Die Bestimmung der Größe und Gestalt der Erde hat in neuerer Zeit noch an Interesse gewonnen, weil die Maaßeinheit, das Meter, von der Erde entnommen ist. Es soll nämlich das Meter gleich $\frac{1}{40 \text{ Mill.}}$ eines Meridians oder gleich $\frac{1}{10 \text{ Mill.}}$ des Erdmeridianquadranten sein. Eine neue Berechnung der bisher angestellten Gradmessungen, womit zugleich eine sorgfältige Vergleichung der zur Messung verwandten Normalmaaße verbunden war, hat ergeben, daß die zur Zeit der französischen Revolution bestimmte Länge des Meters nicht ganz genau ist. In Einheiten dieses Normalmaaßstabes würde die Länge des Erdmeridianquadranten nicht, wie erforderlich, gleich 10000000, sondern gleich 10001888 sein. Das Normalmaaß ist also um beinahe $\frac{2}{10}$ Millimeter zu klein. Trotzdem hat man auch in Deutschland dieses an und für sich fehlerhafte Normalmaaß angenommen, und zwar mit Recht, denn der Werth des Metermaaßes liegt nicht in seinem einfachen Verhältniß zum Erdmeridianquadranten, sondern darin, daß in dem darauf fußenden Maaß- und Gewichtssystem die Einheiten für Flächenmaaß, Cubikmaaß, Hohlmaaß und Gewicht in sehr einfacher Weise mit dem Meter zusammenhangen. Auch war dasselbe, mit dem angegebenen Fehler behaftet, schon in anderen Staaten eingeführt, und es wurde somit durch den Anschluß Deutschlands zur Einführung eines internationalen Maaßes ein neuer, großer Schritt gemacht. Was hätte es schließlich auch genutzt, wenn sich alle Staaten, in denen das Meter schon eingeführt war, dazu entschlossen hätten, das Normalmaaß in der angegebenen Weise zu vergrößern? Neue Gradmessungen würden bei der stets fortschreitenden Vervollkommnung der Meßinstrumente und Beobachtungsmethoden ohne Zweifel wieder neue Fehler aufdecken, und man würde dann entweder doch ein fehlerhaftes Maaß beibehalten müssen, oder man müßte dasselbe von Zeit zu Zeit verbessern und damit das ganze Maaß- und Gewichtssystem, welches mit demselben innig zusammenhängt.

III. Bestimmung der Entfernung des Mondes, der Sonne und der Planeten.

Die Bestimmung von Entfernungen der Himmelskörper kann selbstverständlich nur durch Berechnung geschehen. Es läßt sich jedoch bei diesen Berechnungen kein

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dreieck zu Grunde legen, dessen Basis auf der Erde liegt, weil eine auch nur annähernd gerade Linie nur sehr kurz sein könnte, und darum bei den großen Entfernungen die Scheitelseiten einen zu kleinen Winkel einschließen würden. Ein nur sehr kleiner Fehler in der Bestimmung der Winkel würde schon einen großen Einfluß auf die gesuchte Entfernung ausüben. Als Basis für das Dreieck aber die gerade Verbindungslinie (Sehne) zwischen zwei sehr entfernten Punkten zu nehmen ist auch nicht möglich, selbst wenn sich ihre Länge genau bestimmen ließe, weil die Winkel der Gesichtslinien zu dem Sterne gegen jene Verbindungslinie sich nicht finden lassen. Man muß deshalb eine andere Figur, das Viereck, zu Grunde legen.

Ein Stern stehe in S. (Fig. 3). Sind A und B zwei Orte, die wir der Einfachheit wegen auf demselben Meridiane, nördlich und südlich vom Aequator MN annehmen, und ist O der Mittelpunkt der Erde, so gibt es bei jeder Rotation der Erde um ihre Axe einen Zeitpunkt, in welchem die durch A, O und B gelegte Ebene (Meridianebene) in ihrer Erweiterung durch S geht. Es ist dies der Augenblick, in welchem der Stern bei seiner täglichen scheinbaren Bewegung um die Erde seinen höchsten Stand erreicht (culminirt). Es bilden dann die Punkte S, A, O, B ein ebenes Viereck.

Bei der großen Entfernung der Himmelskörper im Verhältniß zum Radius der Erde ist es erlaubt, bei der Berechnung dieses Vierecks die Erde als eine vollkommene Kugel zu betrachten. Es sind dann AO und BO als Erdradien bekannte Linien; $\sphericalangle$ AON und BON sind die geographischen Breiten von A und B, also $\sphericalangle$ AOB ist bekannt als Summe der geographischen Breiten von A und B. Die Winkel ZAS und Z'BS sind die Winkel, welche die Gesichtslinien zum Sterne mit den Linien zum Zenith bilden, und welche sich leicht bestimmen lassen. Von dem Vierecke sind also 2 aneinander stoßende Seiten und alle Winkel gegeben, es ist also als bekannt zu betrachten.

Setzt man $OS = m$, die beiden Erdradien gleich r, $\sphericalangle ASO = \theta$, $\sphericalangle BSO = \eta$, $\sphericalangle ZAS = \zeta$, $\sphericalangle Z'BS = \zeta'$, $\sphericalangle AON = \varphi$, $\sphericalangle BON = \varphi'$ (Geographische Breiten von A und B), so daß also $\sphericalangle AOB = \varphi + \varphi'$, so ist nach dem Sinussatze:

$$\text{aus } \triangle AOS \quad m = \frac{r \sin \zeta}{\sin \theta}$$

$$\text{aus } \triangle BOS \quad m = \frac{r \sin \zeta'}{\sin \eta} \quad \text{also}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{r \sin \zeta}{\sin \theta} = \frac{r \sin \zeta'}{\sin \eta}$$

$$\frac{\sin \eta}{\sin \theta} = \frac{\sin \zeta'}{\sin \zeta}$$

$$\frac{\sin \eta + \sin \theta}{\sin \eta - \sin \theta} = \frac{\sin \zeta' + \sin \zeta}{\sin \zeta' - \sin \zeta}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\eta + \theta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\eta - \theta)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\zeta' + \zeta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\zeta' - \zeta)}$$

In dieser Formel ist die rechte Seite, und auf der linken Seite $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\eta + \theta)$ bekannt. Denn

$$(\eta + \theta) = 360^0 - (180^0 - \zeta) - (180^0 - \zeta') - (\varphi + \varphi')$$
$$= (\zeta + \zeta') - (\varphi + \varphi')$$

unbekannt ist also allein $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\eta - \theta)$. Löst man die Gleichung nach dieser Größe auf, so erhält man

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\eta - \theta) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\zeta' - \zeta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\zeta' + \zeta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\eta + \theta)$$

Man findet also $\frac{1}{2} (\eta - \theta)$ und, da auch $\frac{1}{2} (\eta + \theta)$ bekannt, η und θ selbst. Aus einer der beiden Gleichungen für m findet man diese Größe selbst, d. h. die Entfernung des Sternes vom Mittelpunkte der Erde.

Nach dieser Methode wurde 1751 von La Caille am Cap der guten Hoffnung und von Lalande in Berlin die Entfernung des Mondes bestimmt. Bei ihren Messungen hatte der Winkel $(\eta + \theta)$ eine Größe von ungefähr 58 Minuten.

Die Formel $m = \frac{r \sin \zeta}{\sin \theta}$, in welcher θ immer ein sehr kleiner Winkel ist,[1]) ergibt, daß bei gleichbleibenden ζ die Entfernung des Himmelskörpers umgekehrt proportional ist der Größe dieses Winkels. Bei kleinen Winkeln kann man nämlich die Sinus als den Bogen proportional annehmen. Es kommt also darauf an, diesen Winkel sehr genau zu bestimmen. Wäre z. B. dieser Winkel gleich 8″, so würde ein Fehler von 1″ schon einen Fehler in m verursachen, der $\frac{1}{8}$ des Ganzen betrüge.

1) Derselbe beträgt im günstigsten Falle beim Monde circa 1°, bei den Planeten immer nur wenige Sekunden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vom Mittelpunkt der Erde aus sieht man den Stern in F, von A aus in G auf das Himmelsgewölbe projicirt. Der Stern erscheint also um den Bogen FG verschoben, und es wird deshalb dieser Bogen FG, sowie der zugehörige Winkel FSG = θ die Parallaxe des Sternes genannt.[1])

Die Entfernung eines Sternes ist also bei gleichbleibender Zenithdistanz ζ umgekehrt proportional seiner Parallaxe.

Aendert der Stern bei gleichbleibender Entfernung vom Mittelpunkte der Erde seine Zenithdistanz, so ändert sich seine Parallaxe θ. Denn

$$\sin \theta = \frac{r}{m} \sin \zeta$$

d. h. bei constanten r und m ist die Parallaxe dem Sinus der Zenithdistanz proportional. Sie ist also am größten, wenn $\zeta = 90^0$ ist, d. h. wenn der Stern im Horizonte steht. Die Parallaxe führt dann den Namen Horizontalparallaxe. Ist die Horizontalparallaxe θ eines Sternes bekannt, so ist seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde

$$m = \frac{r}{\sin \theta}$$

Die Bestimmung der Horizontalparallaxe eines Himmelskörpers, auch wohl Parallaxe schlechthin genannt, ist also gleichbedeutend mit der Bestimmung seiner Entfernung von der Erde.

Die Entfernung eines Himmelskörpers von der Erde läßt sich auch bestimmen aus Beobachtungen ganz anderer Art, als im Vorgehenden vorausgesetzt wurden. Als Beispiel einer solchen Bestimmung möge dienen die folgende Herleitung der Entfernung des Mondes aus seiner Umlaufszeit, dem Fallraume eines Körpers an der Oberfläche der Erde in einer Sekunde und der bekannten Größe des Erdradius.

Ist (Fig. 4) E die Erde, MM′ der Theil der als kreisförmig angenommenen Mondbahn, den der Mond in einer Sekunde beschreibt, und den wir seiner Kleinheit wegen als geradlinig annehmen können, so würde sich der Mond, wenn er, in M angekommen, der Anziehung der Erde nicht unterworfen wäre, in der Richtung der Tangente nach A bewegen. In dieser Zeit würde ihn die

1) Der Bogen FG erscheint, von S oder von A resp. O aus gesehen, unter demselben Winkel, weil die Entfernung von O bis S verglichen mit der von S nach FG als verschwindend klein zu betrachten ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Erde, wenn er in M stille gestanden hätte, von M nach B gezogen haben. Da weder das erstere noch das Letztere allein, vielmehr beides gleichzeitig der Fall ist, so muß er sich in der Richtung der Diagonale des Rechteckes AMBM' nach M' bewegt haben, und da wir die Mondbahn als kreisförmig vorausgesetzt haben, so muß $M'E = ME = R$ dem Radius der Mondbahn sein. Da $AM \perp ME$, also auch $M'B \perp ME$, so ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze:

$$M'E^2 = M'B^2 + BE^2$$
$$= MA^2 + (ME - MB)^2$$
$$R^2 = MA^2 + (R - MB)^2$$

MA ist der Weg, den der Mond in einer Sekunde zurücklegen würde, wenn die Anziehung der Erde aufhörte. Seine Geschwindigkeit würde dann gleich Derjenigen sein, welche er in diesem Augenblicke in seiner Bahn haben würde. Nun haben wir die Bahn als eine kreisförmige vorausgesetzt, welche der Mond also nach den Kepplerschen Gesetzen mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen muß. Da er mit dieser Geschwindigkeit einen vollständigen Kreis um die Erde in 27,321661 Tagen (siderische Umlaufszeit) beschreibt, also einen Weg von $2R\pi$ in T Sekunden[1]) zurücklegt, so findet man seine Geschwindigkeit c aus der Gleichung:

$$c \,.\, T = 2R\pi$$

$$c = \frac{2R\pi}{T}$$

Da die Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Körpers gleich seinem Wege in einer Sekunde ist, so ist $c = AM$, also

$$AM = \frac{2R\pi}{T}$$

MB ist der Weg, den der Mond in Folge der Anziehung der Erde in einer Sekunde durchläuft. Ein Körper durchläuft an der Oberfläche der Erde in einer Sekunde einen Weg von 4,89005 Meter. Nun aber nimmt die Anziehungskraft der Erde, die wir uns nach den Gesetzen der Mechanik in ihrem Mittelpunkte vereinigt denken müssen, ab mit dem Quadrate der Entfernung. Ist sie an der Oberfläche der Erde (d. h. in einer Entfernung vom Mittelpunkte, welche dem Erdradius r gleich ist)

1) $T = 27{,}321661\ 24 \,.\, 60.\ 60 = 2360591.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gleich 1, so ist in der Entfernung des Mondes, welche wir gleich R gesetzt, die Anziehungskraft der Erde gleich $\left(\frac{r}{R}\right)^2$, und da die Fallräume in derselben Zeit den anziehenden Kräften proportional sind, so ist also die Strecke, um welche der Mond in einer Sekunde dem Mittelpunkte der Erde näher kommt,

$$MB = 4{,}890045 \frac{r^2}{R^2} \text{ Meter.}$$

Die obige Gleichung wird nun, wenn noch 4,890045 = a gesetzt wird,

$$R^2 = \left(\frac{2 R \pi}{T}\right)^2 + \left(R - a \frac{r^2}{R^2}\right)^2$$

$$= \frac{4 R^2 \pi^2}{T^2} + R^2 - \frac{2 a r^2}{R} + a^2 \frac{r^4}{R^4}$$

Da $\frac{R}{r}$ aber gleich $\frac{1}{60}$, so ist $\frac{r^4}{R^4} = \frac{1}{12960000}$.

Das letzte Glied ist darum gegen die anderen verschwindend klein und kann vernachlässigt werden. Wir finden dann

$$0 = \frac{4 R^2 \pi^2}{T^2} - \frac{2 a r^2}{R}$$

$$R^3 = \frac{2 a r^2 T^2}{4 \pi^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{a r^2 T^2}{2 \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{a}{2} \left(\frac{r T}{\pi}\right)^2}$$

Will man R in Einheiten des Erdradius r berechnen, so ist in der obigen Formel a, welches in Metern ausgedrückt ist, auch in Einheiten des Erdradius auszudrücken, d. h. für $\frac{a}{2}$ ist $\frac{2{,}445023}{6377398}$ einzusetzen.

Bezeichnet man diese Zahl durch b, so ist

$$R = \sqrt[3]{b \left(\frac{T}{\pi}\right)^2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\log 2{,}445003 = 0{,}3882830$$
$$\log 6377398 = 6{,}8046436$$
$$\log b = 0{,}5836394 - 7$$
$$\log \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 = 11{,}7517418$$
$$\log R^3 = 5{,}3353812$$
$$\log R = 1{,}7784604 = \log 60{,}04.$$

$$\log T = 6{,}3730208$$
$$\log \frac{1}{\pi} = 0{,}5028501 - 1$$
$$\log \frac{T}{\pi} = 5{,}8758709$$

Die Entfernung des Mondes vom Mittelpunkte der Erde ist hiernach gleich dem 60,0fachen des Erdradius, während die richtige Horizontalparallaxe die mittlere Entfernung desselben zu 60,3 Erdradien ergibt. Der Unterschied wird zum großen Theil durch die fehlerhafte Annahme einer kreisförmigen Mondbahn bewirkt.

Zur Bestimmung der Entfernung der Planeten von der Sonne (von der Erde haben sie eine in weiten Gränzen veränderliche Entfernung) reicht es hin, die Entfernung eines einzigen Planeten von der Sonne zu kennen. Denn nach dem dritten Kepplerschen Gesetze verhalten sich die dritten Potenzen dieser Entfernungen [1]) wie die Quadrate der Umlaufszeiten um die Sonne. Die letzteren sind aber, da schon aus dem Alterthum Beobachtungen von Planetenörtern vorliegen, sehr genau bekannt.

Benutzt man nun z. B. die Entfernung der Erde von der Sonne, den Radius der Erdbahn, als Maaßeinheit, so lassen sich nach obigem Gesetze die Entfernungen der übrigen Planeten in Einheiten dieses Radius ausdrücken, sobald ihre Umlaufszeiten bekannt sind.

Zur Bestimmung der Umlaufszeit ist es jedoch nicht nöthig, einen vollständigen Umlauf des Planeten um die Sonne zu beobachten, (der Planet Neptun hat seit seiner Entdeckung im Jahre 1846 erst $\frac{1}{6}$ seiner Bahn durchlaufen) es reicht vielmehr hin, die Zeit zu kennen, in der er einen beliebigen, aber in Graden bekannten Bogen seiner Bahn beschreibt. Bezeichnet T die Zahl von Tagen, in welchen der Planet einen Bogen von α^0 zurücklegt, so ist seine Umlaufszeit in Tagen $U = \frac{360}{\alpha} T$.

1) Wegen der elliptischen Gestalt der Planetenbahnen sind diese nicht immer dieselben; unter „Entfernung" wird hier die „mittlere Entfernung" verstanden. In der Regel werden im Folgenden die Planetenbahnen als kreisförmige betrachtet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In Einheiten des Radius der Erdbahn läßt sich auch zu jeder Zeit die Entfernung eines Planeten von der Erde bestimmen. Ist z. B. (Fig. 5) S die Sonne, E die Erde, M der Planet Mars, so ist ME, die Entfernung des Planeten von der Erde, bekannt, wenn bei bekannten MS und ES[1]) noch $\sphericalangle$ MSE gegeben. Es sei T_0 die Zeit zu welcher Sonne, Erde und Mars (in S, E_0 und M_0) in einer geraden Linie standen. Sind seit jener Zeit T Tage verflossen und sind ε und μ die Winkel, welche Erde und Mars in ihrer Bahn täglich beschreiben, so ist $\sphericalangle E_0 SE = \varepsilon T$ und $M_0 SM = \mu T$, also $\sphericalangle MSE = T(\varepsilon - \mu)$.

Die Zeit T_0 läßt sich aber durch Beobachtung bestimmen. Es ist die Zeit, wo der Planet Mars genau um Mitternacht culminirt.

Ist nun irgend eine der Seiten des Dreiecks MSE in einem anderen Maaße, z. B. in Kilometern, bekannt, so sind damit auch die anderen Seiten in demselben Maaße gegeben.

Es gereicht somit zur Bestimmung aller Entfernungen im Sonnensystem hin, die Entfernung eines einzigen Planeten von der Erde zu einer beliebigen Zeit zu kennen.

Um eine solche Entfernung zu bestimmen, wurden 1751 von La Caille am Cap der guten Hoffnung und von Wargentin in Stockholm die Zenithdistanzen des Mars bei seiner Culmination beobachtet. Aus den im Anfange dieses Abschnittes (Seite 10) entwickelten Formeln ergab sich denn seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde.

Eine derartige Bestimmung ist jedoch nicht geeignet, ein genaues Resultat zu ergeben. Bei der angeführten Messung war der Winkel $(\eta + \theta)$ (Fig. 3) nur gleich 32 Sekunden. Ein Fehler von 3 Sekunden in den gemessenen Winkeln würde das Endresultat schon um $\frac{1}{11}$ verändern, d. h. die Entfernung der Erde von der Sonne würde schon um 13—14 Millionen Kilometer fehlerhaft gefunden werden. Bei der jetzigen Vollkommenheit der Meßinstrumente würde man zwar einen so großen Fehler nicht mehr begehen, aber auch jetzt sind noch bei der Bestimmung von Zenithdistanzen, d. h. von großen Winkeln überhaupt, die Fehler bei weitem größer als bei anderen Arten von Messungen, wo nur kleine Winkel zu bestimmen sind.

---

1) Wird ES = 1 gesetzt, so findet sich in Einheiten von ES die Linie MS nach dem dritten Kepplerschen Gesetze.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um in der angegebenen Weise die Entfernungen der Planeten von der Sonne zu bestimmen, ist der Planet Mars allein brauchbar. Zur Zeit seiner Opposition mit der Sonne kommt er der Erde sehr nahe, der Winkel $(\eta + \theta)$ wird also verhältnißmäßig sehr groß, und der Einfluß eines unvermeidlichen Beobachtungsfehlers nimmt ab. Zwar kann der Planet Venus unter den günstigsten Umständen der Erde noch näher kommen als Mars. Er ist zu dieser Zeit jedoch nur am Tage zu beobachten, wo seine Gränzen, da er um Mittag culminirt, durch die Wallungen der Luft so verwaschen sind, daß eine genaue Bestimmung seiner Zenithdistanz nicht möglich ist.

Auf seiner Bahn zwischen Erde und Sonne kann jedoch der Planet Venus in eine besondere Lage kommen, die für die Bestimmung der Sonnenparallaxe äußerst günstig ist. Da die Bahn dieses Planeten mit der Erdbahn nicht in derselben Ebene liegt, so geht er gewöhnlich oberhalb oder unterhalb der Sonne an dieser vorbei. Er kann jedoch auch unter günstigen Umständen gerade durch die Sonnenscheibe hindurchgehen, ähnlich wie der Mond bei einer Sonnenfinsterniß. Man sieht dann den Planeten als vollkommen schwarze Scheibe über die helle Sonnenscheibe wandern. Aus diesen sogenannten Venusdurchgängen läßt sich die Parallaxe der Sonne bestimmen, und es hat diese Art der Bestimmung vor allen anderen den besonderen Vortheil, daß es keiner weiteren Instrumente dazu bedarf, als eines guten Fernrohrs und einer guten Uhr.

Es wird nicht möglich sein, die Theorie dieser Berechnung der Sonnenparallaxe hier vollständig zu entwickeln, weil die Aufgabe dadurch besonders verwickelt wird, daß während des Vorübergehens des Planeten vor der Sonnenscheibe die Erde sich in ihrer Bahn um die Sonne weiterbewegt und sich um ihre Axe dreht, wodurch die Standpunkte der Beobachter sich fortwährend ändern. Einige Vereinfachungen in den Voraussetzungen werden es jedoch ermöglichen, den Zusammenhang darzulegen, welcher zwischen diesen Venusdurchgängen und der Sonnenparallaxe besteht.

Es sei (Fig. 6) S der Mittelpunkt der Sonne, E der der Erde, M N ein Theil der als kreisförmig vorausgesetzten Bahn der Venus, welcher in der Ebene der Zeichnung liegt. Der Durchmesser der Erde A B, ebenfalls in dieser Ebene liegend, sei senkrecht zu E S. Betrachtet man dann die Erde als nicht rotirend und in ihrer Bahn um die Sonne stillstehend [1]), so wird für Beobachter in A und B der Planet

1) Man darf die Erde als stillstehend betrachten, wenn man statt der wirklichen Winkelgeschwindigkeit der Venus ihre Geschwindigkeit gegen die Erde, d. h. statt ihrer siderischen Umlaufszeit ihre synodische nimmt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Venus bei seiner Bewegung um die Sonne durch das Centrum S der letzteren hindurchzugehen scheinen. In dem Augenblicke, wo der Beobachter in A ihn mit S zusammenfallen sieht, befindet sich der Planet in V, wo der in B es sieht, in V'. Haben die beiden Beobachter sich diese Zeitpunkte gemerkt, so reichen diese hin, um die Sonnenparallaxe zu bestimmen.

Um diese Bestimmung an einem bestimmten Beispiele durchzuführen, möge der Beobachter in A die angegebene Erscheinung um $1^h\ 10^m\ 8^s$ mittlere Berliner Zeit, der Beobachter in B dieselbe um $1^h\ 21^m\ 41^s$ mittlere Berliner Zeit gesehen haben. Die Differenz dieser Zeiten ist $11^m\ 33^s$ oder 693^s. Diese Zeit hat der Planet Venus benutzt, um in seiner Bahn den Bogen VV' oder den Winkel VSV' = ASB zu beschreiben. Dieser Winkel, unter welchem vom Mittelpunkte der Sonne aus der Durchmesser der Erde erscheint, ist die doppelte Sonnenparallaxe.

Nun beträgt die synodische Umlaufszeit des Planeten Venus 583,92 Tage, d. h. diese Zeit braucht er, um von einer Stellung mitten zwischen Erde und Sonne zu der nächsten Stellung dieser Art zu gelangen. Sie beschreibt also in dieser Zeit, wenn man die Erde als ruhend betrachtet, scheinbar einen Winkel von 360^0 um die Sonne. In einer Sekunde beschreibt sie also einen Winkel von $\frac{360 . 60 . 60}{583{,}92 . 24 . 60 . 60} = \frac{360}{14014{,}08} = 0{,}025688$ Sekunden. In 693 Sekunden ist dann der Bogen ihrer Bahn gleich $0{,}025688 \times 693 = 17'',8$. $\sphericalangle$ ASB ist also gleich $17'',8$ und seine Hälfte, die Sonnenparallaxe, gleich $8'',9$.

Die Beobachtungen können in der vorausgesetzten Weise schon aus dem Grunde nicht ausgeführt werden, weil man nicht im Voraus solche Punkte A und B bestimmen kann, für welche die Venus genau durch den Mittelpunkt der Sonne geht. Es werden vielmehr einfach Ortsbestimmungen des Planeten auf der Sonnenscheibe vorgenommen, und zwar von möglichst von einander entfernten Punkten aus.

In ähnlicher Weise, wie es oben bei Bestimmung der Entfernung des Mondes geschah, läßt sich auch die Entfernung der Sonne aus Beobachtungen ganz anderer Art als hier vorausgesetzt wurden, nämlich durch Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes und aus der Constante der Aberration der Fixsterne berechnen. Diese Constante beträgt nach den Rechnungen von Struve $20'',4451$ und die trigonometrische Tangente dieses Winkels ist nach der Theorie der Aberration gleich der Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn dividirt durch die Geschwindigkeit des Lichtes.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bezeichnet man diesen Winkel durch α, setzt man ferner die Geschwindigkeit der Erde gleich c, die des Lichtes gleich C, den Radius der Erdbahn gleich R, den der Erde gleich r, die siderische Umlaufszeit der Erde in Sekunden gleich T, die Horizontalparallaxe der Sonne gleich θ, so ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{C}$$

$$c \,.\, T = 2 R \pi \text{ [1]}; \quad R = \frac{r}{\sin \theta}$$

$$c = \frac{2 R \pi}{T} = \frac{2 r \pi}{T \sin \theta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 r \pi}{C T \sin \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{2 r \pi}{C T \operatorname{tg} \alpha}$$

Wegen der kleinen Winkel kann man setzen:

$$\sin \theta = \theta \sin 1'' \qquad \operatorname{tg} \alpha = \alpha \operatorname{tg} 1'' = \alpha \sin 1''$$

und damit wird

$$\theta = \frac{2 r \pi}{C T \alpha \sin^2 1''}$$

Setzt man nun $r = 6377{,}398$ Kilometer, $T = 365{,}2564 . 24 . 60 . 60 = 31558146$ Sekunden, und (nach Foucault) $C = 298000$ Kilometer, so hat man:

$$\log 2\pi = 0{,}7981799 \qquad \log C = 5{,}4742163$$
$$\log r = 3{,}8046436 \qquad \log T = 7{,}4991115$$
$$\log 2 r \pi = 4{,}6028235 \qquad \log \alpha = 1{,}3105892$$
$$\log \sin^2 1'' = 9{,}3711498 - 20$$
$$\log C T \alpha \sin^2 1'' = 3{,}6550668 \qquad 3{,}6550668$$
$$\log \theta = 0{,}9477567; \quad \theta = 8'',87$$

Der Abstand der Sonne von den Planeten kommt u. A. in Betracht, wenn berechnet werden soll, welchen störenden Einfluß dieselbe auf die Bewegung ihrer Monde ausübt. Denn ein solcher Mond wird nicht nur von seinem Planeten

1) Vergleiche Seite 12.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

angezogen und bewegt sich in Folge dessen um denselben nach den Kepplerschen Gesetzen, sondern auch von der Sonne, und da die anziehende Kraft der Sonne auf den Mond verschieden ist je nach der Entfernung dieses Mondes von der Sonne, so muß also die Entfernung der Sonne bei Berechnung ihrer Anziehung und der dadurch verursachten Störungen des Mondes in seiner Bahn von Einfluß sein.[1]) Es muß also eine Gleichung existiren zwischen den Störungen eines solchen Mondes und der Entfernung desselben von der Sonne, welche letztere wieder zusammengesetzt ist aus der Entfernung des Mondes von seinem Planeten und der Entfernung dieses Planeten von der Sonne. Kann man nun die Störungen durch Beobachtung finden, so läßt sich diese Gleichung bei bekannter Entfernung des Mondes von seinem Planeten so auflösen, daß man die unbekannte Entfernung des Planeten von der Sonne findet.

Es kann hier nicht davon die Rede sein, das schwierige Problem der Störungen auch nur annähernd zu entwickeln. Jedoch wird es möglich sein, durch gewisse Vereinfachungen in den Annahmen das eben Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern.

Aus den Störungen des Erdmondes in seiner Bahn möge gefunden sein, daß die anziehenden Kräfte der Sonne auf den Mond zur Zeit des Neu- und Vollmondes sich verhalten wie $S : S'$. Zur Zeit des Neu- und Vollmondes sind die Entfernungen der Sonne vom Monde bezüglich $R - r$ und $R + r$, wenn R und r die Radien der kreisförmigen Sonnen- und Mondbahn bezeichnen. Ist K die anziehende Kraft der Sonne in der Entfernung 1, so ist dieselbe nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze in den Entfernungen $(R - r)$ und $(R + r)$ bezüglich $\frac{K}{(R-r)^2}$ und $\frac{K}{(R+r)^2}$. Da diese Kräfte sich verhalten sollen wie $S : S'$, so besteht also die Gleichung:

$$S : S' = \frac{K}{(R-r)^2} : \frac{K}{(R+r)^2} \text{ oder}$$

$$S : S' = (R+r)^2 : (R-r)^2$$

1) Ein Theil der anziehenden Kraft der Sonne dient dazu, den Mond mit seinen Planeten zugleich um die Sonne zu führen. Nur ein Theil der Anziehungskraft der Sonne ist darum als „störende" Kraft zu betrachten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sqrt{S} : \sqrt{S'} = R + r : R - r$$

$$\sqrt{S} + \sqrt{S'} : \sqrt{S} - \sqrt{S'} = 2R : 2r$$

$$R = r \frac{\sqrt{S} + \sqrt{S'}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}$$

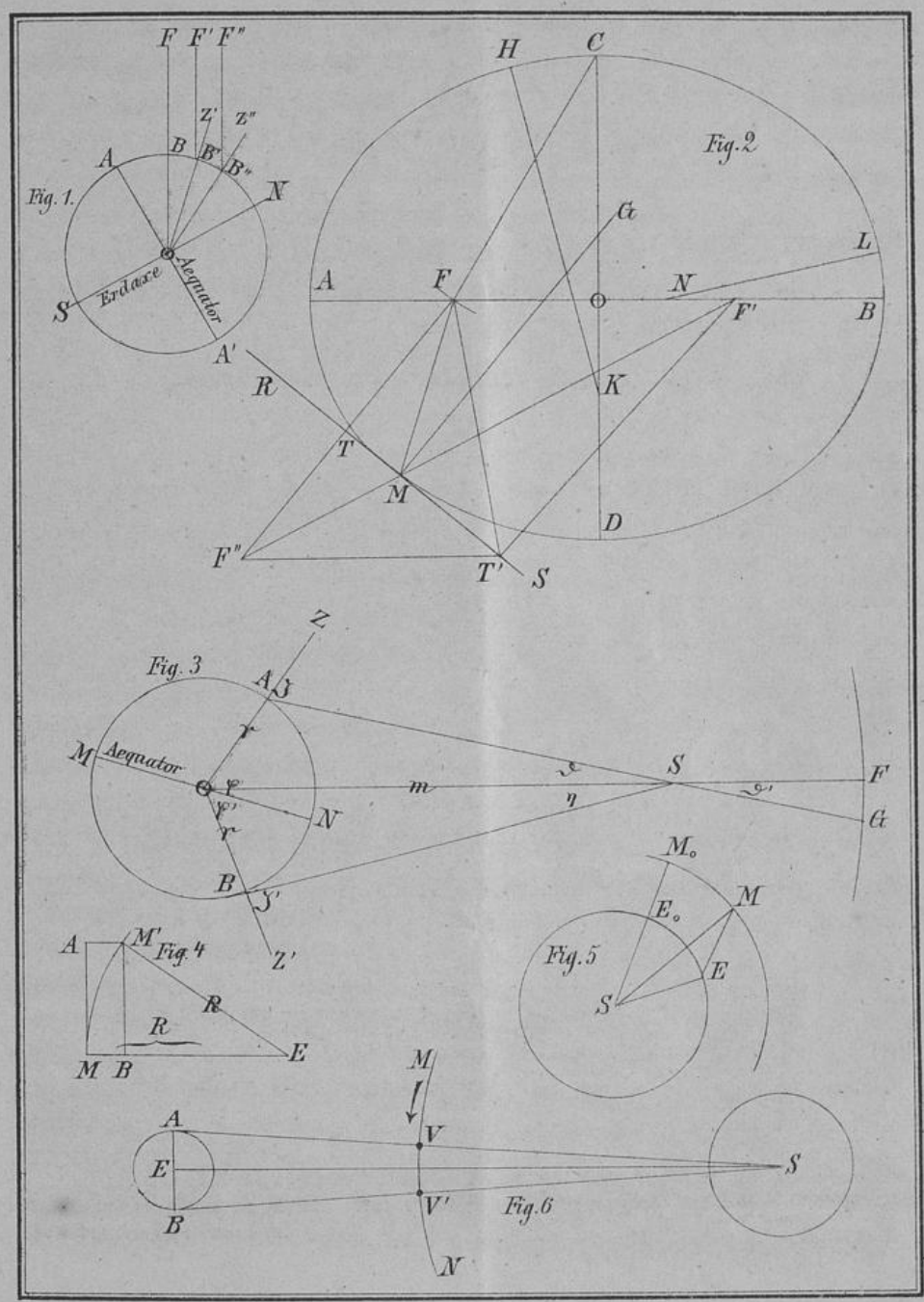
Aus R und dem bekannten Erdradius findet sich dann die Sonnenparallaxe.

Aus einer großen Menge von Beobachtungen des Mondes hat Hansen die Parallaxe der Sonne gleich 8",97 gefunden.

Unter den Methoden zur Bestimmung der Sonnenparallaxe, welche wir kennen gelernt haben, gibt die größte Genauigkeit die Beobachtung der Venusdurchgänge. Diese ereignen sich in jedem Jahrhunderte zweimal, so jedoch, daß diese beiden in einem Zwischenraume von 8 Jahren sich folgen. Die letzten ereigneten sich 1761 und 1769. Unter Zuziehung sämmtlicher Beobachtungen derselben hat Encke die Sonnenparallaxe hergeleitet zu 8",571, und zugleich als Resultat seiner Rechnungen gefunden, daß dieselbe höchstens um 0",037 fehlerhaft sein könne. Neuere Rechnungen jedoch, wie die angeführten von Hansen, die Bestimmung aus der Geschwindigkeit des Lichtes durch Foucault, deren numerische Ausführung oben gegeben wurde, die Beobachtung des Mars bei seiner Opposition im Jahre 1862, wo er der Erde äußerst nahe kam, haben gegründeten Zweifel an der Richtigