a_1(\xi, \eta) - a_2(\xi, \eta) = 0$. Da (ξ, η) ein beliebiger Punkt der Winkelhalbierenden ist, so gilt dieselbe Gleichung für die Koordinaten (x, y) jedes Punktes dieser Geraden. Die Gleichung der Halbierenden des Winkels A ist demnach $a_1 - a_2 = 0$; für die beiden anderen Winkelhalbierenden finden sich ebenso die Gleichungen $a_2 - a_0 = 0$ und $a_0 - a_1 = 0$.

8. Welches sind die Gleichungen der Halbierenden der Aussenwinkel?

Antwort: $a_1 + a_2 = 0$, $a_2 + a_0 = 0$, $a_0 + a_1 = 0$.

9. Die Gleichungen der Höhen desselben Dreiecks aufzustellen. Fig. 10. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes P der Höhe AD seien ξ, η. Es ist $PE : DG = PF : DH$, oder $PE : PF = DG : DH$;

$$-a_1(\xi, \eta) : -a_2(\xi, \eta) = AD \cos\gamma : AD \cos\beta;$$

$$a_1(\xi, \eta) \cos\beta - a_2(\xi, \eta) \cos\gamma = 0.$$

Diese Gleichung gilt für die Koordinaten (ξ, η) eines beliebigen Punktes der Höhe AD, folglich besteht sie zwischen den Koordinaten (x, y) jedes Punktes derselben. Die Gleichung der Höhe AD ist demnach $a_1 \cos\beta - a_2 \cos\gamma = 0$. Die Gleichungen der beiden anderen Höhen lauten $a_2 \cos\gamma - a_0 \cos\alpha = 0$, $a_0 \cos\alpha - a_1 \cos\beta = 0$.

10. Die Gleichungen der Ecktransversalen nach den Mitten der Seiten desselben Dreiecks zu suchen.

Antw. Die Ecktransversale nach der Mitte von BC hat die Gleichung $a_1 \sin\beta - a_2 \sin\gamma = 0$; die Gleichungen der beiden anderen Seitenhalbierenden sind $a_2 \sin\gamma - a_0 \sin\alpha = 0$ und $a_0 \sin\alpha - a_1 \sin\beta = 0$.

24. Drei Gerade $\mathfrak{A}_0 = 0$, $\mathfrak{A}_1 = 0$, $\mathfrak{A}_2 = 0$ gehen durch einen Punkt, wenn sich drei Konstante m_0, m_1, m_2 so finden lassen, dass $m_0 \mathfrak{A}_0 + m_1 \mathfrak{A}_1 + m_2 \mathfrak{A}_2 \equiv 0$.

Voraussetzung: $m_0 \mathfrak{A}_0 + m_1 \mathfrak{A}_1 + m_2 \mathfrak{A}_2 \equiv 0$.

Behauptung: $\mathfrak{A}_0 = 0$, $\mathfrak{A}_1 = 0$, $\mathfrak{A}_2 = 0$ gehen durch einen Punkt.

Beweis: Für den Schnittpunkt (x_1, y_1) der Geraden $\mathfrak{A}_0 = 0$ und $\mathfrak{A}_1 = 0$ ist $\mathfrak{A}_0(x_1, y_1) \equiv 0$ und $\mathfrak{A}_1(x_1, y_1) \equiv 0$, also auch

$$m_0 \mathfrak{A}_0(x_1, y_1) + m_1 \mathfrak{A}_1(x_1, y_1) \equiv 0. \qquad (1)$$

Nach Voraussetzung ist

$$m_0 \mathfrak{A}_0(x_1, y_1) + m_1 \mathfrak{A}_1(x_1, y_1) + m_2 \mathfrak{A}_2(x_1, y_1) \equiv 0. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt durch Subtraktion

$$m_2 \mathfrak{A}_2(x_1, y_1) \equiv 0.$$

oder

$$\mathfrak{A}_2(x_1, y_1) \equiv 0.$$

d. h. (x_1, y_1) liegt auf der Geraden $\mathfrak{A}_2 = 0$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrsätze und Aufgaben.

1. Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks gehen durch einen Punkt.

   Beweis: $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_0) + (a_0 - a_1) \equiv 0.$

2. Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

   Beweis:

   $(a_1 \cos\beta - a_2 \cos\gamma) + (a_2 \cos\gamma - a_0 \cos\alpha) + (a_0 \cos\alpha - a_1 \cos\beta) \equiv 0.$

3. Die Ecktransversalen nach den Mitten der Gegenseiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

   Beweis:

   $(a_1 \sin\beta - a_2 \sin\gamma) + (a_2 \sin\gamma - a_0 \sin\alpha) + (a_0 \sin\alpha - a_1 \sin\beta) \equiv 0.$

4. Welcher geometrische Satz folgt aus der identischen Gleichung

   $$(a_2 + a_0) - (a_0 + a_1) + (a_1 - a_2) \equiv 0?$$

   Antwort: Die Halbierungslinien zweier Aussenwinkel eines Dreiecks und die Halbierende des dritten Dreieckswinkels schneiden sich in einem Punkte.

5. Welchen geometrischen Satz liefert die Gleichung $a_0 + a_1 + a_2 = 0$?

   Antwort: Die Schnittpunkte der Halbierenden der Aussenwinkel eines Dreiecks mit den Gegenseiten liegen auf einer Geraden.

   Beweis: $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ ist die Gleichung einer Geraden. (§ 11). Der Schnittpunkt (x_1, y_1) von $a_0 = 0$ und $a_1 + a_2 = 0$ liegt auf dieser Geraden; denn $a_0(x_1, y_1) \equiv 0$, $a_1(x_1, y_1) + a_2(x_1, y_1) = 0$, daher $a_0(x_1, y_1) + a_1(x_1, y_1) + a_2(x_1, y_1) \equiv 0$. Der Schnittpunkt (x_2, y_2) von $a_1 = 0$ und $a_2 + a_0 = 0$ und der Schnittpunkt (x_3, y_3) von $a_2 = 0$ und $a_0 + a_1 = 0$ liegen ebenfalls auf der Geraden $a_0 + a_1 + a_2 = 0$.

6. Welchen geometrischen Satz ergiebt die Gleichung

   $$-a_0 + a_1 + a_2 = 0?$$

   Antwort: Die Schnittpunkte der Halbierungslinien zweier Innenwinkel und des dritten Aussenwinkels mit ihren Gegenseiten liegen auf einer Geraden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Abschnitt III.

Der Kreis.

25. Die Gleichung des Kreises vom Radius r aufzustellen, dessen Mittelpunkt die Koordinaten (a, b) hat. Fig. 11.

Auflösung. Es ist $\overline{MB}^2 + \overline{MA}^2 = r^2$,

oder $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$ (1)

(Normalform der Kreisgleichung).

Der Mittelpunkt M kann in jedem der vier Felder liegen, in welche die Ebene durch die Koordinatenaxen geteilt wird; für jede Lage von M kann A ein Punkt jedes der vier Quadranten der Peripherie sein. In jedem dieser 16 verschiedenen Fälle besteht zwischen den Koordinaten des Punktes A die obige Gleichung.

Die Abhängigkeit der Veränderlichen von einander bleibt dieselbe, wenn man beide Seiten der Gleichung mit einer reellen, von Null verschiedenen Konstanten multipliziert; die linke Seite ist dann eine ganze Funktion zweiten Grades der Veränderlichen x und y, in welcher der Koeffizient von $x \cdot y$ gleich Null, die Koeffizienten von x^2 und y^2 einander gleich sind.

Zusatz 1. Hat der Mittelpunkt die Koordinaten (r, 0), so wird aus (1) $y^2 = (2r - x)\,x.$ (2)

(Scheitelgleichung des Kreises).

Diese Gleichung folgt auch unmittelbar aus der Figur mit Hilfe des Satzes: Die Höhe des rechtwinkeligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zwischen den Kathetenprojektionen. (8 Fälle: Mittelpunktskoordinaten $(\pm r, 0)$, A im 1., 2., 3., 4. Quadranten).

Zusatz 2. Fällt der Mittelpunkt des Kreises mit dem Anfangspunkt des Koordinatensystems zusammen, so liefert (1)

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \qquad (3)$$

(Mittelpunktsgleichung des Kreises).

Auch diese Gleichung lässt sich unmittelbar aus der Figur ableiten. (4 Fälle: A im 1., 2., 3., 4. Quadranten).

Anmerkung. $x^2 + y^2 - r^2 \gtreqless 0$, je nachdem Punkt (x,y) ausserhalb, auf, innerhalb der Peripherie. Beweis!

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

26. Jede Gleichung zweiten Grades von x und y, in welcher x . y den Koeffizienten Null, x^2 und y^2 gleiche Koeffizienten haben, ist die Gleichung eines Kreises. (Umkehrung von 25.)

Behauptung. $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ ist die Gleichung eines Kreises.

Beweis. Nach Division durch a addiere und subtrahiere man $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{2a}\right)^2$; man erhält

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 - \left(\frac{1}{2a}\sqrt{b^2 + c^2 - 4ad}\right)^2 = 0.$$

Dies ist nach § 25 die Normalform der Gleichung eines Kreises vom Radius $\frac{1}{2a}\sqrt{b^2 + c^2 - 4ad}$ und dem Mittelpunkt $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a}\right)$.

Aufgaben:

Eine Seite 2 a eines gleichseitigen Dreiecks sei x-Axe, die zugehörige Höhe y-Axe; aufzustellen

1. die Gleichung des umbeschriebenen Kreises,
2. die Gleichung des einbeschriebenen Kreises,
3. die Gleichungen der drei äusseren Berührungskreise.
4. Den geometrischen Ort für den Punkt P innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite 2 a zu suchen, dessen Entfernung von einer Seite mittlere Proportionale zwischen seinen Entfernungen von den beiden anderen Seiten ist.
5. Welche Kurve bilden die Mittelpunkte aller Kreise, die von zwei festen Punkten P und P_1 unter den Winkeln 60^0 und 90^0 gesehen werden?
6. Eine Strecke AB = 2a erscheint von einem beweglichen Punkte P der Ebene unter dem konstanten Winkel φ; welche Kurve beschreibt P? Beispiele: $\varphi = 45^0, 60^0, 90^0$.

27. Die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Geraden $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ und des Kreises $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ zu bestimmen.

Auflösung. Für die Koordinaten (x_1, y_1) eines gemeinsamen Punktes gelten beide Gleichungen gleichzeitig; die Rechnung ergiebt:

$$x_1 = p \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{r^2 - p^2},$$
$$y_1 = p \sin \alpha \mp \cos \alpha \sqrt{r^2 - p^2}.$$

Folgerung. Eine Gerade hat nur einen Punkt mit einem Kreise gemein, wenn ihre Entfernung vom Mittelpunkte gleich dem Radius ist; sie hat zwei Punkte oder keinen Punkt mit ihm gemein, je nach-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dem ihre Entfernung vom Mittelpunkte kleiner oder grösser ist als der Radius.

Aufgaben.

1. Welche Kurve bilden die Halbierungspunkte paralleler Sehnen des Kreises $x^2 + y^2 - r^2 = 0$?

   Aufl. Ist $y = mx + b$ eine der parallelen Sehnen, (ξ, η) ihr Mittelpunkt, (x_1, y_1), (x_2, y_2) ihre Endpunkte, so ist

$$\eta = m\xi + b, \quad \xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{mb}{1 + m^2}.$$

   Durch Elimination von b folgt $\eta = -\frac{1}{m}\xi$.

2. Eine sich drehende Gerade geht durch einen festen Punkt P, dessen Entfernung vom Mittelpunkte M eines Kreises vom Radius r gleich 2a ist. Welche Kurve bilden die Halbierungspunkte der Sehnen, die der Kreis auf der Geraden abschneidet?

   Aufl. Nimmt man P zum Anfangspunkte, PM zur x-Axe, so ist die Gleichung des Kreises $(x - 2a)^2 + y^2 - r^2 = 0$, die Gleichung der Geraden $y = mx$, wo m veränderlich. Für die Koordinaten (ξ, η) des Mittelpunktes einer beliebigen Sehne ergiebt sich $\eta = m\xi$, $\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2a}{1 + m^2}$. Durch Beseitigung von m folgt $\xi^2 + \eta^2 - 2a\xi = 0$.

28. Die Gleichung der Tangente aufzustellen, welche den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ im Punkte (x_1, y_1) berührt.

Auflösung 1. Ist p das Lot, welches vom Anfangspunkte auf die Tangente gefällt wird und α der Winkel, welchen dieses Lot mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bildet, so ist die Gleichung der Tangente

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0,$$

wo p, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ zu bestimmen sind nach § 27. Man erhält $p = r$, $\cos\alpha = \frac{x_1}{r}$, $\sin\alpha = \frac{y_1}{r}$, und somit

$$x x_1 + y y_1 - r^2 = 0.$$

Auflösung 2. Die Sekante, welche durch die Kreispunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht, hat die Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1); \qquad (1)$$

wo

$$x_1^2 + y_1^2 \equiv r^2, \qquad (2)$$

$$x_2^2 + y_2^2 \equiv r^2. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \qquad (4)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus (4) und (1) ergiebt sich die Gleichung der Sekante; diese wird Tangente in (x_1, y_1), wenn (x_2, y_2) mit (x_1, y_1) zusammenfällt. Man erhält schliesslich $xx_1 + yy_1 - r^2 = 0$.

Aufgaben und Lehrsätze.

1. Welches ist die Gleichung der Tangente im Punkte (3, 4) des Kreises $x^2 + y^2 - 25 = 0$?
2. Die Entfernung des Anfangspunktes von dieser Tangente nach § 19 zu bestimmen.
3. Welchen Winkel bildet diese Tangente mit der positiven Richtung der x-Axe?
4. Die Gleichung der Geraden aufzustellen, welche im Endpunkte (x_1, y_1) des Radius r senkrecht zu diesem gezogen ist.
5. Der Radius, welcher nach dem Berührungspunkte der Tangente gezogen ist, steht senkrecht auf ihr.
6. Das Lot zur Tangente im Berührungspunkte geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

29. Sind x und y die Koordinaten eines Punktes P inbezug auf ein Koordinatensystem vom Anfangspunkte O, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Koordinaten desselben Punktes inbezug auf ein dem ersteren paralleles System vom Anfangspunkte O_1, so ist $\mathfrak{x} = x - a$, $\mathfrak{y} = y - b$, wo a und b die Koordinaten von O_1 im System O sind. Fig. 12.

Beweis. Zunächst ist für jede Lage von P zu zeigen, dass $\mathfrak{x} = x - a$.

O_1 liegt rechts oder links von der y-Axe; P liegt rechts von beiden Ordinatenaxen, zwischen ihnen oder links von beiden. Demnach sind folgende sechs Fälle zu behandeln:

1a. $a > 0,\ x > 0,\ \mathfrak{x} > 0$;	2a. $a < 0,\ x > 0,\ \mathfrak{x} > 0$;
1b. $a > 0,\ x > 0,\ \mathfrak{x} < 0$;	2b. $a < 0,\ x < 0,\ \mathfrak{x} > 0$;
1c. $a > 0,\ x < 0,\ \mathfrak{x} < 0$;	2c. $a < 0,\ x < 0,\ \mathfrak{x} < 0$.

Fig. 1a. $a > 0,\ x > 0,\ \mathfrak{x} > 0.$

$\mathfrak{x} = BA = OA - OB = x - a.$

Fig. 1b. $a > 0,\ x > 0,\ \mathfrak{x} < 0$

$\mathfrak{x} = -BA = -(OB - OA) = OA - OB = x - a.$

Fig. 1c. $a > 0,\ x < 0,\ \mathfrak{x} < 0$

$\mathfrak{x} = -BA = -(OA + OB) = -OA - OB = x - a.$

Fig. 2a. $a < 0,\ x > 0,\ \mathfrak{x} > 0.$

$\mathfrak{x} = BA = OA + OB = x - a$

Fig. 2b. $a < 0,\ x < 0,\ \mathfrak{x} > 0$

$\mathfrak{x} = BA = OB - OA = -a + x = x - a.$

Fig. 2c. $a < 0,\ x < 0,\ \mathfrak{x} < 0.$

$\mathfrak{x} = -BA = -(OA - OB) = -OA - (-OB) = x - a.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ebenso wird bewiesen, dass für jede Lage von P $\mathfrak{y} = y - b$; auch hier ergeben sich sechs verschiedene Fälle, je nachdem O_1 oberhalb oder unterhalb der x-Axe, P oberhalb beider Abscissenaxen, zwischen ihnen oder unterhalb derselben liegt.

30. Die Gleichung der Geraden aufzustellen, welche den Kreis $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$ im Punkte (x_1, y_1) berührt.

Auflösung: Man lege durch den Mittelpunkt O_1 ein Koordinatensystem, dessen Axen den ursprünglichen parallel sind. Zwischen den Koordinaten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ jedes Punktes der Peripherie besteht die Gleichung $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - r^2 = 0$. Sind nun im neuen System $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1$ die Koordinaten des Berührungspunktes (x_1, y_1), $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes (x, y) der Tangente, so ist

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1 - r^2 = 0,$$

wo $\mathfrak{x}_1 = x_1 - a$, $\mathfrak{y}_1 = y_1 - b$, $\mathfrak{x} = x - a$, $\mathfrak{y} = y - b$.

Demnach besteht zwischen den Koordinaten (x, y) des beliebigen Tangentenpunktes die Gleichung

$$(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) - r^2 = 0.$$

31. Die Gleichung der Geraden zu bestimmen, welche den Kreis $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ im Punkte (x_1, y_1) berührt.

Aufl. Nach § 26 lässt sich die gegebene Kreisgleichung schreiben

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 \quad c^2 - 4\,ad}{(2\,a)^2} = 0;$$

nach § 30 ist die gesuchte Gleichung

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x_1 + \frac{b}{2\,a}\right) + \left(y + \frac{c}{2a}\right)\left(y_1 + \frac{c}{2a}\right) - \frac{b^2 + c^2 - 4\,ad}{(2\,a)^2} = 0.$$

Durch Ausführung der Multiplikation und Wegschaffung des Nenners ergiebt sich:

$$a\,x\,x_1 + a\,y\,y_1 + b\,\frac{x + x_1}{2} + c\,\frac{y + y_1}{2} + d = 0.$$

Aufgaben.

1. Die Gleichung der Tangente im Punkte (2, 3) des Kreises $(x-3)^2 + (y-1)^2 - 5 = 0$ zu suchen.
2. Gleichung der Tangente im Punkte (2, 3) des Kreises $2\,x^2 + 2\,y^2 - 12x - 4y + 10 = 0$?
3. Welche Gleichung besteht zwischen den Grössen a, b, r, wenn die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ berührt?

   Aufl. Die Entfernung der Geraden vom Mittelpunkte muss r sein; man erhält $r^2 = \frac{a^2\,b^2}{a^2 + b^2}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Welche Bedingung müssen m, b, r erfüllen, wenn die Gerade $y = mx + b$ den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ berühren soll?
   Aufl. $b^2 = r^2 (1 + m^2)$.
5. Wann berührt $Ax + By + C = 0$ den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$?
   Aufl. Wenn $C^2 = r^2 (A^2 + B^2)$.
6. Welche Gleichung muss bestehen, wenn $Ax + By + C = 0$ Tangente des Kreises $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ sein soll?
   Aufl. $r^2 (A^2 + B^2) = (Aa + Bb + C)^2$.
7. Die Gleichungen der Tangenten zu suchen, welche vom Nullpunkte an den Kreis $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ gezogen sind; diese Tangenten ohne Benutzung des Kreises zu konstruieren.
   Aufl. Die Tangente $y = mx$ und der Kreis haben nur einen gemeinsamen Punkt. Diese Erwägung liefert eine quadratische Gleichung für m, $m = 2 \pm \sqrt{6}$.
8. Die Gleichungen der Tangenten zu suchen, welche vom Anfangspunkte an den Kreis $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ gezogen sind.
   Aufl. $m = \frac{ab \pm r\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}{a^2 - r^2}$.
9. Die Gleichung der Tangente des Kreises $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ zu suchen, die durch den Punkt (x_1, y_1) geht.
   Aufl. Man hat drei Gleichungen mit zwei Unbekannten m und b:
   $$y = mx + b \ (1), \quad y_1 = mx_1 + b \ (2), \quad b^2 = r^2 (1 + m^2) \ (3).$$
   b wird aus (1) und (2) beseitigt, m aus (2) und (3) durch Elimination von b gewonnen. Die gesuchte Gleichung ist
   $$y - y_1 = \frac{-x_1 y_1 \pm r\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{r^2 - x_1^2}(x - x_1).$$
   Vom Punkte (x_1, y_1) lassen sich zwei Tangenten, eine oder keine Tangente an den Kreis legen, je nachdem $x_1^2 + y_1^2 - r^2 \gtreqless 0$. Geometr. Bedeutung! (§ 25 Anm.) Welche Gleichung erhält man, wenn (x_1, y_1) ein Punkt des Kreises?

32. Das Quadrat der Tangente, welche von einem Punkte P an einen Kreis gelegt wird, ist gleich der linken Seite der Kreisgleichung in der Normalform, wenn für die Veränderlichen x, y die Koordinaten ξ, η des Punktes P gesetzt werden. Fig. 13a.

Beweis. $\overline{PA}^2 = \overline{PM}^2 - r^2 = (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 - r^2$.

Aufgabe. Den Ort der Punkte zu suchen, von denen aus die an den Kreis $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ gelegten Tangenten die konstante Länge l haben.

Auflösung. $(x - a)^2 + (y - b)^2 - (r^2 + l^2) = 0$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Konstruiere diesen Kreis, ziehe von einem beliebigen Peripheriepunkte die Tangente an den gegebenen Kreis und zeige durch Messung, dass die Länge dieser Tangente gleich l ist.

33. Legt man von einem Punkte an einen Kreis die Tangente und eine beliebige Sekante, so ist das Produkt aus den Abschnitten der Sekante gleich dem Quadrat der Tangente. Fig. 13b.

Behauptung. $PB \,.\, PC = \overline{PA}^2$.

Beweis. $PB \,.\, PC = (PD - T)\,(PD + T) = \overline{PD}^2 - T^2 =$

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 - r_1^2 - (r^2 - r_1^2) =$$

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 - r^2 = \overline{PA}^2.$$

34. Das Produkt der Abschnitte jeder Sehne, welche durch einen Punkt P innerhalb eines Kreises gelegt wird, ist konstant, nämlich gleich der negativen linken Seite der Kreisgleichung in der Normalform, wenn für die Veränderlichen x, y die Koordinaten ξ, η des Punktes P gesetzt werden. Fig. 13c.

Behauptung: $PB \,.\, PC = -\left[(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 - r^2\right]$.

Beweis. $PB \,.\, PC = (T - PD)\,.\,(T + PD) = -(\overline{PD}^2 - T^2) =$

$$-\left[(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 - r_1^2 - (r^2 - r_1^2)\right] =$$

$$-\left[(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 - r^2\right].$$

Zusatz. Die Rechtecke aus den Abschnitten aller Sehnen, welche sich in einem Punkte schneiden, sind einander gleich und gleich dem Rechteck aus den Abschnitten des durch denselben Punkt gehenden Durchmessers.

35. Potenz eines Punktes inbezug auf einen Kreis.

Das konstante Produkt aus den Abschnitten der Sehnen oder Sekanten, welche von einem Punkte an einen Kreis gezogen werden, heisst die Potenz des Punktes inbezug auf den Kreis.

Die Ergebnisse der letzten Paragraphen lauten nun:

Es ist $$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 \gtreqless 0,$$

je nachdem der Punkt (x, y) ausserhalb des Kreises vom Mittelpunkte (a, b) und dem Radius r, auf der Peripherie oder innerhalb derselben liegt.

Der absolute Wert von $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$ ist gleich der Potenz des Punktes (x, y) inbezug auf diesen Kreis.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für Punkte ausserhalb der Peripherie oder auf derselben ist die Potenz gleich dem Quadrat der Tangente.

Aufgaben.

1. Eine Sehne AB des Kreises $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$ dreht sich um A. Welche Kurve beschreibt der Punkt P, der die Sehne innerlich so teilt, dass $PA.PB = p^2$ ist?

   Aufl. Sind (x, y) die Koordinaten des Punktes P, so ist $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = -p^2$.

2. Welches ist der Ort des Punktes, der dieselbe Sehne äusserlich so teilt, dass $PA.PB = p^2$?

   Aufl. $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = p^2$.

3. Eine Sehne AB von der Länge l bewegt sich im Kreise $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$. Welche Kurve beschreibt Punkt P dieser Sehne, wenn $PA:PB = m:n$?

   Aufl. $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = -PA.PB$. Aus $PA + PB = l$ und $PA:PB = m:n$ erhält man $PA.PB = \frac{m.n\,l^2}{(m+n)^2}$.

4. Welches ist der Ort des Punktes P, der dieselbe Sehne äusserlich im Verhältnis $m:n$ teilt?

36. Den Ort des Punktes zu suchen, dessen Potenzen inbezug auf zwei Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ das konstante Verhältnis m haben.

$k_0 \equiv (x-a_0)^2 + (y-b_0)^2 - r_0^2$; $k_1 \equiv (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2$.

Aufl. Ist (ξ, η) ein beliebiger Punkt des gesuchten Ortes, so ist $\frac{k_0(\xi,\eta)}{k_1(\xi,\eta)} = m$, oder $k_0(\xi,\eta) - m\,k_1(\xi,\eta) = 0$. Da (ξ, η) ein beliebiger Punkt des gesuchten Ortes ist, so gilt die Gleichung für die Koordinaten (x, y) jedes Punktes desselben; seine Gleichung ist also $k_0 - mk_1 = 0$.

Dieselbe stellt nach § 26 einen Kreis dar.

1. Ist (x_1, y_1) ein gemeinsamer Punkt von $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$, so liegt er auch auf dem Kreise $k_0 - mk_1 = 0$; denn da $k_0(x_1, y_1) = 0$ und $k_1(x_1, y_1) = 0$, so ist auch $k_0(x_1, y_1) - m\,k_1(x_1, y_1) \equiv 0$.
2. Eine gemeinsame Sehne oder Tangente der Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ ist allen Kreisen $k_0 - m_0 k_1 = 0$, $k_0 - m_1 k_1 = 0$ u. s. w. gemeinsam.
3. Für alle Punkte des Kreises $k_0 - mk_1 = 0$, welche ausserhalb beider Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ liegen, haben die an die letzteren gezogenen Tangenten dasselbe Verhältnis.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

37. Chordale, Potenzlinie, Linie gleicher Tangenten zweier Kreise.

Für $m = 1$ wird die Gleichung des im § 36 gesuchten Ortes $k_0 - k_1 = 0$. Nach § 11 ist dies die Gleichung einer Geraden; nach § 36 geht diese Gerade durch etwaige gemeinsame Punkte der Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$. Schneiden sich also $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$, so ist $k_0 - k_1 = 0$ die gemeinschaftliche Sehne oder Chordale.

Ist (ξ, η) irgend ein Punkt der Geraden $k_0 - k_1 = 0$, so ist $k_0(\xi, \eta) \equiv k_1(\xi, \eta)$, d. h. die Potenzen des Punktes (ξ, η) inbezug auf die Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ sind einander gleich; deshalb nennt man $k_0 - k_1 = 0$ die Linie gleicher Potenzen oder Potenzlinie der Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$.

Für irgend einen Punkt (ξ, η) der Geraden $k_0 - k_1 = 0$, welcher ausserhalb der Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ liegt, stellen $k_0(\xi, \eta)$ und $k_1(\xi, \eta)$ die Quadrate der Tangenten dar, welche von diesem Punkte an die Kreise gelegt werden. Da nun $k_0(\xi, \eta) - k_1(\xi, \eta) \equiv 0$, so sind die Quadrate dieser Tangenten, also auch die Tangenten selbst gleich; deshalb heisst $k_0 - k_1 = 0$ Linie gleicher Tangenten der Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$.

Festsetzung: Die Gerade $k_0 - k_1 = 0$ soll Chordale genannt werden, auch wenn die Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ sich nicht schneiden.

Nach dieser Festsetzung haben die Bezeichnungen „Chordale", „Potenzlinie", „Linie gleicher Tangenten" zweier Kreise dieselbe Bedeutung.

38. Den Winkel zu bestimmen, den die Chordale zweier Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ mit der Centrale bildet.

Aufl. Der Richtungskoeffizient der Chordale ergiebt sich als $-\frac{a_0 - a_1}{b_0 - b_1}$, derjenige der Centrale als $\frac{b_0 - b_1}{a_0 - a_1}$; die Chordale zweier Kreise steht demnach senkrecht zu ihrer Centrale.

39. Die Chordalen dreier Kreise $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ schneiden sich in einem Punkte.

Beweis. $(k_0 - k_1) + (k_1 - k_2) + (k_2 - k_0) \equiv 0$,
folglich gehen nach § 24 die drei Chordalen $k_0 - k_1 = 0$, $k_1 - k_2 = 0$, $k_2 - k_0 = 0$ durch einen Punkt. (Chordalpunkt).

Aufgaben und Lehrsätze.

1. Die Chordalen dreier sich berührenden Kreise zu zeichnen.
2. Zeichne die Chordalen dreier Kreise, von denen jeder den andern schneidet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Die Chordale zweier Kreise zu zeichnen, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Aufl. Die beiden Kreise seien $k_0 = 0$, $k_1 = 0$; man zeichne zwei Hilfskreise $k_2 = 0$ und $k_3 = 0$, von denen jeder die beiden ersteren schneidet. Die Chordale $k_0 - k_1 = 0$ geht durch den Chordalpunkt A der Kreise $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ und den Chordalpunkt B der Kreise $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_3 = 0$.

Der eine Kreis kann ganz ausserhalb oder ganz innerhalb des anderen liegen.

4. Durch Konstruktion zu bestätigen, dass die Chordalen dreier Kreise, die keinen Punkt mit einander gemein haben, sich in einem Punkte schneiden.

5. Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Beweis. Die Mittelsenkrechten sind die Chordalen dreier gleichen, um die Dreieckseckpunkte geschlagenen Kreise.

6. Die Chordalen eines Kreises mit Kreisen von gemeinsamer Sehne gehen durch einen Punkt der gemeinschaftlichen Sehne.

Beweis: AB sei gemeinsame Sehne der Kreise $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$; $k = 0$ irgend ein Kreis, der nicht durch A und B geht. Die Chordalen $k_0 - k = 0$, $k_1 - k = 0$ und AB gehen durch den Schnittpunkt O von AB mit $k_0 - k = 0$; die Chordalen $k_0 - k = 0$, $k_2 - k = 0$ und AB gehen ebenfalls durch den Schnittpunkt O von $k_0 - k = 0$ mit AB; daher gehen $k_0 - k = 0$, $k_1 - k = 0$, $k_2 - k = 0$ durch denselben Punkt O von AB. (Konstruktion).

7. An Kreise von gemeinschaftlicher Sehne sind von einem Punkte der Chordale die Tangenten gezogen; welche Kurve bilden die Berührungspunkte?

Aufl. Einen Kreis, der die Kreise von gemeinsamer Sehne rechtwinklig schneidet.

8. Die Mittelpunkte der gemeinsamen inneren und äusseren Tangenten zweier Kreise liegen auf der Chordale.

9. Mit Hilfe des vorstehenden Satzes die Chordale für zwei Kreise zu zeichnen, von denen einer ausserhalb des anderen liegt.

10. Die Gleichungen der Chordalen der Kreise $x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$, $(x-2)^2 + y^2 - 4 = 0$ und $(x-1)^2 + (y-2)^2 - 5 = 0$ aufzustellen; nach § 24 zu zeigen, dass die Chordalen durch einen Punkt gehen; die Koordinaten des Chordalpunktes zu suchen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

11. Die vom Chordalpunkt dreier Kreise an dieselben gelegten Tangenten sind einander gleich.
12. Den Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet.

40. Die Gleichung der Geraden zu suchen, welche mit dem Kreise $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ die Berührungspunkte der Tangenten gemein hat, die vom Punkte (ξ, η) an den Kreis gezogen sind.

Aufl. Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Berührungspunkte, so sind die Gleichungen der Tangenten:

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0 \qquad (1)$$
$$xx_2 + yy_2 - r^2 = 0 \qquad (2)$$

(ξ, η) liegt auf beiden Tangenten, folglich

$$\xi x_1 + \eta y_1 - r^2 \equiv 0 \qquad (3)$$
$$\xi x_2 + \eta y_2 - r^2 \equiv 0 \qquad (4)$$

Nun ist $\xi x + \eta y - r^2 = 0 \qquad (5)$

die Gleichung einer Geraden; nach (3) und (4) liegen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf dieser Geraden, d. h. (5) ist die Gleichung der Berührungssehne.

Diese Gerade heisst Polare des Punktes (ξ, η) inbezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; (ξ, η) ist Pol zu $\xi x + \eta y - r^2 = 0$.

Festsetzung. Unter der Polare des Punktes (ξ, η) inbezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ soll von jetzt ab stets die Gerade $\xi x + \eta y - r^2 = 0$ verstanden werden, auch wenn (ξ, η) auf der Peripherie oder innerhalb derselben liegt.

41. Die Verbindungslinie eines Punktes mit dem Mittelpunkte eines Kreises steht senkrecht zur Polare dieses Punktes inbezug auf den Kreis.

Beweis. Die Gleichung der Verbindungslinie ist

$$y = \frac{\eta}{\xi} x,$$

die Gleichung der Polare

$$y = -\frac{\xi}{\eta} x + \frac{r^2}{\eta};$$

das Produkt der Richtungskoeffizienten ist demnach gleich -1.

42. Die Entfernung p des Kreismittelpunktes von der Polare des Punktes (ξ, η) zu bestimmen und zu konstruieren.

Aufl. Man erhält $p = -\dfrac{\xi . 0 + \eta . 0 - r^2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \dfrac{r^2}{e}$,

wo e die Entfernung des Poles (ξ, η) vom Mittelpunkt bezeichnet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

p ist dritte Proportionale zu e und r; da die Polare senkrecht zur Centrale des Poles steht, so ist ihre Lage durch ihre Entfernung vom Mittelpunkte bestimmt.

Folgende Tafel giebt aus vorstehender Formel zu den Hauptlagen des Pols die Lagen der Polare:

1, $e = 0$, $p = \infty$; 2, $e < r$, $p = \frac{r}{e} . r > r$; 3, $e = r$, $p = r$;

4, $e > r$, $p = \frac{r}{e} . r < r$; 5, $e = \infty$, $p = 0$.

Aufgaben und Sätze.

1. Konstruiere die Polare zu einem Punkte innerhalb des Kreises, auf dem Kreise, ausserhalb des Kreises.

2. Polare zu (4, 5) inbezug auf $x^2 + y^2 - 9 = 0$?

3. Aus $e . p = r^2$ folgt

   1, $(e + r) : (e - r) = (r + p) : (r - p)$, wenn $e > r$;

   2, $(r + e) : (r - e) = (p + r) : (p - r)$, wenn $e < r$.

   Wortlaut!

4. Eine Sehne AB des Kreises $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ dreht sich um einen ihrer Punkte oder einen Punkt ihrer Verlängerung; welche Kurve beschreibt der dem Drehpunkt P zugeordnete, zu A, B, P harmonisch liegende Punkt O?

Aufl. Punkt P (ξ, η) liege auf der Sehne; x_1, x_2 seien die Abscissen der Sehnenendpunkte; für die Koordinaten (x, y) von O gelten die Gleichungen

$$y - \eta = m (x - \xi), \qquad (1)$$

$$\xi x - (x + \xi) \frac{x_1 + x_2}{2} + x_1 x_2 = 0. \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen der Geraden und des Kreises ergiebt sich

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m^2 \xi - m\eta}{1 + m^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{(m\xi - \eta)^2 - r^2}{1 + m^2}. \qquad (3)$$

Aus (3) und (2) folgt

$$\xi x + \eta^2 + m\eta (x - \xi) - r^2 = 0; \qquad (4)$$

aus (4) und (1)

$$\xi x + \eta y - r^2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Polare von P.

Liegt P auf der Verlängerung der Sehne, so ist die Rechnung genau dieselbe.

Folgerung. Jede Sehne wird durch einen auf ihr oder ihrer Verlängerung liegenden Punkt und den Schnittpunkt mit der zugehörigen Polare innerlich und äusserlich in gleichem Verhältnis geteilt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

43. Zu einer gegebenen Geraden den Pol inbezug auf einen gegebenen Kreis zu suchen.

Aufl. 1. Geometrische Örter für den Pol sind das vom Mittelpunkt M auf die Gerade gefällte Lot und der Kreis vom Radius e um M; e ist dritte Proportionale zu p und r.

Aufl. 2. Ist $Ax + By + C = 0$ die Gerade, $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ der Kreis, (ξ, η) der Pol, so ist nach § 17 $\xi x + \eta y - r^2 \equiv k(Ax + By + C)$; hieraus $\xi = -\frac{Ar^2}{C}$, $\eta = -\frac{Br^2}{C}$.

Aufgaben.

1. Konstruiere den Pol zu einer Geraden, welche zwei, einen, keinen Punkt mit dem gegebenen Kreise gemein hat.
2. Suche die Koordinaten des Poles zu $4x + 5y - 9 = 0$ inbezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

44. Die Polare eines Punktes P_1 einer Geraden AB geht durch den Pol P dieser Geraden.

Beweis. Der gegebene Kreis sei $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; P_1 habe die Koordinaten x_1, y_1, P die Koordinaten ξ, η.

P ist Pol zu AB, daher ist die Gleichung von AB

$$\xi x + \eta y - r^2 = 0; \qquad (1)$$

P_1 ist ein Punkt von AB, folglich

$$\xi x_1 + \eta y_1 - r^2 \equiv 0; \qquad (2)$$

die Polare von P_1 ist

$$x x_1 + y y_1 - r^2 = 0. \qquad (3)$$

Die Koordinaten (ξ, η) von P machen (3) zu der identischen Gleichung (2), d. h. die Polare des Punktes P_1 der Geraden AB geht durch den Pol P dieser Geraden.

(Bestätigung durch Konstruktion.)

Lehrsätze.

1. Die Polaren der Punkte einer Geraden inbezug auf einen Kreis bilden ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Pol der Geraden ist.
2. Der Schnittpunkt zweier Geraden ist Pol für die Verbindungslinie ihrer Pole.

   Beweis. P sei Pol zu L, P_1 zu L_1, A Schnittpunkt von L und L_1. Die Polare von A geht durch P, da A auf L; durch P_1, da A auf L_1. A ist demnach Pol zu PP_1.
3. Die Pole der Strahlen eines Büschels liegen auf der Polare des Mittelpunktes dieses Büschels.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Zieht man von einem Punkte P eine Sekante PAB, so liegt der Schnittpunkt P_1 der Tangenten in A und B auf der Polare von P.

45. Die Gleichung der Polare des Punktes (ξ, η) inbezug auf den Kreis $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ zu bestimmen.

Aufl. Die Methode des § 40 liefert

$$a\xi x + a\eta y + b\,\frac{\xi + x}{2} + c\,\frac{\eta + y}{2} + d = 0.$$

46. Die Polaren eines Punktes inbezug auf Kreise von gemeinschaftlicher Sehne gehen durch einen Punkt.

Beweis. Nimmt man die gemeinschaftliche Sehne zur y-Axe, ihren Mittelpunkt zum Anfangspunkt, so ist die Gleichung irgend eines dieser Kreise

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - d^2 = 0, \qquad (1)$$

wo d die halbe Sehne, a die Abscisse des Mittelpunktes ist.

Die Polare des Punktes (ξ, η) inbezug auf diesen Kreis ist nach § 45

$$\xi x + \eta y - a\,(\xi + x) - d^2 = 0. \qquad (2)$$

Durchläuft a alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so stellt Gleichung (1) alle Kreise von der gemeinschaftlichen Sehne 2 d, Gleichung (2) die Polaren des Punktes (ξ, η) inbezug auf alle diese Kreise dar. Der Gleichung (2) genügen aber die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden

$$\xi x + \eta y - d^2 = 0 \text{ und } \xi + x = 0$$

für jeden Wert von a; d. h. die Polaren des Punktes (ξ, η) inbezug auf alle Kreise von der gemeinsamen Sehne 2 d gehen durch diesen Schnittpunkt.

Bestätigung durch Konstruktion. $\xi x + \eta y - d^2 = 0$ ist die Polare des Punktes (ξ, η) inbezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - d^2 = 0$, $\xi + x = 0$ die Parallele zur Ordinatenaxe im Abstande $-\xi$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

43. Zu einer gegebenen Geraden den Pol inbezug auf einen gegebenen Kreis zu suchen.

Aufl. 1. Geometrische Örter für den Pol sind das vom Mittelpunkt M auf die Gerade gefällte Lot und der Kreis vom Radius e um M; e ist dritte Proportionale zu p und r.

Aufl. 2. Ist $Ax + By + C = 0$ die Gerade, $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ der Kreis, (ξ, η) der Pol, so ist nach § 17 $\xi x + \eta y - r^2 \equiv k(Ax + By + C)$; hieraus $\xi = -\frac{Ar^2}{C}$, $\eta = -\frac{Br^2}{C}$.

Aufgaben.

1. Konstruiere den Pol zu einer Geraden, welche zwei, einen, keinen Punkt mit dem gegebenen Kreise gemein hat.
2. Suche die Koordinaten des Poles zu $4x + 5y - 9 = 0$ inbezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

44. Die Polare eines Punktes P_1 einer Geraden AB geht durch den Pol P dieser Geraden.

Beweis. Der gegebene Kreis sei $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; P_1 habe die Koordinaten x_1, y_1, P die Koordinaten ξ, η.

P ist Pol zu AB, daher ist die Gleichung von AB

$$\xi x + \eta y - r^2 = 0; \qquad (1)$$

P_1 ist ein Punkt von AB, folglich

$$\xi x_1 + \eta y_1 - r^2 \equiv 0; \qquad (2)$$

die Polare von P_1 ist

$$x x_1 + y y_1 - r^2 = 0. \qquad (3)$$

Die Koordinaten (ξ, η) von P machen (3) zu der identischen Gleichung (2), d. h. die Polare des Punktes P_1 der Geraden AB geht durch den Pol P dieser Geraden.

(Bestätigung durch Konstruktion.)

Lehrsätze.

1. Die Polaren der Punkte einer Geraden inbezug auf einen Kreis bilden ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Pol der Geraden ist.
2. Der Schnittpunkt zweier Geraden ist Pol für die Verbindungslinie ihrer Pole.

   Beweis. P sei Pol zu L, P_1 zu L_1, A Schnittpunkt von L und L_1. Die Polare von A geht durch P, da A auf L; durch P_1, da A auf L_1. A ist demnach Pol zu PP_1.
3. Die Pole der Strahlen eines Büschels liegen auf der Polare des Mittelpunktes dieses Büschels.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Zieht man von einem Punkte P eine Sekante PAB, so liegt der Schnittpunkt P_1 der Tangenten in A und B auf der Polare von P.

45. Die Gleichung der Polare des Punktes (ξ, η) inbezug auf den Kreis $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ zu bestimmen.

Aufl. Die Methode des § 40 liefert

$$a\xi x + a\eta y + b\,\frac{\xi + x}{2} + c\,\frac{\eta + y}{2} + d = 0.$$

46. Die Polaren eines Punktes inbezug auf Kreise von gemeinschaftlicher Sehne gehen durch einen Punkt.

Beweis. Nimmt man die gemeinschaftliche Sehne zur y-Axe, ihren Mittelpunkt zum Anfangspunkt, so ist die Gleichung irgend eines dieser Kreise

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - d^2 = 0, \qquad (1)$$

wo d die halbe Sehne, a die Abscisse des Mittelpunktes ist.

Die Polare des Punktes (ξ, η) inbezug auf diesen Kreis ist nach § 45

$$\xi x + \eta y - a\,(\xi + x) - d^2 = 0. \qquad (2)$$

Durchläuft a alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so stellt Gleichung (1) alle Kreise von der gemeinschaftlichen Sehne 2 d, Gleichung (2) die Polaren des Punktes (ξ, η) inbezug auf alle diese Kreise dar. Der Gleichung (2) genügen aber die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden

$$\xi x + \eta y - d^2 = 0 \text{ und } \xi + x = 0$$

für jeden Wert von a; d. h. die Polaren des Punktes (ξ, η) inbezug auf alle Kreise von der gemeinsamen Sehne 2 d gehen durch diesen Schnittpunkt.

Bestätigung durch Konstruktion. $\xi x + \eta y - d^2 = 0$ ist die Polare des Punktes (ξ, η) inbezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - d^2 = 0$, $\xi + x = 0$ die Parallele zur Ordinatenaxe im Abstande $-\xi$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Abschnitt IV.

Parabel, Ellipse, Hyperbel.

47. Die Lage eines Punktes P der Ebene inbezug auf einen festen Punkt O und eine von diesem ausgehende feste Gerade OX zu bestimmen.

Aufl. Die Lage des Punktes P ist bestimmt, wenn seine Entfernung r von O und der Winkel φ gegeben ist, welchen OP mit OX bildet. r und φ heissen die Polarkoordinaten des Punktes P inbezug auf den Pol O und die Axe OX. r wird Radius vector, φ die Abweichung des Punktes P (von OX) genannt.

48. Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, dessen Abstand von einem festen Punkte F zum Abstande von einer festen Geraden L das konstante Verhältnis ε hat. Fig. 14.

Aufl. Der feste Pnnkt F sei der Pol, die Verlängerung des Lotes AF zu L die Axe eines Polarkoordinatensystems. Der beliebige Punkt P des gesuchten Ortes habe die Koordinaten r, φ; AF = q. Dann ist

$$PF : PQ = \varepsilon : 1,$$

oder

$$r : (q + r\cos\varphi) = \varepsilon : 1,$$

$$r = \frac{\varepsilon \cdot q}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \qquad (1)$$

Folgerungen aus Gl. (1).

1. Zu jedem Werte α von φ gehört nur ein Wert r_α von r.
2. $r_{2\pi-\alpha} = r_\alpha$, d. h. die Kurve ist symmetrisch zur Axe des Systems.
3. Die zur Axe im Punkte F senkrechte Sehne ist $r_{\frac{\pi}{2}} + r_{\frac{3\pi}{2}} = 2\,\varepsilon \cdot q$; sie heisse Parameter der Kurve und werde mit 2p bezeichnet. Die Gleichung der Kurve ist dann

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \qquad (2)$$

($p = \varepsilon \cdot q$).

F heisst Brennpunkt, L Direktrix oder Leitlinie; die Verbindung eines Punktes der Kurve mit dem Brennpunkte wird Brennstrahl genannt.

49. Scheitelgleichung der Kurve.

Die Gleichung aufzustellen, welche zwischen den Koordinaten (x, y) eines Punktes der Kurve $r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$ besteht, wenn als

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

x-Axe die Axe der Polarkoordinaten, als Anfangspunkt der Schnittpunkt O der Kurve mit der Axe gewählt ist. Fig. 15.

Aufl. Die Gleichung der Kurve ergiebt $r = p + \varepsilon(x - OF)$, wo $OF = r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon}$; demnach ist $r = \varepsilon x + \frac{p}{1+\varepsilon}$, folglich

$$r^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\,\frac{\varepsilon \cdot x \cdot p}{1+\varepsilon} + \left(\frac{p}{1+\varepsilon}\right)^2; \qquad (1)$$

andererseits erhält man aus Δ PFB

$$r^2 = y^2 + x^2 - 2\,\frac{px}{1+\varepsilon} + \left(\frac{p}{1+\varepsilon}\right)^2. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$y^2 = 2px + x^2(\varepsilon^2 - 1). \qquad (3)$$

Da im Anfangspunkte O des Systems zwei symmetrische Punkte der Kurve zusammenfallen, so heisst O Scheitelpunkt, Gleichung (3) Scheitelgleichung der Kurve.

Bemerkungen.

1. Für $\varepsilon = 1$ ist $y^2 = 2px$; das Quadrat über der Ordinate eines Punktes der Kurve ist gleich dem Rechteck aus dem Parameter und der Abscisse des Punktes. Die Kurve heisst in diesem Falle Parabel (παραβάλλειν = gleichkommen).
2. Für $\varepsilon \lesseqgtr$ ist $y^2 \lesseqgtr 2px$; je nachdem das Ordinatenquadrat eines Kurvenpunktes kleiner oder grösser ist als das Rechteck aus dem Parameter und der Abscisse des Punktes, heisst die Kurve Ellipse (ἐλλείπειν = ermangeln) oder Hyperbel (ὑπερβάλλειν = übertreffen).
3. Gleichung (3) ist entstanden aus $r = p + \varepsilon r \cos\varphi$ durch Erhebung zur zweiten Potenz; sie würde sich auch ergeben haben aus $-r = p + \varepsilon . r \cos\varphi$, d. h. aus $r = \frac{-p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$. Stellt demnach $r = \frac{-p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ eine Kurve dar, so gilt für die Koordinaten (x, y) jedes ihrer Punkte die Gleichung (3).

   Für $\varepsilon \leqq 1$ liefert $r = \frac{-p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ einen negativen Wert von r, da $p = \varepsilon . q$ positiv ist; da aber die Masszahl r des Radius vector eine absolute Zahl sein muss, so stellt die Gleichung in diesem Falle keine Kurve dar.

   Ist $\varepsilon > 1$, so folgt $r > 0$, wenn $1 + \varepsilon\cos\varphi < 0$, d. h. wenn $\cos\varphi < -\frac{1}{\varepsilon}$; in diesem Falle hat also die Gleichung $r = \frac{-p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ ein graphisches Bild; dasselbe heisst linker Hyperbelzweig. Für die Koordinaten (x, y) jedes Punktes dieses linken Hyperbelzweiges gilt somit die Gleichung $y^2 = 2px + x^2(\varepsilon^2 - 1)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Die Gleichung der Leitlinie der Kurve $r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}$ ist

$$x = -AO = -(q - OF) = OF - q = \frac{p}{1+\varepsilon} - \frac{p}{\varepsilon} = -\frac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon)};$$

die Abscisse des Brennpunktes ist $OF = \frac{p}{1+\varepsilon}$.

1. Die Parabel.

50. Den Lauf der Parabel vermittelst der Scheitelgleichung $y^2 = 2px$ zu untersuchen.

Aufl. Für $x = 0$ ist $y = 0$; der Punkt $(0, 0)$ ist Scheitelpunkt der Parabel. Für $x < 0$ wird y imaginär; links von der Ordinatenaxe liegen keine Parabelpunkte. Für jedes positive x erhält man zwei gleiche Ordinaten mit entgegengesetzten Vorzeichen; die zur Ordinatenaxe parallelen Sehnen werden also durch die Abscissenaxe halbiert, die Parabel liegt symmetrisch zur x-Axe. Diese heisst deshalb Axe der Parabel.

Nach § 48 ist $AF = q = \frac{p}{\varepsilon} = p$; $OF = \frac{p}{1 - \cos\pi} = \frac{p}{2}$. O ist demnach Mittelpunkt von AF.

Jeder Brennstrahl hat die Länge $x + \frac{p}{2}$.

Beweis: $r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$; $r = p + r\cos\varphi = p + x - OF = x + \frac{p}{2}$.

Zusatz. Es ist $y^2 - 2px \gtreqless 0$, je nachdem Punkt (x, y) ausserhalb, auf, innerhalb der Parabel liegt. Beweis!

51. Konstruktion der Parabel.

1. Nach § 48 und § 49 Bemerk. 1 ist die Parabel der Ort des Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte (Brennpunkt) und einer festen Geraden (Leitlinie) einander gleich sind. Man lege eine Folge solcher Punkte fest und verbinde dieselben.
2. Trägt man auf der Abscissenaxe vom Anfangspunkte nach links den Parameter $2p$, nach rechts die Abscisse des gesuchten Parabelpunktes ab und beschreibt über $2p + x$ den Halbkreis, so schneidet dieser auf der Ordinatenaxe die zu dem gewählten x gehörige Ordinate y ab.

52. Die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Geraden $y = mx + q$ und der Parabel $y^2 = 2px$ zu suchen.

Auflösung:

1) $m \lesseqgtr 0$. Für die Koordinaten (x_1, y_1) eines gemeinsamen Punktes gelten die Gleichungen $y_1 = mx_1 + q$ und $y_1^2 = 2px_1$ gleichzeitig.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man erhält

$$x_1 = \frac{p - mq \pm \sqrt{p(p - 2mq)}}{m^2}; \quad y_1 = \frac{p \pm \sqrt{p(p - 2mq)}}{m}.$$

Es giebt demnach zwei gemeinsame Punkte, einen oder keinen gemeinsamen Punkt, je nachdem $\frac{p}{2} \gtreqless mq$.

Geometrische Bedeutung. Fig. 16.

Errichtet man auf der Geraden $y = mx + q$ im Schnittpunkt B mit der y-Axe das Lot, welches die x-Axe in C schneide, so ist $OC = OB \,.\, \operatorname{tg}\varphi = m \,.\, q$; $OF = \frac{p}{2}$.

Die Parabel und die Gerade haben somit

zwei gemeinsame Punkte, wenn $OF > OC$,
einen gemeinsamen Punkt, wenn $OF = OC$,
keinen gemeinsamen Punkt, wenn $OF < OC$.

2) $m = 0$. Die Gerade $y = q$ hat mit der Parabel $y^2 = 2px$ nur einen Punkt gemein; die Koordinaten desselben sind $x_1 = \frac{q^2}{2p}$, $y_1 = q$.

Folgerung. Jede zur Parabelaxe parallele Gerade schneidet die Parabel nur in einem Punkte; sie wird Durchmesser der Parabel genannt.

Zusatz. Das vom Brennpunkte auf eine Tangente gefällte Lot ist gleich seiner Verlängerung bis zur Leitlinie. Fig. 16.

Beweis. Nach § 50 ist $AF = p$, $OF = \frac{p}{2}$.

Aufgaben.

1. Welches ist der Ort der Mittelpunkte von Sehnen, die durch den Scheitelpunkt der Parabel $y^2 = 2px$ gehen? $\left.\begin{matrix} y = mx \\ y^2 = 2px \end{matrix}\right\} y_1 = \frac{2p}{m}$ $\eta = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{m}$ $\xi = \frac{p}{m^2}$ $\left.\begin{matrix} m = \frac{p}{\eta} \\ \xi = \frac{p^2}{\eta^2} \end{matrix}\right\}$ $\eta^2 = p\xi$

   Aufl. $y^2 = px$.

2. Eine sich drehende Gerade geht durch den festen Punkt (a, b); welche Kurve beschreibt der Mittelpunkt O der Sehne AB, die durch die Parabel $y^2 = 2px$ auf ihr abgeschnitten wird?

   Aufl. Sind x_1, x_2 die Abscissen der Sehnenendpunkte, so genügen die Koordinaten (x, y) von O den Gleichungen

$$y - b = m(x - a), \quad (1) \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (2)$$

Aus (1) und der Gleichung der Parabel erhält man

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m^2 a - mb + p}{m^2}. \quad (3)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus (1) und (3) folgt $m = \frac{p}{y}$, und daher aus (1)

$$y^2 - by = p(x - a) \text{ oder } \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = px - pa + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

$y = \mathfrak{y} + \frac{b}{2}$, $x = \mathfrak{x} + c$ liefert $\mathfrak{y}^2 = p\mathfrak{x} + pc - pa + \left(\frac{b}{2}\right)^2$; für $c = \frac{pa - \left(\frac{b}{2}\right)^2}{p}$ wird diese Gleichung $\mathfrak{y}^2 = p\mathfrak{x}$. Der Sehnenmittelpunkt beschreibt eine Parabel. Koordinaten des Scheitelpunktes? Lage der Axe? Grösse des Parameters?

3. Welche Kurve bilden die Mittelpunkte paralleler Parabelsehnen?

$y = mx + q \mid x = \frac{y-q}{m}$
$y^2 = 2px \mid y^2 = 2\frac{py-pq}{m}$
$y^2 - \frac{2p}{m}y = -\frac{2pq}{m}$
$y = \frac{p}{m}$
$y^2 = m^2x^2 + 2mqx + q^2$
$m^2x^2 + 2x(mq - p) = q^2$
$\xi = \frac{p-mq}{m^2}$
$q = y - m\xi$
$\xi m^2 = p - mq = m\xi$
$\eta = \frac{p}{m}$.

Aufl. Für den Mittelpunkt (x, y) einer beliebigen der parallelen Sehnen gelten die Gleichungen

$$y = mx + q, \quad (1) \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (2)$$

m ist konstant.

Aus (1) und $y^2 = 2px$ erhält man $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p - mq}{m^2}$; (3)

schliesslich aus (1) und (3) $y = \frac{p}{m}$.

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen bilden einen Durchmesser.

53. Die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) der Parabel $y^2 = 2px$ zu finden.

Aufl. 1. Nach § 52 wird die Gerade $y = mx + q$ Tangente, wenn $p = 2mq$; die Koordinaten des Berührungspunktes sind

$$x_1 = \frac{p - mq}{m^2} = \frac{q}{m}; \; y_1 = \frac{p}{m}.$$

Hieraus folgt $m = \frac{p}{y_1}$ $q = \frac{px_1}{y_1}$.

Die Gleichung $y = mx + q$ der Tangente in (x_1, y_1) wird

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Aufl. 2. Die Gleichung der Sekante, welche durch die Parabelpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht, ist

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \qquad (1)$$

wo $\quad y_1^2 = 2px_1, \qquad (2)$

und $\quad y_2^2 = 2px_2. \qquad (3)$

Aus (2) und (3) folgt

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}. \qquad (4)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus (4) und (1) ergiebt sich die Gleichung der Sekante. Diese wird Tangente in (x_1, y_1), wenn (x_2, y_2) mit (x_1, y_1) zusammenfällt; man erhält

$$y y_1 = p(x + x_1).$$

Zusätze.

1. Die Tangente im Endpunkte eines Durchmessers ist den Sehnen parallel, die von diesem halbiert werden.

   Beweis. Der Durchmesser, welcher die Sehnen vom Richtungskoeffizienten m halbiert, ist $y = \frac{p}{m}$. Die Gleichung der Tangente im Endpunkte (x_1, y_1) dieses Durchmessers ist $y \cdot \frac{p}{m} = p(x + x_1)$ oder $y = mx + mx_1$; der Richtungskoeffizient der Tangente ist also gleich dem Richtungskoeffizienten der parallelen Sehnen.
2. Die Ordinatenaxe ist Tangente im Scheitelpunkte.

54. Die Länge der Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale im Parabelpunkte (x_1, y_1) zu berechnen.

Erklärung. Die Tangente T ist gerechnet vom Berührungspunkte B bis zum Schnittpunkt A mit der Axe der Parabel; die Normale N ist das Lot, welches im Berührungspunkte zur Tangente errichtet wird, gerechnet bis zum Schnittpunkt C mit der Axe.

Die Subtangente ist die Projektion AD der Tangente, die Subnormale die Projektion CD der Normale auf die Parabelaxe.

Die Abscisse des Punktes A ergiebt sich als $-x_1$ aus der Gleichung der Tangente.

Die Gleichung der Normale ist $y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$, daher die Abscisse von C gleich $p + x_1$.

Man findet

$$T = 2\sqrt{x_1\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)}; \text{ Subtg.} = 2x_1.$$

$$N = \sqrt{2p\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)}; \text{ Subn.} = p.$$

Geometrische Deutung dieser Ergebnisse!

55. In einem gegebenen Parabelpunkte B (x_1, y_1) die Tangente anzulegen, wenn Parabel, Brennpunkt und Axe der Parabel gegeben sind.

Aufl. 1. Schnittpunkt A der Tangente mit der Axe hat die Abscisse $-x_1$.

Aufl. 2. Schnittp. C der Normale mit der Axe ist bestimmt durch die Subnormale p; die Tangente ist senkrecht zur Normale in B.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufl. 3. Der Schnittpunkt E der Tangente mit der Ordinatenaxe liegt auf dem Halbkreise über dem Brennstrahl BF. (§. 52.)

56. An eine gegebene Parabel von einem Punkte P (x_1, y_1) die Tangente zu legen, wenn Brennpunkt und Axe gegeben sind.

1. Gleichung der Tangente. Die Gerade $y - y_1 = m(x - x_1)$ wird Tangente an die Parabel $y^2 = 2px$, wenn m so bestimmt wird, dass Gerade und Parabel nur einen Punkt gemein haben. Man findet

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}}{2x_1}.$$

Folgerung (§ 50 Zusatz): Von einem Punkte P aus erhält man keine, eine oder zwei Tangenten, je nachdem P innerhalb, auf, ausserhalb der Parabel liegt.

Wie lautet die Gleichung der Geraden $y - y_1 = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}}{2x_1}(x - x_1)$, wenn (x_1, y_1) ein Parabelpunkt?

2. Konstruktion. B sei Berührungspunkt; der Schnittpunkt E der Tangente mit der Ordinatenaxe liegt auf dem Kreise vom Durchmesser PF (§ 52).

Folgerung. Der Kreis über dem Durchmesser PF hat keinen, einen, zwei Punkte mit der Ordinatenaxe gemeinsam, je nachdem P innerhalb, auf, ausserhalb der Parabel liegt. Alle Kreise über Brennstrahlen als Durchmesser berühren also die Scheiteltangente der Parabel.

57. Jede Parabeltangente AB — A Schnittpunkt mit der Axe — bildet mit der Axe und dem Brennstrahl des Berührungspunktes B (x_1, y_1) gleiche Winkel.

Beweis.

$$BF = x_1 + \frac{p}{2},$$

$$AF = x_1 + \frac{p}{2},$$

$$BF = AF;$$

daher $\sphericalangle BAF = \sphericalangle ABF$.

Konstruktion der Tangente im Punkte B einer gegebenen Parabel, wenn Brennpunkt und Axe gegeben: Der Schnittpunkt A der Tangente AB mit der Axe liegt auf dem Kreise vom Radius BF um F.

Zusätze.

1. Die Normale eines Parabelpunktes halbiert den von dem zugehörigen Brennstrahl und Durchmesser gebildeten Winkel.
2. Tangente und Normale, Brennstrahl und Durchmesser eines Parabelpunktes sind zugeordnete Strahlen eines harmonischen Büschels.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Jeder Licht- oder Wärmestrahl, welcher parallel der Axe auf das Innere der Parabel fällt, geht zurückgeworfen durch den Brennpunkt F; alle Strahlen, welche vom Brennpunkte auf die Parabel fallen, werden parallel der Axe zurückgeworfen. — Daher die Bezeichnungen „Brennpunkt", „Brennstrahl".

58. Die Polare des Punktes (ξ, η) inbezug auf die Parabel $y^2 = 2px$ zu finden. (§ 40.)

Aufl. $y\eta = p(x + \xi)$.

Erklärung. Unter der Polare eines Punktes (ξ, η) innerhalb oder auf der Parabel versteht man die Gerade $y\eta = p(x + \xi)$.

Zusätze.

1. Die Polare des Brennpunktes ist die Leitlinie.
2. Die Polare eines Punktes, der auf einer Geraden liegt, geht durch den Pol dieser Geraden.
3. Die Polaren der Punkte einer Geraden inbezug auf eine Parabel bilden ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Pol der Geraden ist.
4. Die Polaren von Punkten der Leitlinie schneiden sich im Brennpunkte.
5. Der Durchschnittspunkt zweier Geraden ist Pol für die Verbindungslinie ihrer Pole.
6. Zieht man von einem Punkte P eine Sekante PAB, so liegt der Schnittpunkt der Tangenten in A und B auf der Polare von P.

Aufgabe. Eine Sehne A B dreht sich um einen ihrer Punkte oder einen Punkt ihrer Verlängerung; welche Kurve beschreibt der dem Drehpunkt $P(\xi, \eta)$ zugeordnete, zu A, B, P harmonisch liegende Punkt O? (§ 42, 4.)

Aufl. $y\eta = p(x + \xi)$.

Folgerung. Jede Parabelsehne wird durch einen auf ihr oder ihrer Verlängerung liegenden Punkt und den Schnittpunkt mit der zugehörigen Polare innerlich und äusserlich in gleichem Verhältnisse geteilt.

59. Die Gleichung der Parabel aufzustellen für ein Koordinatensystem, dessen $\mathfrak{x}$-Axe ein Durchmesser, dessen $\mathfrak{y}$-Axe die Tangente im Endpunkte O_1 (x_1, y_1) des Durchmessers ist. Fig. 17.

Aufl. Die Koordinaten eines Parabelpunktes (x, y) seien im neuen System $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$; man erhält

$$x = x_1 + \mathfrak{x} + \mathfrak{y}\cos\varphi, \qquad y = y_1 + \mathfrak{y}\sin\varphi,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo $\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{y_1}$, nämlich gleich dem Richtungskoeffizienten der Tangente $y y_1 = p(x + x_1)$.

Demnach $x = x_1 + \mathfrak{x} + \frac{\mathfrak{y}\, y_1}{\sqrt{p^2 + y_1^2}}$, $y = y_1 + \frac{\mathfrak{y} \cdot p}{\sqrt{p^2 + y_1^2}}$. (1)

Nun ist $y^2 = 2px$. (2)

Setzt man die Werte (1) in (2) ein, so findet sich unter Berücksichtigung der Identität $y_1^2 = 2px_1$

$$\mathfrak{y}^2 = 2(p + 2x_1)\,\mathfrak{x}.$$

$p + 2x_1$ ist der doppelte Brennstrahl des neuen Anfangspunktes.

Je nachdem $O_1(x_1, y_1)$ ober- oder unterhalb der Parabelaxe, $P(x, y)$ oberhalb beider Abscissenaxen, zwischen ihnen oder unterhalb beider liegt, ist die Aufgabe für folgende Fälle durchzuführen:

I. $y_1 > 0$

1) $y > y_1$; 2) $0 < y < y_1$; 3) $y < 0$.

II. $y_1 < 0$

1) $y > 0$; 2) $y_1 < y < 0$; 3) $y < y_1$.

2. Die Ellipse.

60. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem so zu bestimmen, dass die Gleichung, welche zwischen den Koordinaten eines Ellipsenpunktes besteht, die erste Potenz der Abscisse nicht mehr enthält.

Aufl. Die Scheitelgleichung der Ellipse ist

$$y^2 = 2px + x^2(\varepsilon^2 - 1), \quad \varepsilon < 1. \tag{1}$$

Man wähle ein rechtwinkliges Koordinatensystem $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ so, dass $y = \mathfrak{y}$, $x = \mathfrak{x} + a$; a soll noch bestimmt werden. Als Gleichung zwischen den Koordinaten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eines Ellipsenpunktes ergiebt sich dann

$$\mathfrak{y}^2 = \mathfrak{x}^2(\varepsilon^2 - 1) + 2\mathfrak{x}\big(p + a(\varepsilon^2 - 1)\big) + 2pa + a^2(\varepsilon^2 - 1). \tag{2}$$

a werde so bestimmt, dass

$$p + a(\varepsilon^2 - 1) = 0, \text{ also } a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad p = a(1 - \varepsilon^2). \tag{3}$$

Vermittelst (3) geht (2) über in

$$\mathfrak{x}^2(1 - \varepsilon^2) + \mathfrak{y}^2 = a^2(1 - \varepsilon^2),$$

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = 1. \tag{4}$$

Setzt man $a^2(1 - \varepsilon^2) = a \cdot p = b^2$, so lautet (4)

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Die Abscisse des Brennpunktes (§ 49, 4) ist im Systeme (x, y):

$$x = r_\pi = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon); \tag{6}$$

im Systeme $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$:

$$\mathfrak{x} = x - a = -a\varepsilon. \tag{7}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichung der Leitlinie (§ 49, 4) lautet im Systeme (x, y):

$$x = -\frac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon)} = -\frac{a(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon(1+\varepsilon)} = -\frac{a(1-\varepsilon)}{\varepsilon}; \qquad (8)$$

im Systeme ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$):

$$\mathfrak{x} = x - a = -\frac{a}{\varepsilon}. \qquad (9)$$

61. Welche Gleichung besteht zwischen den Polarkoordinaten (r, φ) eines Ellipsenpunktes ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$), wenn der Anfangspunkt des Systems ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$) der Pol, die positive Abscissenaxe die Axe des Polarkoordinatensystems ist?

Auflösung. Für die Koordinaten ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$) eines Ellipsenpunktes ergiebt sich

$$\mathfrak{x} = r\cos\varphi,\ \mathfrak{y} = r\sin\varphi;\ \frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1.$$

Hieraus folgt

$$r^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi} = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi};$$

$$r = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}}.$$

Folgerungen:

1. $r_\alpha = r_{\alpha+\pi}$.

   Jede Ellipsensehne, die durch den Pol, also durch den Anfangspunkt des Systemes ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$) geht, wird in ihm halbiert; der Anfangspunkt heisst daher Mittelpunkt der Ellipse, jede durch ihn hindurchgehende Sehne Durchmesser.

2. Das Maximum von r ist $r_0 = r_\pi = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = a$,

   Das Minimum $r_{\frac{\pi}{2}} = r_{\frac{3\pi}{2}} = b$.

Der Durchmesser, welcher mit der Axe der Ellipse zusammenfällt, wird deshalb „grosse Axe“, der zu ihr senkrecht stehende „kleine Axe“ der Ellipse genannt.

Festsetzung. Die Koordinaten eines Punktes inbezug auf die Axen der Ellipse sollen von jetzt ab durch x und y (statt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$) bezeichnet werden.

62. Den Lauf der Ellipse zu untersuchen mit Hilfe der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Aufl. Die nach y aufgelöste Gleichung lautet $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Für $x \lessgtr \mp a$ erhält man je zwei imaginäre Werte von y, also keine Ellipsenpunkte;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für $-a < x < +a$ ergeben sich je zwei gleiche, reelle Werte von y mit entgegengesetzten Vorzeichen; die Ellipse ist symmetrisch zur x-Axe (§ 48, 2);

für $x = 0$ ist $y = \pm b$.

Die nach x aufgelöste Gleichung $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ liefert

für $y \begin{matrix} < -b \\ > +b \end{matrix}$ zwei imaginäre Werte von x, also keine Ellipsenpunkte;

für $-b < y < +b$ zwei gleiche, reelle Werte von x mit entgegengesetzten Vorzeichen; die Ellipse ist symmetrisch zur y-Axe;

für $y = 0 \quad x = \pm a$.

Da die Kurve symmetrisch zur y-Axe liegt, so hat sie einen zweiten Brennpunkt $(+a\varepsilon, 0)$ und eine zweite Leitlinie $\left(x = +\frac{a}{\varepsilon}\right)$.

Die Entfernung $e = a\varepsilon$ eines Brennpunktes vom Mittelpunkt der Ellipse heisst „lineare", die Zahl ε „numerische Excentricität" der Ellipse.

1. Für $\varepsilon = 0$ wird die Ellipse ein Kreis.
2. $b^2 = a^2 - a^2\varepsilon^2 = a^2 - e^2$; $e^2 = a^2 - b^2$.
3. $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 \gtreqless 0$, je nachdem (x, y) ausserhalb, auf, innerhalb der Ellipse. Beweis!

63. Die Summe der Brennstrahlen eines Punktes (x_1, y_1) der Ellipse ist konstant, nämlich gleich der grossen Axe. Fig. 18.

Beweis.

$r_1^2 = y_1^2 + (x_1 + a\varepsilon)^2 = (a^2 - x_1^2)(1 - \varepsilon^2) + (x_1 + a\varepsilon)^2 = (a + \varepsilon x_1)^2$;

$r_1 = a + \varepsilon x_1$.

$r_2^2 = y_1^2 + (x_1 - a\varepsilon)^2 = (a^2 - x_1^2)(1 - \varepsilon^2) + (x_1 - a\varepsilon)^2 = (a - \varepsilon x_1)^2$;

$r_2 = a - \varepsilon x_1$.

$r_1 + r_2 = 2a$.

Umkehrung. Ist die Summe der Entfernungen eines beweglichen Punktes von zwei festen Punkten konstant, so beschreibt der Punkt eine Ellipse. Beweis!

64. Ellipsenkonstruktionen.

Gegeben a, e.

1. Über 2e als Grundlinie konstruiere man Dreiecke, deren beide anderen Seiten die konstante Summe 2a haben; die Spitzen sind Ellipsenpunkte.
2. Man beschreibe um den Anfangspunkt O die Kreise von den Radien a und b. Durch den Schnittpunkt B eines von O

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gezogenen Strahles mit dem kleineren Kreise vom Radius b zeichne man die Parallele zur x-Axe, durch den Schnittpunkt A desselben Strahles mit dem Kreise vom Radius a die Parallele zur y-Axe. Die Parallelen zu den Axen schneiden sich in einem Ellipsenpunkte. Beweis!

3. Die Strecke $a + b$ bewege sich mit ihren Endpunkten auf den Axen eines rechtwinkligen Koordinatensystems; der Ort des gemeinschaftlichen Endpunktes von a und b ist eine Ellipse. Beweis!

65. Die gemeinschaftlichen Punkte der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und der Geraden $y = mx + q$ zu finden.

Auflösung. Die Koordinaten (x_1, y_1) eines gemeinsamen Punktes genügen gleichzeitig den Gleichungen der Geraden und der Ellipse; demnach

$$y_1 = mx_1 + q; \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Man findet

$$x_1 = \frac{-a^2mq \pm ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - q^2}}{a^2m^2 + b^2}; \; y_1 = \frac{b^2q \pm abm\sqrt{a^2m^2 + b^2 - q^2}}{a^2m^2 + b^2}. \quad (1)$$

Die Gerade $y = mx + q$ hat somit zwei, einen, keinen Punkt mit der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gemein, je nachdem

$$a^2m^2 + b^2 - q^2 \gtreqless 0. \quad (2)$$

Geometrische Deutung. Fig. 19. Die von den Brennpunkten (F_1, F_2) auf die Gerade $y = mx + q$ gefällten Lote seien F_1A_1, F_2A_2; α bezeichne den Winkel, den der obere Teil der Geraden mit der positiven x-Axe einschliesst. Bedingung (2) lautet dann

$$0 \lesseqgtr a^2 \operatorname{tg}^2\alpha + b^2 - q^2,$$

$$0 \lesseqgtr a^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha - e^2\cos^2\alpha - q^2\cos^2\alpha,$$

$$e^2\cos^2\alpha + q^2\cos^2\alpha \lesseqgtr a^2,$$

$$\overline{OA_1}^2 = \overline{OA_2}^2 \lesseqgtr a^2,$$

$$OA_1 = OA_2 \lesseqgtr a.$$

Der mit dem Radius a um den Mittelpunkt beschriebene Kreis heisse Hauptkreis der Ellipse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine Gerade hat demnach zwei Punkte, einen oder keinen Punkt mit der Ellipse gemein, je nachdem die Fusspunkte (A_1, A_2) der von den Brennpunkten auf die Gerade gefällten Lote innerhalb des Hauptkreises, auf ihm oder ausserhalb desselben liegen.

Folgerung. Die Fusspunkte der von den Brennpunkten auf alle Tangenten gefällten Lote bilden den Hauptkreis der Ellipse.

66. Die Gleichung der Geraden aufzustellen, welche die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ im Punkte (x_1, y_1) berührt.

Auflösung. Ist m der Richtungskoeffizient der Geraden, q ihr Abschnitt auf der Ordinatenaxe, so besteht zwischen den Koordinaten (x, y) jedes ihrer Punkte die Gleichung

$$y = m x + q. \qquad (1)$$

Die Gerade wird nach § 65 (2) Tangente, wenn $a^2 m^2 + b^2 - q^2 = 0$; die Koordinaten des Berührungspunktes sind

$$x_1 = -\frac{a^2 mq}{a^2 m^2 + b^2} = -\frac{a^2 m}{q}; \; y_1 = \frac{b^2 q}{a^2 m^2 + b^2} = \frac{b^2}{q}. \qquad (2)$$

Aus (2) folgt $q = \frac{b^2}{y_1}$, $m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$. (3)

Vermittelst (3) wird aus (1)

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Auflösung 2. Die Gleichung der Sekante, welche die Ellipsenpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit einander verbindet, ist

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1); \qquad (1)$$

wo

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}. \qquad (4)$$

Aus (4) und (1) ergiebt sich die Gleichung der Sekante. Diese wird Tangente in (x_1, y_1), wenn $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$; man erhält

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Zusätze.

1. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind einander parallel.
2. Die Gleichung der Normale im Ellipsenpunkte (x_1, y_1) ist $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe. Die Länge der Tangente, der Subtangente, der Normale und der Subnormale eines Ellipsenpunktes (x_1, y_1) zu berechnen.

Man findet

$$T = \frac{1}{x_1}\sqrt{(a^2 - x_1^2)(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)}; \quad \text{Subtg.} = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}.$$

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x_1^2}; \quad \text{Subn.} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Für x_1 ist der absolute Wert zu setzen.

67. Das Rechteck aus den Loten, welche von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällt werden, ist gleich dem Quadrate über der kleinen Halbaxe.

Beweis 1. Sind p_1, p_2 die von F_1, F_2 auf die Tangente gefällten Lote, (x_1, y_1) die Koordinaten des Berührungspunktes, so findet sich nach § 19

$$p_1 = \frac{b^2(a^2 + e x_1)}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}, \quad p_2 = \frac{b^2(a^2 - e x_1)}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}};$$

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{b^4(a^4 - e^2 x_1^2)}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} = \frac{b^2(a^4 - e^2 x_1^2)}{a^4 - e^2 x_1^2} = b^2.$$

Beweis 2. Fig. 19.

$$\begin{aligned} p_1 &= q\cos\alpha - e\sin\alpha, \\ p_2 &= q\cos\alpha + e\sin\alpha, \\ \hline p_1 \cdot p_2 &= q^2\cos^2\alpha - e^2\sin^2\alpha; \\ &= (a^2 m^2 + b^2)\cos^2\alpha - e^2\sin^2\alpha, \quad (\S\ 65) \\ &= a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha - e^2\sin^2\alpha, \\ &= b^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha, \\ &= b^2. \end{aligned}$$

68. Tangentenkonstruktionen.

1. Eine Ellipse und ihre Brennpunkte (F_1, F_2) sind gegeben; in einem gegebenen Ellipsenpunkte B (x_1, y_1) die Tangente anzulegen.

   Aufl. Der Fusspunkt A_1 des vom Brennpunkte F_1 auf die Tangente gefällten Lotes liegt auf dem Hauptkreise und dem Halbkreise über BF_1. Durch A_1 und B ist die Tangente bestimmt. — Der Fusspunkt A_2 des Lotes, welches von F_2 auf die Tangente gefällt ist, wird entsprechend gefunden.

2. Eine Ellipse und ihre Brennpunkte sind gegeben; parallel einer gegebenen Geraden die Tangente an die Ellipse zu legen.

   Aufl. Das Lot, welches von einem Brennpunkte F_1 auf die gegebene Gerade L gefällt wird, schneide den Hauptkreis in A_1; die Parallele zu L durch A_1 ist die verlangte Tangente.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Eine Ellipse und ihre Brennpunkte sind gegeben; von einem gegebenen Punkte P (x_1, y_1) die Tangente an die Ellipse zu legen.

1. Gleichung der Tangente.

Die Gerade $y - y_1 = m(x - x_1)$ wird Tangente an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wenn m so bestimmt wird, dass Gerade und Ellipse nur einen Punkt gemein haben.

Man findet $m = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2}$.

Folgerung (§ 62 Zus. 3): Von einem Punkte P aus erhält man zwei, eine, keine Tangente, je nachdem P ausserhalb, auf, innerhalb der Ellipse liegt.

Wie lautet die Gleichung der Geraden

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2} (x - x_1),$$

wenn (x_1, y_1) ein Ellipsenpunkt?

2. Konstruktion der Tangente.

Der Fusspunkt A_1 des von F_1 auf die gesuchte Tangente gefällten Lotes liegt auf dem Hauptkreise und dem Kreise über dem Durchmesser PF_1; durch P und A_1 ist die Tangente bestimmt.

Zusatz. Der Kreis über PF_1 — oder PF_2 — hat keinen Punkt mit dem Hauptkreise gemein, berührt denselben oder schneidet ihn, je nachdem P innerhalb der Ellipse, auf ihr oder ausserhalb derselben liegt. Alle über Brennstrahlen nach aussen beschriebenen Halbkreise berühren also den Hauptkreis.

69. Die Normale eines Ellipsenpunktes halbiert den Winkel seiner Brennstrahlen. Fig. 18.

Beweis. Die Normale des Ellipsenpunktes B (x_1, y_1) schneidet die grosse Axe in einem Punkte A, dessen Abscisse $\varepsilon^2 x_1$ ist. Bezeichnet $[x_1]$ den absoluten Wert von x_1, so ist $[x_1] \leqq a$, also $[\varepsilon^2 x_1] \leqq \varepsilon . \varepsilon a$, d. h. $OA \leqq \varepsilon . e$; da $\varepsilon < 1$, so liegt A stets zwischen F_1 und F_2.

Somit ist

$$F_1 A = F_1 O + OA = a\varepsilon + \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon(a + \varepsilon x_1) = \varepsilon r_1,$$
$$F_2 A = F_2 O - OA = a\varepsilon - \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon(a - \varepsilon x_1) = \varepsilon r_2,$$

$$F_1 A : F_2 A = r_1 : r_2,$$

d. h. AB halbiert den Winkel $F_1 B F_2$.

Aufgabe. In einem gegebenen Punkte der Ellipse mit Hilfe dieses Satzes die Tangente anzulegen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zusätze.

1. Strahlen, welche von dem einen Brennpunkte ausgehen, werden durch die Ellipse nach dem anderen Brennpunkte reflektiert.
2. Die Tangente, die Normale und die Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes bilden ein harmonisches Büschel; die Brennstrahlen sind einander zugeordnet.

70. Die Gleichung der Polare eines Punktes (ξ, η) inbezug auf die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aufzustellen. (§ 40.)

Auflösung. $\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$

Erklärung: Unter der Polare eines Punktes (ξ, η) innerhalb der Ellipse versteht man die Gerade $\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$

71. Die Entfernung eines Punktes (ξ, η) von seiner Polare zu finden.

Aufl. $\pm \frac{b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2 - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 \xi^2 + a^4 \eta^2}}.$

Zusätze.

1. Die Polare des Mittelpunktes liegt im Unendlichen.
2. Die Polare eines Brennpunktes ist die zugehörige Leitlinie.
3. Die Polare eines Punktes, der auf einer Geraden liegt, geht durch den Pol dieser Geraden.
4. Die Polaren der Punkte einer Geraden inbezug auf eine Ellipse bilden einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Pol der Geraden ist.
5. Die Polaren von Punkten einer Leitlinie schneiden sich im zugehörigen Brennpunkte.
6. Der Durchschnittspunkt zweier Geraden ist Pol für die Verbindungslinie ihrer Pole.
7. Zieht man von einem Punkte P eine Sekante PAB, so liegt der Schnittpunkt der Tangenten in A und B auf der Polare von P.

Aufgabe. Eine Sehne AB dreht sich um einen ihrer Pnnkte oder einen Punkt ihrer Verlängerung; welche Kurve beschreibt der dem Drehpunkt P (ξ, η) zugeordnete, zu A, B, P harmonisch liegende Punkt O? (§ 42, 4).

Aufl. $\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$

Folgerung. Jede Ellipsensehne wird durch einen auf ihr oder ihrer Verlängerung liegenden Punkt und den Schnittpunkt mit der zugehörigen Polare innerlich und äusserlich in gleichem Verhältnis geteilt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

72. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte paralleler Ellipsensehnen zu finden.

Aufl. Ist $y = mx + q$ eine der parallelen Sehnen, und sind x_1, x_2 die Abscissen ihrer Endpunkte, so erfüllen die Koordinaten (x, y) ihres Mittelpunktes die Gleichungen

$$y = mx + p, \quad (1) \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (2)$$

m ist konstant, q veränderlich.

Aus (1) und $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ erhält man

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2 mq}{a^2 m^2 + b^2}. \quad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt durch Beseitigung von q

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x.$$

Folgerung. Die Mittelpunkte paralleler Ellipsensehnen liegen auf einem Durchmesser.

73. Halbiert ein Durchmesser die zu einem anderen parallelen Sehnen, so halbiert auch der zweite Durchmesser die Parallelen zum ersten.

Voraussetzung: $y = m_1 x$ halbiert die Sehnen vom Richtungskoeffizienten m;

Behauptung: $y = mx$ halbiert die Sehnen vom Richtungskoeffizienten m_1.

Beweis. Nach Voraussetzung und § 72 ist

$$m_1 = -\frac{b_2}{a^2 m},$$

$$\text{oder } m = -\frac{b^2}{a^2 m_1}; \quad (1)$$

$y = m_2 x$ halbiere die Sehnen vom Richtungskoeffizienten m_1, so ist (§ 72)

$$m_2 = -\frac{b^2}{a^2 m_1}. \quad (2)$$

Aus (2) und (1) folgt $m_2 = m$;

d. h. $y = mx$ halbiert die zum Durchmesser $y = m_1 x$ parallelen Sehnen.

Erklärung. Zwei Durchmesser, von denen jeder die zum anderen parallelen Sehnen halbiert, heissen konjugiert.

Zusätze.

1. Das Produkt der Richtungskoeffizienten konjugierter Durchmesser ist $m \cdot m_1 = -\frac{b^2}{a^2}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Ist das Produkt der Richtungskoeffizienten zweier Durchmesser $m m_1 = -\frac{b^2}{a^2}$, so sind die Durchmesser konjugiert.
3. Für $m = 0$ ist $m_1 = \infty$; die Axen sind konjugierte Durchmesser. Wächst m von 0 bis ∞, so wächst m_1 von $-\infty$ bis 0; von je zwei konjugierten Halbmessern oberhalb der grossen Axe liegt einer im ersten, der andere im zweiten Quadranten.
4. Die Tangente im Endpunkte eines Durchmessers ist dem konjugierten Durchmesser parallel.

Beweis. Der zum Berührungspunkte (x_1, y_1) gezogene Durchmesser ist

$$y = \frac{y_1}{x_1} x; \qquad (1)$$

der hierzu konjugierte $\quad y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x; \qquad (2)$

die Tangente in (x_1, y_1) $\quad y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}. \qquad (3)$

Aus (3) und (2) folgt die Behauptung.

Aufgabe. Eine Ellipse und ihr Mittelpunkt sind gegeben; in einem gegebenen Ellipsenpunkte die Tangente anzulegen.

Aufl. Man zeichne den Durchmesser zum Berührungspunkte B und eine zu diesem Durchmesser parallele Sehne; zu dem durch den Sehnenmittelpunkt gehenden Durchmesser ziehe man die Parallele durch B.

74. Die Längen konjugierter Halbmesser aus den Halbaxen der Ellipse und dem Richtungskoeffizienten des einen Halbmessers zu berechnen.

Aufl. Die — oberhalb der grossen Axe liegenden — konjugierten Halbmesser seien a_1, b_1; die Koordinaten ihrer Endpunkte (x_1, y_1), (x_2, y_2). Ist m der Richtungskoeffizient des im ersten Quadranten liegenden Halbmessers a_1, m_1 der von b_1, so bestehen die Gleichungen

$$a_1^2 = x_1^2 + y_1^2; \quad y_1^2 = m^2 x_1^2; \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

$$b_1^2 = x_2^2 + y_2^2; \quad y_2^2 = m_1^2 x_2^2; \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) ergiebt sich durch Beseitigung von x_1, y_1

$$a_1^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{a^2 m^2 + b^2}. \qquad (3)$$

Aus den Gleichungen (2) erhält man

$$b_1^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m_1^2)}{a^2 m_1^2 + b^2},$$

wo $m \,.\, m_1 = -\frac{b^2}{a^2}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch Erweiterung des letzten Bruches mit m^2 folgt

$$b_1{}^2 = \frac{a^4 m^2 + b^4}{a^2 m^2 + b^2}. \qquad (4)$$

Zusatz. Die Summe der Quadrate über konjugierten Halbmessern ist konstant. $a_1{}^2 + b_1{}^2 = a^2 + b^2$. Beweis aus (3) und (4).

75. Den Winkel ω zu bestimmen, den zwei konjugierte Durchmesser mit einander bilden.

Aufl. Sind α und α_1 die Winkel, welche die oberen konjugierten Halbmesser mit der positiven Richtung der x-Axe bilden ($\alpha_1 > \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = m$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = m_1$), so ist

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{m_1 - m}{1 + mm_1}; \quad m \,.\, m_1 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{a^2 m^2 + b^2}{e^2 m}.$$

Für $m = 0$ ist $\omega = \frac{\pi}{2}$; für $m > 0$ ist $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$.

Zusätze.

1. Das von zwei konjugierten Halbmessern und den Tangenten in ihren Endpunkten gebildete Parallelogramm ist gleich dem Rechteck aus den Halbaxen.

Beweis: $J^2 = a_1{}^2 b_1{}^2 \sin^2\omega = a_1{}^2 b_1{}^2 \frac{\operatorname{tg}^2\omega}{1 + \operatorname{tg}^2\omega}$.

$$J^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{a^2 m^2 + b^2} \cdot \frac{a^4 m^2 + b^4}{a^2 m^2 + b^2} \cdot \frac{(a^2 m^2 + b^2)^2}{e^4 m^2 + (a^2 m^2 + b^2)^2}$$

$$= \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)\,(a^4 m^2 + b^4)}{(1 + m^2)\,(a^4 m^2 + b^4)} = a^2 b^2.$$

2. Parallelogramme, deren Seiten die Ellipse in den Endpunkten konjugierter Durchmesser berühren, sind einander gleich. (4 ab).
3. Parallelogramme, deren Seiten die Endpunkte konjugierter Durchmesser verbinden, sind einander gleich. (2 ab).

76. Die Gleichung der Ellipse inbezug auf zwei konjugierte Durchmesser als Koordinatenaxen aufzustellen. Fig. 20.

Aufl. Die Bezeichnungen seien dieselben wie in § 74, 75. Sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die Koordinaten eines Ellipsenpunktes (x, y) inbezug auf das System der konjugierten Durchmesser, so ist

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{x} \cos\alpha + \mathfrak{y} \cos\alpha_1, \\ y &= \mathfrak{x} \sin\alpha + \mathfrak{y} \sin\alpha_1. \end{aligned} \qquad (1)$$

Zwischen den Koordinaten (x, y) des Ellipsenpunktes besteht die Gleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vermittelst (1) wird aus dieser Gleichung

$$\mathfrak{x}^2(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) + \mathfrak{y}^2(b^2\cos^2\alpha_1 + a^2\sin^2\alpha_1) + 2\mathfrak{x}\mathfrak{y}(b^2\cos\alpha\cos\alpha_1 + a^2\sin\alpha\sin\alpha_1) = a^2 b^2.$$

Durch Einführung von $\operatorname{tg}\alpha = m$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = m_1$ und Division durch $a^2 b^2$ folgt:

$$\mathfrak{x}^2 \frac{b^2 + a^2 m^2}{a^2 b^2 (1 + m^2)} + \mathfrak{y}^2 \frac{b^2 + a^2 m_1^2}{a^2 b^2 (1 + m_1^2)} - 2\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} \frac{b^2 + a^2 m m_1}{a^2 b^2 \sqrt{(1 + m^2)(1 + m_1^2)}} = 1.$$

Mit Benutzung der Formeln

$$a_1^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{a^2 m^2 + b^2}, \quad b_1^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m_1^2)}{a^2 m_1^2 + b^2}, \quad b^2 + a^2 m m_1 = 0$$

erhält man schliesslich

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a_1^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{b_1^2} = 1.$$

Aufgabe. Beweise die Richtigkeit der Gleichungen (1) für einen Punkt jedes der acht Felder, in welche die Axen der Ellipse und die konjugierten Durchmesser die Ebene teilen.

77. Die Gleichungen der Sehnen aufzustellen, welche den Ellipsenpunkt (x_1, y_1) mit den Endpunkten der grossen Axe verbinden. (Supplementarsehnen.)

Aufl. $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 + a}(x - x_1)$; $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 - a}(x - x_1)$.

Das Produkt der Richtungskoeffizienten ist $\frac{y_1^2}{x_1^2 - a^2} = -\frac{b^2}{a^2}$.

Folgerung. Durchmesser, welche Supplementarsehnen parallel sind, sind einander konjugiert.

Aufgabe. Eine Ellipse und ihre grosse Axe sind gegeben; den zu einem gegebenen Durchmesser konjugierten zu zeichnen.

Aufl. Man zeichne zwei Supplementarsehnen, von denen die eine dem gegebenen Durchmesser parallel läuft; der konjugierte Durchmesser ist der anderen Sehne parallel.

3. Die Hyperbel.

78. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem so zu bestimmen, dass die Gleichung, welche zwischen den Koordinaten eines Hyperbelpunktes besteht, die erste Potenz der Abscisse nicht mehr enthält.

Auflösung. Die Scheitelgleichung der Hyperbel ist

$$y^2 = 2px + x^2(\varepsilon^2 - 1), \quad \varepsilon > 1. \qquad (1)$$

Man wähle ein rechtwinkliges Koordinatensystem $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ so, dass $y = \mathfrak{y}$, $x = \mathfrak{x} - a$; a soll noch bestimmt werden. Als Gleichung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zwischen den Koordinaten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eines Hyperbelpunktes ergiebt sich dann

$$\mathfrak{y}^2 = \mathfrak{x}^2(\varepsilon^2 - 1) + 2\mathfrak{x}\left(p - a(\varepsilon^2 - 1)\right) - 2pa + a^2(\varepsilon^2 - 1). \quad (2)$$

a werde so bestimmt, dass

$$p - a(\varepsilon^2 - 1) = 0, \text{ also } a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}, \; p = a(\varepsilon^2 - 1). \quad (3)$$

Vermittelst (3) geht (2) über in

$$\mathfrak{x}^2(\varepsilon^2 - 1) - \mathfrak{y}^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1),$$

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} - \frac{\mathfrak{y}^2}{a^2(\varepsilon^2 - 1)} = 1. \quad (4)$$

Setzt man $a^2(\varepsilon^2 - 1) = a \cdot p = b^2$, so lautet (4)

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} - \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

Die Abscisse des Brennpunktes (§ 49, 4) ist im System (x, y):

$$x = r_\pi = \frac{p}{\varepsilon + 1} = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon + 1} = a(\varepsilon - 1); \quad (6)$$

im Systeme $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$:

$$\mathfrak{x} = x + a = a\varepsilon. \quad (7)$$

Die Gleichung der Leitlinie (§ 49, 4) lautet im Systeme (x, y):

$$x = -\frac{p}{\varepsilon(\varepsilon + 1)} = -\frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon(\varepsilon + 1)} = -\frac{a(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}; \quad (8)$$

im Systeme $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$:

$$\mathfrak{x} = x + a = \frac{a}{\varepsilon}. \quad (9)$$

79. Welche Gleichung besteht zwischen den Polarkoordinaten (r, φ) eines Hyperbelpunktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, wenn der Anfangspunkt des Systemes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Pol, die positive Abscissenaxe die Axe des Polarkoordinatensystems wird?

Auflösung. Für die Koordinaten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eines Hyperbelpunktes ergiebt sich

$$\mathfrak{x} = r\cos\varphi, \; \mathfrak{y} = r\sin\varphi; \; \frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} - \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2} = 1.$$

Hieraus folgt

$$r^2 = \frac{a^2(\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon^2\cos^2\varphi - 1} = \frac{b^2}{\varepsilon^2\cos^2\varphi - 1};$$

$$r = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon^2\cos^2\varphi - 1}}. \quad (1)$$

Folgerungen.

1. $r_\alpha = r_{\alpha + \pi}$.

Jede Hyperbelsehne, die durch den Pol, also durch den Anfangspunkt des Systems $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ geht, wird in ihm halbiert; der Anfangspunkt heisst daher Mittelpunkt der Hyperbel, jede durch ihn hindurchgehende Sehne Durchmesser.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Das Minimum von r ist $r_0 = r_\pi = \frac{a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = a$.

r wird Maximum, wenn $\varepsilon^2\cos^2\varphi - 1 = 0$, d. h. wenn $\cos^2\varphi = \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Dann ist $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \varepsilon^2 - 1 = \frac{a^2(\varepsilon^2 - 1)}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{b}{a}$.

Ist β der spitze Winkel, für welchen die Tangente gleich $+\frac{b}{a}$, so ist $\operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\frac{b}{a}$.

Das Maximum von r ist $r_\beta = r_{\beta+\pi} = r_{\pi-\beta} = r_{2\pi-\beta} = \infty$; die Durchmesser $y = \frac{b}{a}x$ und $y = -\frac{b}{a}x$ schneiden die Hyperbel im Unendlichen, sie heissen deshalb Asymptoten ($\sigma\upsilon\mu\pi\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\iota\nu$ = zusammenfallen, $\acute{\alpha}$ privativum).

3. Wenn $\varepsilon^2\cos^2\varphi - 1 < 0$, also $-\frac{1}{\varepsilon} < \cos\varphi < \frac{1}{\varepsilon}$ oder $\beta < \varphi < \pi - \beta$, so wird r imaginär; jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade, deren Richtungskoeffizient zwischen $+\frac{b}{a}$ und $-\frac{b}{a}$ liegt, hat keinen Punkt mit der Hyperbel gemein.

Erklärung. Alle Geraden, welche durch den Mittelpunkt gehen, sollen Durchmesser heissen; schneidet ein Durchmesser die Hyperbel nicht, so soll unter seinem Halbmesser der absolute Wert des imaginären Radius vector $r = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon^2\cos^2\varphi - 1}}$ verstanden werden; dieser absolute Wert ist auf dem Durchmesser vom Mittelpunkte aus abzutragen.

Für $\varepsilon^2\cos^2\varphi - 1 < 0$ ist $r_\varphi = \frac{b}{\sqrt{-(1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi)}} = -\frac{ib}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi}}$; der zugehörige Halbmesser ist demnach

$$\left[r_\varphi\right] = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi}}.$$

4. Der Durchmesser $r_0 + r_\pi = 2a$ wird „Hauptaxe“, der Durchmesser $\left[r_{\frac{\pi}{2}}\right] + \left[r_{\frac{3\pi}{2}}\right] = 2b$ wird „Nebenaxe“ der Hyperbel genannt.

Festsetzung. Die Koordinaten eines Punktes inbezug auf die Axen der Hyperbel werden von jetzt ab durch x und y (statt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$) bezeichnet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

80. Den Lauf der Hyperbel mit Hilfe der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ zu untersuchen.

Auflösung: Die nach y aufgelöste Gleichung lautet

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Für $-a < x < +a$ ergeben sich imaginäre Werte von y, also keine Hyperbelpunkte;

für $x \begin{smallmatrix} < -a \\ > +a \end{smallmatrix}$ erhält man je zwei gleiche, reelle Werte von y mit entgegengesetzten Vorzeichen; die Hyperbel ist symmetrisch zur x-Axe (§ 48, 2).

Die nach x aufgelöste Gleichung ist $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$.

Für jeden Wert von y erhält man zwei gleiche, reelle Werte von x mit entgegengesetzten Vorzeichen; die Hyperbel ist symmetrisch zur y-Axe. (Rechter und linker Hyperbelzweig).

Für $y = 0$ ist $x = \pm a$.

Da die Kurve symmetrisch zur y-Axe liegt, so hat sie einen zweiten Brennpunkt $(-a\varepsilon, 0)$ und eine zweite Leitlinie $\left(x = -\frac{a}{\varepsilon}\right)$.

Die Entfernung $e = a\varepsilon$ eines Brennpunktes vom Mittelpunkt der Hyperbel heisst „lineare", die Zahl ε „numerische Excentricität" der Hyperbel.

Zusätze.

1. Für $\varepsilon = \sqrt{2}$ wird $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = a$; die Hyperbel heisst in diesem Falle gleichseitig.
2. $b^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1) = e^2 - a^2$; $e^2 = a^2 + b^2$.
3. $b^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 b^2 \gtreqless 0$, je nachdem (x, y) innerhalb eines Hyperbelzweiges, auf einem Zweige oder zwischen beiden Zweigen liegt. Beweis!

81. Die Differenz der Brennstrahlen eines Punktes (x_1, y_1) der Hyperbel ist konstant, nämlich gleich der Hauptaxe.

Beweis. Für einen Punkt (x_1, y_1) des rechten Zweiges ist (Fig. 21a)

$r_1^2 = y_1^2 + (x_1 + a\varepsilon)^2 = (x_1^2 - a^2)(\varepsilon^2 - 1) + (x_1 + a\varepsilon)^2 = (\varepsilon x_1 + a)^2$;

$r_1 = \varepsilon x_1 + a$.

$r_2^2 = y_1^2 + (x_1 - a\varepsilon)^2 = (x_1^2 - a^2)(\varepsilon^2 - 1) + (x_1 - a\varepsilon)^2 = (\varepsilon x_1 - a)^2$;

$r_2 = \varepsilon x_1 - a$.

Für einen Punkt (x_1, y_1) des linken Zweiges ergiebt sich (Fig. 21b)

$r_1^2 = y_1^2 + (-x_1 - a\varepsilon)^2 = y_1^2 + (x_1 + a\varepsilon)^2 = (\varepsilon x_1 + a)^2$;

$r_1 = -(\varepsilon x_1 + a)$.

$r_2^2 = y_1^2 + (-x_1 + a\varepsilon)^2 = y_1^2 + (x_1 - a\varepsilon)^2 = (\varepsilon x_1 - a)^2$;

$r_2 = -(\varepsilon x_1 - a)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Demnach sind die Längen der Brennstrahlen eines Hyperbelpunktes (x_1, y_1)

$$r_1 = \pm(\varepsilon x_1 + a), \quad r_2 = \pm(\varepsilon x_1 - a);$$

die oberen Vorzeichen gelten für einen Punkt des rechten, die unteren für einen Punkt des linken Zweiges.

Für jeden Punkt des rechten Zweiges ist $r_1 - r_2 = 2a$, für jeden Punkt des linken Zweiges $r_2 - r_1 = 2a$.

Umkehrung. Ist die Differenz der Entfernungen eines beweglichen Punktes von zwei festen Punkten konstant, so beschreibt der Punkt eine Hyperbel.

Konstruktion der Hyperbel.

82. Die gemeinschaftlichen Punkte der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und der Geraden $y = mx + q$ zu finden.

Auflösung. Die Koordinaten (x_1, y_1) eines gemeinsamen Punktes genügen gleichzeitig den Gleichungen der Geraden und der Hyperbel; demnach

$$y_1 = mx_1 + q, \quad (1) \qquad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Durch Beseitigung von y_1 erhält man

$$x_1^2(b^2 - a^2m^2) - 2a^2mqx_1 - a^2(q^2 + b^2) = 0. \qquad (3)$$

1. Es sei $b^2 - a^2m^2 = 0$, daher $m = \pm\frac{b}{a}$; die Gerade $y = mx + q$ ist parallel einer Asymptote (§ 79 Folgerung 2).

   Aus (3) wird

$$\frac{1}{x_1} \cdot \left(2mq + \frac{1}{x_1}(q^2 + b^2)\right) = 0;$$

   man findet $x_1' = -\frac{q^2 + b^2}{2mq}$, $y_1' = \frac{q^2 - b^2}{2q}$;

$$x_1'' = \infty, \quad y_1'' = \infty.$$

   Für $q \gtrless 0$ liegt ein gemeinsamer Punkt in der Endlichkeit, ein zweiter im Unendlichen;

   für $q = 0$ — also wenn die Gerade Asymptote wird — liegen beide gemeinsamen Punkte im Unendlichen.

2. Ist $b^2 - a^2m^2 \gtrless 0$, so erhält man aus (3) und (1)

$$x_1 = \frac{-a^2mq \pm abm\sqrt{b^2 + q^2 - a^2m^2}}{a^2m^2 - b^2};$$

$$y_1 = \frac{-b^2q \pm abm\sqrt{b^2 + q^2 - a^2m^2}}{a^2m^2 - b^2}. \qquad (4)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gerade $y = mx + q$ hat somit zwei Punkte, einen oder keinen Punkt mit der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gemein, je nachdem

$$b^2 + q^2 - a^2 m^2 \gtreqless 0. \qquad (5)$$

Geometrische Deutung. Fig. 22. Die von den Brennpunkten (F_1, F_2) auf die Gerade $y = mx + q$ gefällten Lote seien $F_1 A_1$, $F_2 A_2$; α bezeichne den Winkel, den der obere Teil der Geraden mit der positiven x-Axe einschliesst. Bedingung (5) lautet dann

$$e^2 - a^2 + q^2 - a^2 \operatorname{tg}^2\alpha \gtreqless 0;$$

$$e^2 \cos^2\alpha + q^2 \cos^2\alpha \gtreqless a^2;$$

$$\overline{OA_1}^2 = \overline{OA_2}^2 \gtreqless a^2;$$

$$OA_1 = OA_2 \gtreqless a.$$

Der mit dem Radius a um den Mittelpunkt der Hyperbel beschriebene Kreis heisse Hauptkreis der Hyperbel.

Eine Gerade, welche keiner Asymptote parallel ist, hat demnach zwei Punkte, einen oder keinen Punkt mit der Hyperbel gemein, je nachdem die Fusspunkte der Lote, welche von den Brennpunkten auf die Gerade gefällt werden, ausserhalb des Hauptkreises, auf ihm oder innerhalb desselben liegen.

Folgerung. Die Fusspunkte der von den Brennpunkten auf alle Tangenten gefällten Lote bilden den Hauptkreis der Hyperbel.

83. Die Gleichung der Geraden aufzustellen, welche die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ im Punkte (x_1, y_1) berührt.

Auflösung 1. Ist m der Richtungskoeffizient der Geraden, q ihr Abschnitt auf der y-Axe, so besteht zwischen den Koordinaten (x, y) jedes ihrer Punkte die Gleichung

$$y = mx + q. \qquad (1)$$

Die Gerade wird nach § 82 Tangente, wenn $b^2 + q^2 - a^2 m^2 = 0$; die Koordinaten des Berührungspunktes sind

$$x_1 = -\frac{a^2 mq}{a^2 m^2 - b^2} = -\frac{a^2 m}{q}; \; y_1 = -\frac{b^2 q}{a^2 m^2 - b^2} = -\frac{b^2}{q}. \qquad (2)$$

Hieraus folgt

$$m = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \; q = -\frac{b^2}{y_1}. \qquad (3)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vermittelst (3) wird aus (1)

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Auflösung 2. Die Gleichung der Sekante, welche die Hyperbelpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit einander verbindet, ist

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \qquad (1)$$

wo

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}. \qquad (4)$$

Aus (4) und (1) ergiebt sich die Gleichung der Sekante. Diese wird Tangente in (x_1, y_1), wenn $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$; man erhält

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Zusätze.

1. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind einander parallel.
2. Die Gleichung der Normale im Punkte (x_1, y_1) der Hyperbel ist $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$.

Aufgabe. Die Länge der Tangente, der Subtangente, der Normale, der Subnormale zu finden.

Aufl. $T = \frac{1}{x_1}\sqrt{(x_1^2 - a^2)(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2)}$; Subtg. $= \frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$.

$N = \frac{b}{a}\sqrt{\varepsilon^2 x_1^2 - a^2}$; Subn. $= \frac{b^2 x_1}{a^2}$.

Für x_1 ist der absolute Wert zu setzen.

84. Das Rechteck aus den Loten, welche von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällt werden, ist gleich dem Quadrate über der halben Nebenaxe.

Beweis 1. Sind p_1, p_2 die von F_1, F_2 auf die Tangente gefällten Lote, (x_1, y_1) die Koordinaten des Berührungspunktes, so findet sich nach § 19

$$p_1 = \pm \frac{b^2(ex_1 + a^2)}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}, \quad p_2 = \pm \frac{b^2(ex_1 - a^2)}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}};$$

Das positive Vorzeichen für $x_1 > 0$, das negative für $x_1 < 0$.

Demnach $$p_1 \cdot p_2 = \frac{b^4(e^2 x_1^2 - a^4)}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} = \frac{b^2(e^2 x_1^2 - a^4)}{e^2 x_1^2 - a^4} = b^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis 2. Fig. 22.

$$p_1 = e \sin\alpha - q \cos\alpha,$$
$$p_2 = e \sin\alpha + q \cos\alpha,$$
$$p_1 \cdot p_2 = e^2 \sin^2\alpha - q^2 \cos^2\alpha$$
$$= e^2 \sin^2\alpha - (a^2 m^2 - b^2) \cos^2\alpha \qquad (\S\ 82.\ \text{Gl. } 5.)$$
$$= e^2 \sin^2\alpha - a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha$$
$$= b^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha = b^2.$$

85. Tangentenkonstruktionen.

1. Eine Hyperbel und ihre Brennpunkte (F_1, F_2) sind gegeben; in einem gegebenen Hyperbelpunkte B (x_1, y_1) die Tangente anzulegen.

Aufl. Der Fusspunkt A_1 des vom Brennpunkte F_1 auf die Tangente gefällten Lotes liegt auf dem Hauptkreise und auf dem Kreise über dem Durchmesser BF_1. Durch A_1 und B ist die Tangente bestimmt. — Der Fusspunkt A_2 des von F_2 auf die Tangente gefällten Lotes wird entsprechend gefunden.

2. Eine Hyperbel und ihre Brennpunkte sind gegeben; parallel einer gegebenen Geraden die Tangente an die Hyperbel zu legen.

Aufl. Das Lot, welches von einem Brennpunkte F_1 auf die gegebene Gerade L gefällt wird, schneide den Hauptkreis in A_1; die Parallele zu L durch A_1 ist die gesuchte Tangente.

3. Eine Hyperbel und ihre Brennpunkte sind gegeben; von einem Punkte P (x_1, y_1) die Tangente an die Hyperbel zu legen.

1. Gleichung der Tangente.

Die Gerade $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ wird Tangente an die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, wenn m so bestimmt wird, dass Gerade und Hyperbel nur einen Punkt gemein haben.

Man findet $$m = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{-(b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 - a^2 b^2)}}{x_1^2 - a^2}.$$

Folgerung (§ 80 Zus. 3): Von einem Punkte P aus erhält man keine, eine oder zwei Tangenten, je nachdem P innerhalb eines Hyperbelzweiges, auf einem Zweige oder zwischen beiden Zweigen liegt.

Wie lautet die Gleichung der Geraden

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{-(b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 - a^2 b^2)}}{x_1^2 - a^2}\,(x - x_1),$$

wenn (x_1, y_1) ein Hyperbelpunkt?

2. Konstruktion. Der Fusspunkt A_1 des von F_1 auf die gesuchte Tangente gefällten Lotes liegt auf dem Hauptkreise und dem Kreise über dem Durchmesser PF_1; durch P und A_1 ist die Tangente bestimmt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zusatz. Der Kreis über dem Durchmesser PF_1 — oder PF_2 — hat keinen Punkt mit dem Hauptkreise gemein, berührt denselben oder schneidet ihn, je nachdem P innerhalb eines Zweiges, auf der Hyperbel oder zwischen beiden Zweigen liegt. Alle über Brennstrahlen als Durchmesser beschriebenen Kreise berühren also den Hauptkreis.

86. Die Tangente eines Hyperbelpunktes halbiert den Winkel seiner Brennstrahlen.

Beweis. Die Tangente des Hyperbelpunktes B (x_1, y_1) schneidet die Hauptaxe in einem Punkte A, dessen Abscisse gleich $\frac{a^2}{x_1}$. Der absolute Wert von $\frac{a^2}{x_1}$ ist höchstens gleich a; daher liegt A stets zwischen F_1 und F_2.

Für einen Punkt B des rechten Zweiges erhält man (Fig. 21a)

$$F_1A = F_1O + OA = a\varepsilon + \frac{a^2}{x_1} = \frac{a(\varepsilon x_1 + a)}{x_1} = \frac{a}{x_1} r_1,$$

$$F_2A = F_2O - OA = a\varepsilon - \frac{a^2}{x_1} = \frac{a(\varepsilon x_1 - a)}{x_1} = \frac{a}{x_1} r_2,$$

$$F_1A : F_2A = r_1 : r_2;$$

für einen Punkt des linken Zweiges ergiebt sich (Fig. 21b)

$$F_1A = F_1O - OA = a\varepsilon + \frac{a^2}{x_1} = \frac{a(\varepsilon x_1 + a)}{x_1} = -\frac{a}{x_1} r_1,$$

$$F_2A = F_2O + OA = a\varepsilon - \frac{a^2}{x_1} = \frac{a(\varepsilon x_1 - a)}{x_1} = -\frac{a}{x_1} r_2,$$

$$F_1A : F_2A = r_1 : r_2.$$

In jedem Falle halbiert AB den Winkel F_1BF_2.

Aufgabe. In einem gegebenen Punkte der Hyperbel mit Hilfe dieses Satzes die Tangente anzulegen.

Zusätze.

1. Strahlen, welche von dem einen Brennpunkte ausgehen, werden durch die Hyperbel so reflektiert, dass ihre Verlängerungen sich im anderen Brennpunkte schneiden.
2. Die Tangente, die Normale und die Brennstrahlen eines Hyperbelpunktes bilden ein harmonisches Büschel; die Brennstrahlen sind einander zugeordnet.

87. Die Gleichung der Polare eines Punktes (ξ, η) inbezug auf die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ aufzustellen. (§ 40).

Aufl. $\frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = 1.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Erklärung. Unter der Polare eines Punktes (ξ, η) innerhalb eines Hyperbelzweiges versteht man die Gerade $\frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = 1$.

88. Die Entfernung eines Punktes (ξ, η) von seiner Polare zu bestimmen.

Aufl. $\pm \frac{b^2 \xi^2 - a^2 \eta^2 - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 \xi^2 + a^4 \eta^2}}$.

Zusätze.

1. Die Polare des Mittelpunktes liegt im Unendlichen.
2. Die Polare eines Brennpunktes ist die zugehörige Leitlinie.
3. Die Polare eines Punktes, der auf einer Geraden liegt, geht durch den Pol dieser Geraden.
4. Die Polaren der Punkte einer Geraden inbezug auf eine Hyperbel bilden ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Pol der Geraden ist.
5. Die Polaren von Punkten einer Leitlinie schneiden sich im zugehörigen Brennpunkte.
6. Der Durchschnittspunkt zweier Geraden ist Pol für die Verbindungslinie ihrer Pole.
7. Zieht man von einem Punkte P eine Sekante PAB, so liegt der Schnittpunkt der Tangenten in A und B auf der Polare von P.

Aufgabe. Eine Sehne AB dreht sich um einen ihrer Punkte oder einen Punkt ihrer Verlängerung; welche Kurve beschreibt der dem Drehpunkt P (ξ, η) zugeordnete, zu A, B, P harmonisch liegende Punkt O? (§ 43, 4).

Aufl. $\frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = 1$.

Folgerung. Jede Hyperbelsehne wird durch einen auf ihr oder ihrer Verlängerung liegenden Punkt und den Schnittpunkt mit der zugehörigen Polare innerlich und äusserlich in gleichem Verhältnis geteilt.

89. Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte paralleler Hyperbelsehnen zu finden.

Auflösung. Ist $y = mx + q$ eine der parallelen Sehnen, und sind x_1, x_2 die Abscissen ihrer Endpunkte, so erfüllen die Koordinaten (x, y) ihres Mittelpunktes die Gleichungen

$$y = mx + q, \quad (1) \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (2)$$

m ist konstant, q veränderlich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus (1) und $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ erhält man

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2 mq}{a^2 m^2 - b^2}. \qquad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt durch Beseitigung von q

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x.$$

Folgerung. Die Mittelpunkte paralleler Hyperbelsehnen liegen auf einem Durchmesser.

90. Halbiert ein Durchmesser die zu einem anderen parallelen Sehnen, so halbiert auch der zweite Durchmesser die Parallelen zum ersten.

Vor.: $y = m_1 x$ halbiert die Sehnen vom Richtungskoeffizienten m;
Beh.: $y = mx$ „ „ „ „ „ m_1.

Beweis. Nach Voraussetzung und § 89 ist

$$m_1 = \frac{b^2}{a^2 m},$$

$$\text{oder} \quad m = \frac{b^2}{a^2 m_1}; \qquad (1)$$

$y = m_2 x$ halbiere die Sehnen vom Richtungskoeffizienten m_1, so ist

$$m_2 = \frac{b^2}{a^2 m_1}. \qquad (2)$$

Aus (2) und (1) folgt $m_2 = m$,
d. h. $y = mx$ halbiert die zum Durchmesser $y = m_1 x$ parallelen Sehnen.

Erklärung. Zwei Durchmesser, von denen jeder die zum anderen parallelen Sehnen halbiert, heissen konjugiert.

Zusätze.

1. Das Produkt der Richtungskoeffizienten konjugierter Durchmesser ist $mm_1 = \frac{b^2}{a^2}$.
2. Ist das Produkt der Richtungskoeffizienten zweier Durchmesser $mm_1 = \frac{b^2}{a^2}$, so sind dieselben konjugiert.
3. Für $m = 0$ ist $m_1 = \infty$; die Axen sind konjugierte Durchmesser. Wächst m von 0 bis $+\frac{b}{a}$, so nimmt m_1 ab von $+\infty$ bis $+\frac{b}{a}$; nimmt m ab von -0 bis $-\frac{b}{a}$, so wächst m_1 von $-\infty$ bis $-\frac{b}{a}$. Konjugierte Halbmesser liegen also in demselben Quadranten zu beiden Seiten der Asymptote; sie nähern sich ihr gleichzeitig und fallen schliesslich mit ihr zusammen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anmerkung. Der Richtungskoeffizient eines oberhalb der Hauptaxe gelegenen Halbmessers soll mit m bezeichnet werden, wenn der Halbmesser zwischen Asymptote und Hauptaxe, mit m_1, wenn er zwischen Asymptote und Nebenaxe liegt.

4. Die Tangente im Endpunkte eines Durchmessers ist dem konjugierten Durchmesser parallel.

Beweis. Der zum Berührungspunkte (x_1, y_1) gezogene Durchmesser ist $$y = \frac{y_1}{x_1} x; \qquad (1)$$

der hierzu konjugierte $$y = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x; \qquad (2)$$

die Tangente in (x_1, y_1) $$y = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x - \frac{b^2}{y_1}. \qquad (3)$$

Aus (3) und (2) folgt die Behauptung.

91. Die Längen konjugierter Halbmesser aus den Halbaxen der Hyperbel und dem Richtungskoeffizienten m des einen Halbmessers zu berechnen.

Auflösung. Ist a_1 die Länge des zwischen Asymptote und Hauptaxe gelegenen, b_1 die Länge des dazu konjugierten Halbmessers, und sind $m = \operatorname{tg}\alpha$, $m_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ die zugehörigen Richtungskoeffizienten, so ist

$$a_1 = r_\alpha = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon^2 \cos^2\alpha - 1}};$$

$$a_1^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2\alpha - 1} = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{b^2 - a^2 m^2}. \qquad (1)$$

$$b_1 = [r_{\alpha_1}] = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha_1}}; \quad (\S\ 79,\ 3\ \text{Erklärung})$$

$$b_1^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha_1} = -\frac{a^2 b^2 (1 + m_1^2)}{b^2 - a^2 m_1^2}; \left(mm_1 = \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Durch Erweiterung des letzten Bruches mit m^2 folgt

$$b_1^2 = \frac{a^4 m^2 + b^4}{b^2 - a^2 m^2}. \qquad (2)$$

Zusatz. Die Differenz der Quadrate über konjugierten Halbmessern ist konstant. $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$. Beweis aus (1) und (2).

92. Den spitzen Winkel ω zu bestimmen, den zwei konjugierte Durchmesser mit einander bilden.

Aufl. $$\operatorname{tg} \omega = \pm \frac{b^2 - a^2 m^2}{e^2 m}.$$

Das obere Vorzeichen gilt für ein positives, das untere für ein negatives m. (§ 90 Zus. 3 Anm.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zusätze.

1. Jedes Parallelogramm, dessen anstossende Seiten konjugierte Halbmesser sind, ist gleich dem Rechteck aus den Halbaxen.

Beweis. $J^2 = a_1^2\, b_1^2 \sin^2\omega = a_1^2\, b_1^2 \dfrac{tg^2\omega}{1 + tg^2\omega}$.

$$J^2 = \frac{a^2 b^2 (1+m^2)}{b^2 - a^2 m^2} \cdot \frac{a^4 m^2 + b^4}{b^2 - a^2 m_2} \cdot \frac{(b^2 - a^2 m^2)^2}{e^4 m^2 + (b^2 - a^2 m^2)^2}$$

$$= \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)(a^4 m^2 + b^4)}{(1 + m^2)(a^4 m^2 + b^4)} = a^2 b^2.$$

2. Parallelogramme, welche begrenzt werden von den Tangenten in den Endpunkten eines (reellen) Durchmessers und Parallelen durch die Endpunkte des konjugierten Durchmessers, sind einander gleich. (4 a b).
3. Parallelogramme, deren Seiten die Endpunkte konjugierter Durchmesser verbinden, sind einander gleich. (2 ab).

93. Die Gleichung der Hyperbel inbezug auf zwei konjugierte Durchmesser als Koordinatenaxen aufzustellen. Fig. 23.

Auflösung. Sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die Koordinaten eines Hyperbelpunktes (x, y) inbezug auf das System der konjugierten Durchmesser, so ist

$$x = \mathfrak{x} \cos\alpha + \mathfrak{y} \cos\alpha_1; \quad y = \mathfrak{x} \sin\alpha + \mathfrak{y} \sin\alpha_1. \qquad (1)$$

Zwischen den Koordinaten (x, y) des Hyperbelpunktes besteht die Gleichung

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2. \qquad (2)$$

Vermittelst (1) wird aus (2)

$$\mathfrak{x}^2(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha) + \mathfrak{y}^2(b^2\cos^2\alpha_1 - a^2\sin^2\alpha_1) + 2\mathfrak{x}.\mathfrak{y}(b^2\cos\alpha\cos\alpha_1 - a^2\sin\alpha\sin\alpha_1) = a^2 b^2.$$

Durch Einführung von $tg\alpha = m$, $tg\alpha_1 = m_1$ u. Division durch $a^2 b^2$ folgt:

$$\mathfrak{x}^2 \frac{b^2 - a^2 m^2}{a^2 b^2 (1 + m^2)} + \mathfrak{y}^2 \frac{b^2 - a^2 m_1^2}{a^2 b^2 (1 + m_1^2)} + 2\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} \frac{b^2 - a^2 m m_1}{a^2 b^2 \sqrt{(1 + m^2)(1 + m_1^2)}} = 1.$$

Mit Benutzung der Formeln

$$a_1^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{b^2 - a^2 m^2}, \quad b_1^2 = -\frac{a^2 b^2 (1 + m_1^2)}{b^2 - a^2 m_1^2}, \quad b^2 - a^2 m m_1 = 0$$

erhält man schliesslich

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a_1^2} - \frac{\mathfrak{y}^2}{b_1^2} = 1. \qquad (3)$$

Aufgaben.

1. Die von den Asymptoten begrenzten Räume, in denen die Hyperbelzweige liegen, werden durch die Hauptaxe und den reellen Durchmesser in je drei Felder geteilt; die Giltigkeit der Gleichungen (1) — und damit der Gl. (3) — für einen Hyperbelpunkt jedes dieser sechs Felder zu beweisen.
2. Dieselbe Aufgabe für $m < 0$. (§ 90 Zus. 3 Anm.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

94. Die Gleichungen der Sehnen aufzustellen, welche den Hyperbelpunkt (x_1, y_1) mit den Endpunkten der Hauptaxe verbinden. (Supplementarsehnen.)

Auflösung. $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 + a}(x - x_1)$; $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 - a}(x - x_1)$.

Das Produkt der Richtungskoeffizienten ist $\frac{y_1^2}{x_1^2 - a^2} = \frac{b^2}{a^2}$.

Folgerung. Durchmesser, welche Supplementarsehnen parallel sind, sind einander konjugiert.

Aufgabe. Eine Hyperbel und ihre Hauptaxe sind gegeben; zu einem gegebenen Durchmesser den konjugierten zu zeichnen.

95. Die Gleichung der Hyperbel inbezug auf ihre Asymptoten als Koordinatenaxen aufzustellen. Fig. 24.

Auflösung. Der untere Asymptotenhalbstrahl des rechten Hyperbelzweiges sei die positive $\mathfrak{x}$-Axe, der obere die positive $\mathfrak{y}$-Axe. Der Winkel zwischen jedem Asymptotenhalbstrahl und der Hauptaxe ist $\alpha = \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{b}{a}\right)$. Für die Koordinaten (x, y) eines Hyperbelpunktes erhält man

$$x = (\mathfrak{y} + \mathfrak{x})\cos\alpha = (\mathfrak{y} + \mathfrak{x}) \cdot \frac{a}{e}; \quad y = (\mathfrak{y} - \mathfrak{x})\sin\alpha = (\mathfrak{y} - \mathfrak{x})\frac{b}{e}. \quad (1)$$

Die Koordinaten (x, y) des Hyperbelpunktes genügen der Gleichung

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2. \quad (2)$$

Vermittelst (1) wird aus (2)

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \frac{e^2}{4}. \quad (3)$$

Aufgabe. Die Giltigkeit von (1) — und damit von (3) — für einen Hyperbelpunkt jedes der vier Felder zu zeigen, in welche die Hauptaxe den Raum zwischen den Asymptoten teilt.

Zusätze.

1. Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel ist $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \frac{a^2}{2}$.
2. Parallelogramme, welche entstehen, wenn man von Hyperbelpunkten Parallelen zu den Asymptoten zieht, sind einander gleich.

   Beweis. Sind $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ die Koordinaten eines Hyperbelpunktes im Asymptotensystem, so ist das zugehörige Parallelogramm

   $$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} \cdot \sin 2\alpha = 2\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{e^2}{2} \cdot \frac{a\,b}{e^2} = \frac{a\,b}{2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

96. Die zwischen der Hyperbel und den Asymptoten liegenden Abschnitte einer Sekante sind einander gleich.

Beweis. Der Abschnitt einer Sekante zwischen den Asymptoten sei $A_1 A_2$, die auf ihr abgeschnittene Hyperbelsehne $B_1 B_2$; C sei Mittelpunkt von $A_1 A_2$. Zwischen den Koordinaten (x, y) jedes Asymptotenpunktes besteht die Gleichung

$$\left(y - \frac{b}{a} x\right) \cdot \left(y + \frac{b}{a} x\right) = 0 \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0; \quad (1)$$

die Koordinaten (x, y) jedes Hyperbelpunktes genügen der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (2)$$

die Gleichung der Sekante sei $y = mx + q$. (3)

Sind x_1, x_2, ξ bezw. die Abscissen von A_1, A_2, C, so folgt aus (1) und (3) durch Beseitigung von y

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2 mq}{b^2 - a^2 m^2}; \quad (4)$$

sind x', x'', ξ' die Abscissen von B_1, B_2 und dem Sehnenmittelpunkte, so ergiebt sich aus (2) und (3)

$$\xi' = \frac{x' + x''}{2} = \frac{a^2 mq}{b^2 - a^2 m^2}. \quad (5)$$

Nach (4) und (5) ist $\xi = \xi'$, d. h. der Mittelpunkt C von $A_1 A_2$ ist zugleich Mittelpunkt von $B_1 B_2$. Demnach ist

$$A_1 C = A_2 C;$$
$$B_1 C = B_2 C;$$
$$\overline{A_1 B_1 = A_2 B_2}.$$

Zusatz. Der Abschnitt einer Tangente zwischen den Asymptoten wird durch den Berührungspunkt halbiert.

Aufgaben.

1. Die Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel sind gegeben; die Hyperbel zu konstruieren.
2. Eine Asymptote und drei Hyperbelpunkte sind gegeben; die andere Asymptote und die Hyperbel zu konstruieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Abschnitt V.

Die Kurven zweiten Grades.

97. Den geometrischen Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen der Kurve $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ zu finden.

Auflösung. Vorausgesetzt ist ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y), x-Axe horizontal. Ist $y = mx + q$ eine der parallelen Sehnen, und sind x_1, x_2 die Abscissen ihrer Endpunkte, so genügen die Koordinaten (x, y) ihres Mittelpunktes den Gleichungen

$$y = mx + q, \qquad (1) \qquad\qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (2)$$

m ist konstant, q veränderlich.

Aus (1) und der Gleichung der Kurve erhält man

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{(b + cm)\,q + d + em}{a + 2bm + cm^2}. \qquad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt durch Beseitigung von q

$$(a + bm)\,x + (b + cm)\,y + d + em = 0. \qquad (4)$$

Die Mitten paralleler Sehnen bilden also eine Gerade; man nennt sie Durchmesser.

Gleichung (4) lässt sich schreiben

$$ax + by + d + m\,(bx + cy + e) = 0. \qquad (5)$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden

$$ax + by + d = 0 \text{ und } bx + cy + e = 0 \qquad (6)$$

genügen der Gleichung (5) für jeden Wert von m, d. h. alle Durchmesser gehen durch den Schnittpunkt der beiden Geraden (6). Die Koordinaten dieses Schnittpunktes O sind

$$\xi = \frac{be - cd}{ac - b^2};\ \eta = \frac{bd - ae}{ac - b^2} = 0. \qquad (7)$$

1. Ist $ac - b^2 \gtrless 0$, so liegt O im Endlichen.

   Jeder durch die Kurve begrenzte Durchmesser wird in O halbiert.

   Beweis. Die Gerade, welche den von der Kurve begrenzten Durchmesser AB und die ihm parallelen Sehnen halbiert, sei L; AB und L gehen — wie bewiesen — durch O. Halbierte L den Durchmesser AB in einem anderen Punkte O_1, so hätten AB und L zwei gemeinsame Punkte O und O_1, fielen also zusammen. Dann könnte aber L die zu AB parallelen Sehnen nicht schneiden; daher ist O Mittelpunkt von AB.

   Da alle durch die Kurve begrenzten Durchmesser in O halbiert werden, so heisst O Mittelpunkt der Kurve.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Ist $ac - b^2 = 0$, so liegt O im Unendlichen; die Kurve hat keinen Mittelpunkt. Die Durchmesser sind alle einander parallel; ihr gemeinsamer Richtungskoeffizient ist nach (6) $-\frac{a}{b} = -\frac{b}{c}$.

98. Das graphische Bild der Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

zu finden, wenn $ac - b^2 \gtrless 0$, $a > 0$.

Auflösung. Die Kurve hat einen Mittelpunkt O; seine Koordinaten (ξ, η) genügen den Gleichungen

$$a\xi + b\eta + d = 0; \quad b\xi + c\eta + e = 0. \qquad (1)$$

Legt man parallel zu dem Koordinatensystem (x, y) ein neues $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ durch den Mittelpunkt O, so ist $x = \mathfrak{x} + \xi$, $y = \mathfrak{y} + \eta$. Die Gleichung, welche zwischen den Koordinaten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ jedes Punktes der Kurve $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ besteht, ist dann

$$a\mathfrak{x}^2 + 2b\mathfrak{x}\mathfrak{y} + c\mathfrak{y}^2 + (a\xi + b\eta + d)(2\mathfrak{x} + \xi) + (b\xi + c\eta + e)(2\mathfrak{y} + \eta)$$
$$+ d\xi + e\eta + f = 0.$$

Mit Berücksichtigung der identischen Gleichungen (1) erhält man

$$a\mathfrak{x}^2 + 2b\mathfrak{x}\mathfrak{y} + c\mathfrak{y}^2 + d\xi + e\eta + f = 0. \qquad (2)$$

Nach § 97 Gl. (7) ist

$$d\xi + e\eta + f = \frac{d(be - cd) + e(bd - ae) + f(ac - b^2)}{ac - b^2};$$

für den Zähler dieses Bruches soll das Zeichen Δ gesetzt werden.

Gleichung (2) wird somit

$$a\mathfrak{x}^2 + 2b\mathfrak{x}\mathfrak{y} + c\mathfrak{y}^2 + \frac{\Delta}{ac - b^2} = 0. \qquad (3)$$

Der Durchmesser $ax + by + d = 0$ halbiert die zur x-Axe parallelen Sehnen (§ 97 Gl. (5)); seine Gleichung im Systeme $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ist $a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} = 0$. Da die Axen der x und $\mathfrak{x}$ einander parallel sind, so halbiert der Durchmesser $a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} = 0$ die zur $\mathfrak{x}$-Axe parallelen Sehnen. Bezeichnet α den Winkel, den der obere Teil dieses Durchmessers mit der positiven Richtung der $\mathfrak{x}$-Axe bildet, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a}{b}, \quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Es soll nun ein neues Koordinatensystem eingeführt werden, dessen Abscissenaxe die bisherige $\mathfrak{x}$-Axe, dessen Ordinatenaxe der Durchmesser $a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} = 0$. Für $b < 0$ ist $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (Fig. 25a); für $b > 0$ ist $\alpha > \frac{\pi}{2}$ (Fig. 25b). Sind in diesem neuen Systeme X, Y die Koordinaten des Punktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, so ist in jedem Falle

$$\mathfrak{x} = X + Y\cos\alpha = X - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}Y; \quad \mathfrak{y} = Y\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}Y. \qquad (4)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vermittelst (4) ergiebt sich aus (3) die zwischen den Koordinaten (X, Y) eines Kurvenpunktes bestehende Gleichung:

$$X^2 + \frac{ac - b^2}{a^2 + b^2} Y^2 + \frac{\Delta}{a(ac - b^2)} = 0. \qquad (5)$$

Es sei nun

I. $ac - b^2 > 0$.

1. $\Delta = 0$. Gl. (5) wird $X^2 + \frac{ac - b^2}{a^2 + b^2} Y^2 = 0$.

Dieser Gleichung genügen nur die Koordinaten des Punktes $X = 0$, $Y = 0$.

2. $\Delta > 0$. $X^2 + \frac{ac - b^2}{a^2 + b^2} Y^2 = - \frac{\Delta}{a(ac - b^2)}$ hat kein graphisches Bild, da $a > 0$.

3. $\Delta < 0$. Setzt man $- \frac{\Delta}{a(ac - b^2)} = a_1^2$, $- \frac{\Delta(a^2 + b^2)}{a(ac - b^2)^2} = b_1^2$, so geht (5) über in $\frac{X^2}{a_1^2} + \frac{Y^2}{b_1^2} = 1$. Die Gleichung stellt eine Ellipse dar; die Koordinatenaxen (X, Y) sind ein Paar konjugierter Durchmesser.

II. $ac - b^2 < 0$.

1. $\Delta = 0$. Gl. (5) lautet

$$\left(X + \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2 + b^2}} \cdot Y\right) \cdot \left(X - \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2 + b^2}} \cdot Y\right) = 0.$$

Dies ist die Gleichung zweier Geraden, die durch den Anfangspunkt des Systemes (X, Y) gehen und mit der X-Axe gleiche Winkel einschliessen.

2. $\Delta > 0$. Setzt man $\frac{\Delta}{a(b^2 - ac)} = a_1^2$, $\frac{\Delta(a^2 + b^2)}{a(b^2 - ac)^2} = b_1^2$, so wird aus (5) $\frac{X^2}{a_1^2} - \frac{Y^2}{b_1^2} = 1$. Die Gleichung stellt eine Hyperbel dar; die X-Axe ist reeller Durchmesser, die Y-Axe der konjugierte Nebendurchmesser.

3. $\Delta < 0$. Für $- \frac{\Delta}{a(b^2 - ac)} = a_1^2$, $- \frac{\Delta(a^2 + b^2)}{a(b^2 - ac)^2} = b_1^2$ verwandelt sich (5) in $\frac{Y^8}{b_1^2} - \frac{X^2}{a_1^2} = 1$, die Gleichung einer Hyperbel; die Y-Axe ist reeller Durchmesser, die X-Axe der konjugierte Nebendurchmesser.

99. Das graphische Bild der Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

zu finden, wenn $ac - b^2 = 0$, $a > 0$.

Auflösung. Die Kurve hat keinen Mittelpunkt, die Durchmesser sind einander parallel; ihr gemeinsamer Richtungskoeffizient ist $- \frac{a}{b} = - \frac{b}{c}$. (§ 97).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die allgemeine Gleichung lässt sich schreiben

$$a\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}y^2+2\frac{ae-bd}{a}y+\frac{af-d^2}{a}=0. \quad (1)$$

Da im vorliegenden Falle $ac-b^2=0$, so folgt

$$a\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right)^2+2\frac{ae-bd}{a}y+\frac{af-d^2}{a}=0. \quad (2)$$

Es sei

I. $ae-bd=0$. ($\Delta=0$; s. Bemerkung!)

1. $af-d^2=0$. Die Gleichung $\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right)^2=0$ stellt zwei zusammenfallende Gerade dar.
2. $af-d^2=q^2>0$. Die Gleichung $\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right)^2+\frac{q^2}{a^2}=0$ hat kein graphisches Bild.
3. $af-d^2=-q^2<0$. Die Gleichung $\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right)^2-\frac{q^2}{a^2}=0$ lässt sich schreiben $\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}+\frac{q}{a}\right)\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}-\frac{q}{a}\right)=0$. Dies ist die Gleichung zweier parallelen Geraden vom Richtungskoeffizienten $-\frac{a}{b}$.

II. $ae-bd \gtrless 0$. ($\Delta<0$; s. Bemerkung!)

Die Gerade $x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}=0$ ist ein Durchmesser der Kurve (1) (§ 97 Gl. (6)). Den Schnittpunkt (x_1, y_1) dieses Durchmessers mit der Kurve wähle man zum Anfangspunkte eines Koordinatensystems $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, das dem ursprünglichen (rechtwinkligen) parallel ist. Dann ist $x=\mathfrak{x}+x_1$, $y=\mathfrak{y}+y_1$, wo

$$x_1+\frac{b}{a}y_1+\frac{d}{a}\equiv 0;\quad 2\frac{ae-bd}{a}y_1+\frac{af-d^2}{a}\equiv 0. \quad (3)$$

Für die Koordinaten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eines beliebigen Kurvenpunktes folgt aus (2) vermittelst (3)

$$a\left(\mathfrak{x}+\frac{b}{a}\mathfrak{y}\right)^2+2\frac{ae-bd}{a}\mathfrak{y}=0. \quad (4)$$

Der Durchmesser $x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}=0$ halbiert nach § 97 Gl. (5) die zur x-Axe paralellen Sehnen; seine Gleichung im Systeme $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ist $\mathfrak{x}+\frac{b}{a}\mathfrak{y}=0$. Da die Axen der x und $\mathfrak{x}$ einander parallel sind, so halbiert $\mathfrak{x}+\frac{b}{a}\mathfrak{y}=0$ die zur $\mathfrak{x}$-Axe parallelen Sehnen. Bezeichnet α den Winkel, den der obere Teil dieses Durchmessers mit der positiven Richtung der $\mathfrak{x}$-Axe bildet, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{a}{b},\quad \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man mache nun diesen Durchmesser zur X-Axe, die $\mathfrak{x}$-Axe zur Y-Axe eines neuen Koordinatensystems; für $b \lesseqgtr 0$ ist $\alpha \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$. (Figur 26 a, b.) Für die Koordinaten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eines beliebigen Kurvenpunktes erhält man in jedem Falle

$$\mathfrak{x} = Y + X\cos\alpha = Y - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}X; \quad \mathfrak{y} = X\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}X. \quad (5)$$

Vermittelst (5) wird aus (4)

$$Y^2 = -2\frac{ae-bd}{a\sqrt{a^2+b^2}}X. \quad (6)$$

Die Gerade $X = 0$ — die Y-Axe — hat nur den Punkt $X = 0$ $Y = 0$ mit der Kurve (6) gemeinsam; die Y-Axe ist daher Tangente dieser Kurve im Anfangspunkte. Demnach stellt (6) eine Parabel dar, bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen X-Axe ein Durchmesser, dessen Y-Axe die Tangente im Endpunkte dieses Durchmessers ist. (§ 59.) Die Parabel ist nach der positiven oder negativen Richtung der X-Axe hin offen, je nachdem $ae - bd \lesseqgtr 0$.

Bemerkung. Für $ac - b^2 = 0$ ist $\Delta = 2bde - cd^2 - ae^2$, demnach $a\Delta = 2abde - acd^2 - a^2e^2 = 2abde - b^2d^2 - a^2e^2 = -(ae-bd)^2$. Da $a > 0$, so kann $\Delta = 0$ für $ae - bd = 0$, $\Delta < 0$ für $ae - bd \lesseqgtr 0$ gesetzt werden.

100. Das graphische Bild der Gleichung $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ zu finden, wenn $a = 0$, $b \gtreqless 0$, $c > 0$. (Vergl. § 98.)

Auflösung. Da $ac - b^2 < 0$, so hat die Kurve einen Mittelpunkt O; seine Koordinaten (ξ, η) genügen den Gleichungen

$$b\eta + d \equiv 0; \quad b\xi + c\eta + e \equiv 0. \quad (1)$$

Legt man parallel zu dem Koordinatensystem (x, y) ein neues $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ durch den Mittelpunkt O, so ist $x = \mathfrak{x} + \xi$, $y = \mathfrak{y} + \eta$. Die Gleichung, welche zwischen den Koordinaten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ jedes Punktes der Kurve $2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ besteht, ist dann

$$2b\mathfrak{x}\mathfrak{y} + c\mathfrak{y}^2 + (b\eta + d)(2\mathfrak{x} + \xi) + (b\xi + c\eta + e)(2\mathfrak{y} + \eta) + d\xi + e\eta + f = 0.$$

Mit Berücksichtigung der identischen Gleichungen (1) erhält man

$$2b\mathfrak{x}\mathfrak{y} + c\mathfrak{y}^2 + d\xi + e\eta + f = 0. \quad (2)$$

Nach § 97 Gl. (7) ist $d\xi + e\eta + f = \frac{2bde - cd^2 - fb^2}{-b^2} = -\frac{\Delta}{b^2}$.

Gleichung (2) wird somit

$$\mathfrak{y}(2b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y}) = \frac{\Delta}{b^2}. \quad (3)$$

Wählt man die positive $\mathfrak{x}$-Axe als positive X-Axe, den oberen Teil des Durchmessers $2b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} = 0$ als positive Y-Axe und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bezeichnet den Axenwinkel mit α (Fig. 25 a, b), so ist $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2b}{c}$,

$$\sin\alpha = \pm \frac{2b}{\sqrt{4b^2+c^2}}, \quad \cos\alpha = \mp \frac{c}{\sqrt{4b^2+c^2}};$$

$$\mathfrak{x} = X + Y\cos\alpha = X \mp \frac{c}{\sqrt{4b^2+c^2}}Y; \quad \mathfrak{y} = Y\sin\alpha = \pm \frac{2b}{\sqrt{4b^2+c^2}}Y. \quad (4)$$

Die oberen (unteren) Vorzeichen gelten für ein positives (negatives) b.

Für jeden Kurvenpunkt (X, Y) erhält man aus (4) und (3)

$$X \,.\, Y = \pm \frac{\Delta\sqrt{4b^2+c^2}}{4b^4}. \quad (5)$$

1. Ist $\Delta = 0$, so ist (5) die Gleichung der zwei Geraden $X = 0$, $Y = 0$, der neuen Koordinatenaxen.

3. Ist $\Delta \gtrless 0$, so stellt (5) eine Hyperbel dar; die Koordinatenaxen (X, Y) sind die Asymptoten. (§ 95).

Bemerkung. Der Fall $a = 0$, $c < 0$ wird durch Multiplikation der allgemeinen Gleichung mit -1 auf den Fall $a = 0$, $c > 0$ zurückgeführt.

101. Das graphische Bild der Gleichung $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ zu finden, wenn $a = 0$, $b = 0$, $c \gtrless 0$.

Auflösung. In diesem Falle ist $ac - b^2 = 0$. Die allgemeine Gleichung wird

$$cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

oder $$c\left(y + \frac{e}{c}\right)^2 + 2dx + \frac{cf - e^2}{c} = 0. \quad (1)$$

Es sei

I. $d = 0$. ($\Delta = 0$; s. Bemerkung 1!)

1. $cf - e^2 = 0$; $\left(y + \frac{e}{c}\right)^2 = 0$ stellt zwei zusammenfallende Gerade dar.

2. $cf - e^2 = q^2 > 0$; $\left(y + \frac{e}{c}\right)^2 + \frac{q^2}{c^2} = 0$ hat kein graphisches Bild.

3. $cf - e^2 = -q^2 < 0$; $\left(y + \frac{e}{c}\right)^2 - \frac{q^2}{c^2} = 0$ lässt sich schreiben

$$\left(y + \frac{e}{c} + \frac{q}{c}\right) \cdot \left(y + \frac{e}{c} - \frac{q}{c}\right) = 0.$$

Dies ist die Gleichung zweier der x-Axe parallelen Geraden.

II. $d \gtrless 0$. $\left(\Delta \gtrless 0;\ \text{s. Bemerkung 1!}\right)$

Wählt man den Schnittpunkt (x_1, y_1) der Geraden $y + \frac{e}{c} = 0$ mit der Kurve (1) zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, das dem alten parallel ist, so ergiebt sich $x = \mathfrak{x} + x_1$, $y = \mathfrak{y} + y_1$, wo

$$y_1 + \frac{e}{c} = 0; \quad 2\,d\,x_1 + \frac{cf - e^2}{c} = 0. \qquad (2)$$

Aus Gl. (1) wird vermittelst (2)

$$\mathfrak{y}^2 = -2\,\frac{d}{c}\,\mathfrak{x}, \qquad (3)$$

die Scheitelgleichung einer Parabel.

Bemerkungen.

1. Für $a = 0$, $b = 0$ wird $\Delta = -cd^2$. Statt der Voraussetzung $d = 0$ kann demnach $\Delta = 0$ gesetzt werden, da $c \gtrless 0$; statt $d \gtrless 0$ kann stehen $\Delta \gtrless 0$.
2. Der Fall $a < 0$ kann durch Multiplikation der allgemeinen Gleichung mit -1 auf den Fall $a > 0$ zurückgeführt werden.
3. Für $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ ist die allgemeine Gleichung nur noch ersten Grades.

102. Zusammenstellung der Ergebnisse.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades

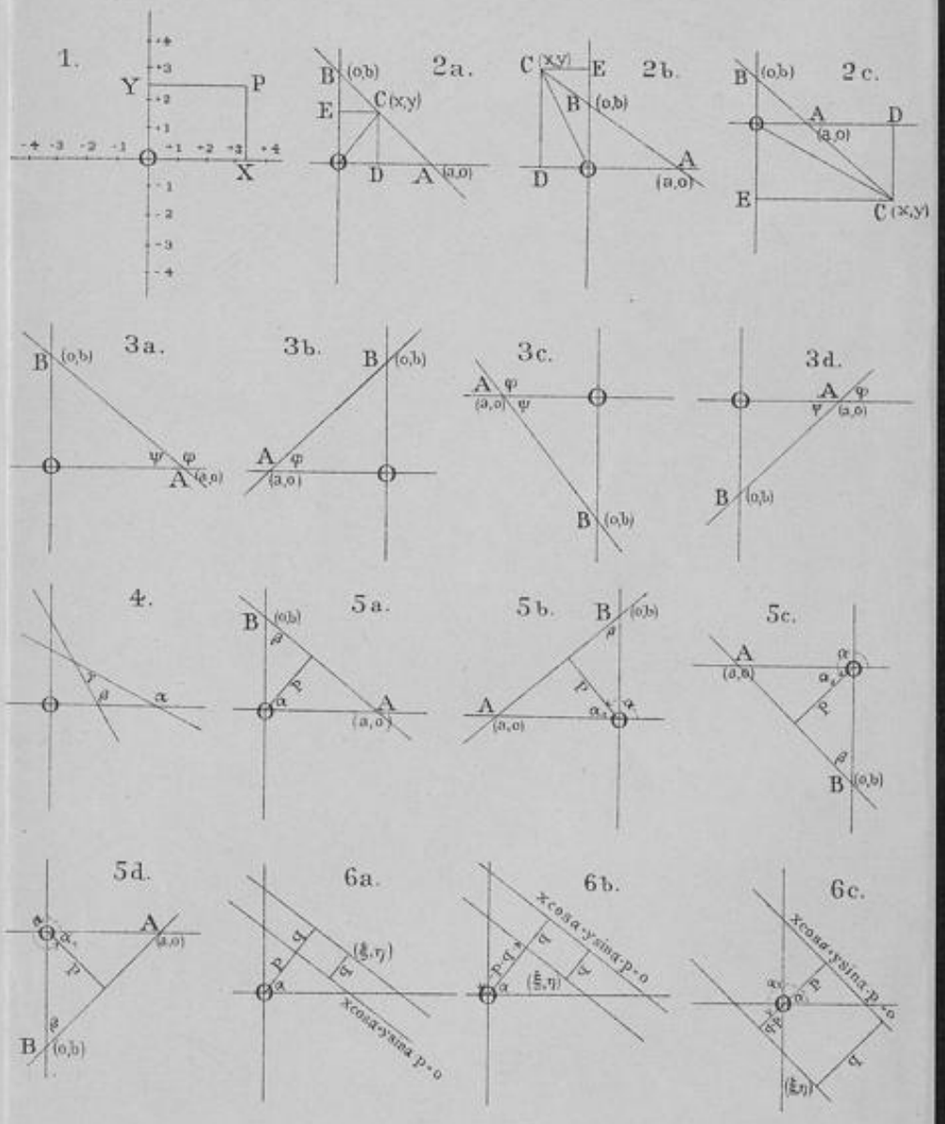
$$ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + 2\,dx + 2\,ey + f = 0$$

stellt dar	wenn	
1. kein graphisches Bild,	$ac - b^2 > 0$, $\Delta > 0$, $a > 0$.	§ 98 I, 2.
	$ac - b^2 = 0$, $\Delta = 0$, $a > 0$, $af - d^2 > 0$.	§ 99 I, 2.
	$ac - b^2 = 0$, $\Delta = 0$, $a = 0$, $c \gtrless 0$, $cf - e^2 > 0$.	§ 101 I, 2.
2. einen Punkt,	$ac - b^2 > 0$, $\Delta = 0$.	§ 98 I, 1.
3. zwei sich schneidende Gerade,	$ac - b^2 < 0$, $\Delta = 0$, $a \geqq 0$.	§ 98 II, 1. § 100, 1.
4. zwei parallele Gerade,	$ac - b^2 = 0$, $\Delta = 0$, $a > 0$, $af - d^2 < 0$.	§ 99 I, 3.
	$ac - b^2 = 0$, $\Delta = 0$, $a = 0$, $c \gtrless 0$, $cf - e^2 < 0$.	§ 101 I, 3.
5. zwei zusammenfallende Gerade,	$ac - b^2 = 0$, $\Delta = 0$, $a > 0$, $af - d^2 = 0$.	§ 99 I, 1.
	$ac - b^2 = 0$, $\Delta = 0$, $a = 0$, $c \gtrless 0$, $cf - e^2 = 0$.	§ 101 I, 1.
6. eine Ellipse,	$ac - b^2 > 0$, $\Delta < 0$, $a > 0$.	§ 98 I, 3.
7. eine Parabel,	$ac - b^2 = 0$, $\Delta < 0$, $a > 0$.	§ 99 II.
	$ac - b^2 = 0$, $\Delta \gtrless 0$, $a = 0$.	§ 101 II.
8. eine Hyperbel,	$ac - b^2 < 0$, $\Delta \gtrless 0$, $a > 0$.	§ 98 II 2, 3.
	$ac - b^2 < 0$, $\Delta \gtrless 0$, $a = 0$, $b \gtrless 0$.	§ 100, 2.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I.



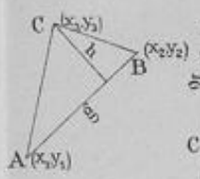
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

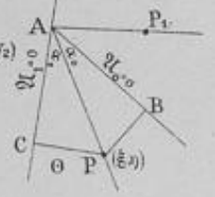
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

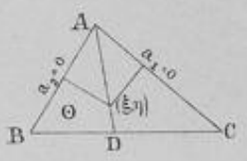
7.



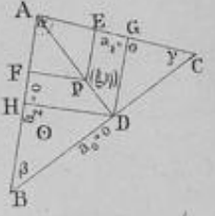
8.



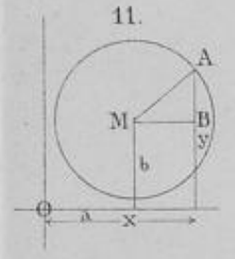
9.



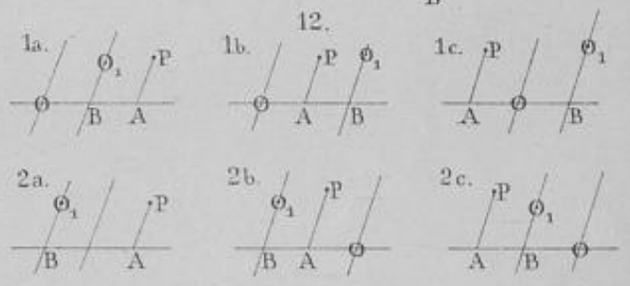
10.



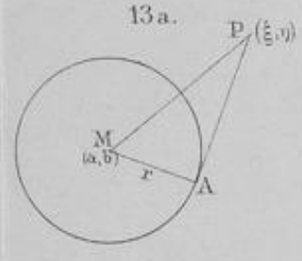
11.



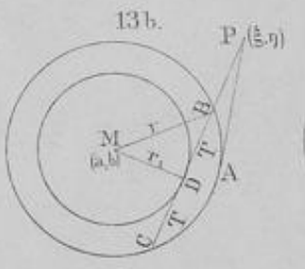
12.



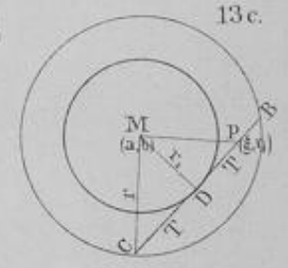
13a.



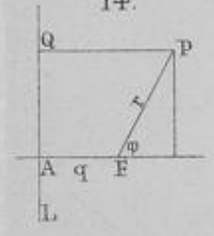
13b.



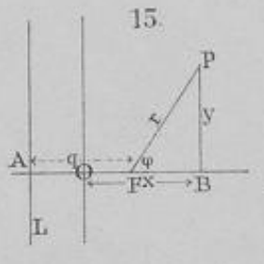
13c.



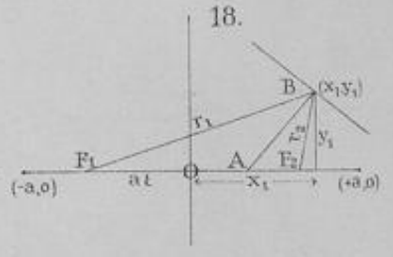
14.



15.



18.



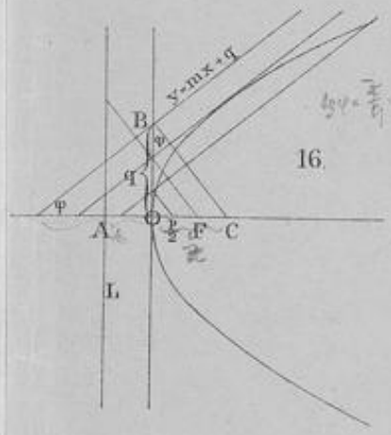
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

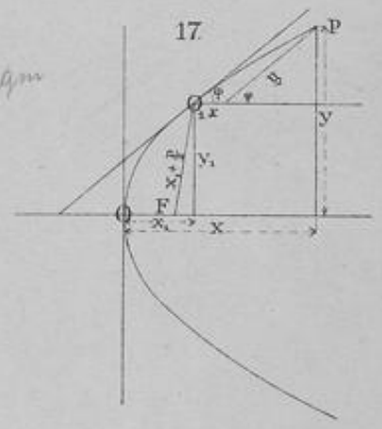
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

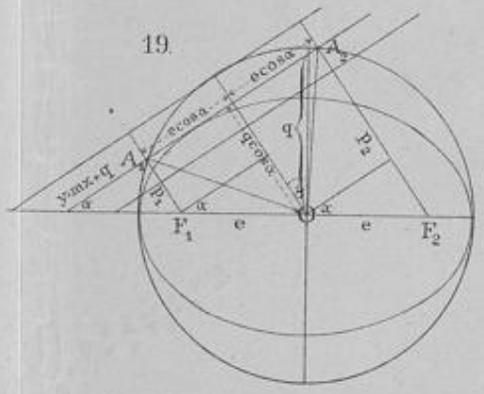
III.



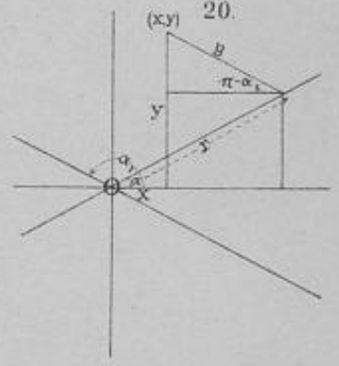
16.



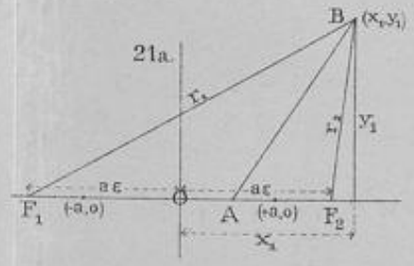
17.



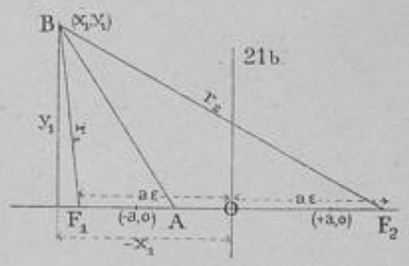
19.



20.



21a.



21b.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

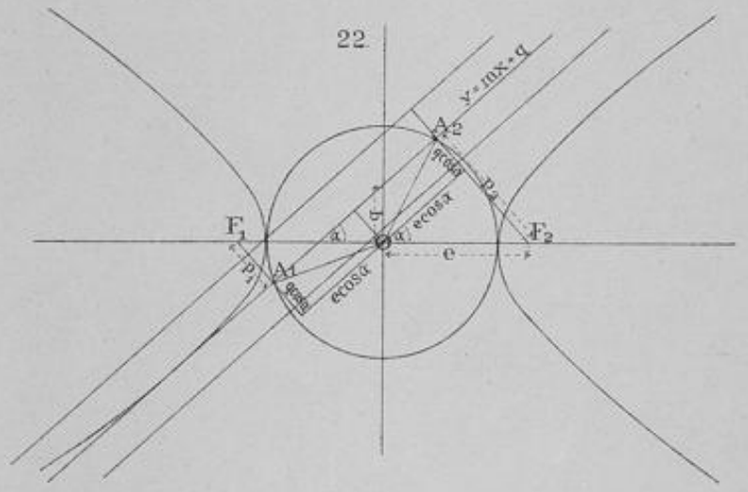
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

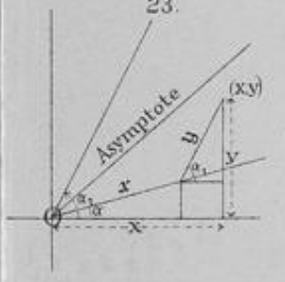
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IV.

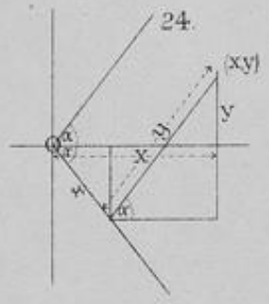
22.



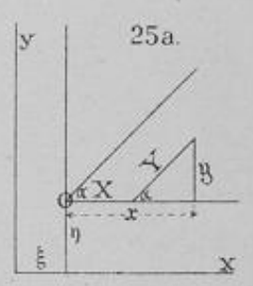
23.



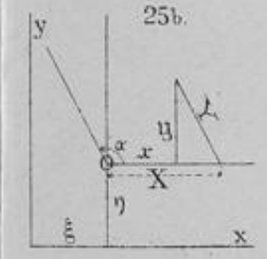
24.



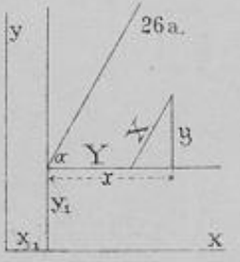
25a.



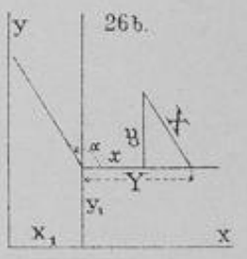
25b.



26a.



26b.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf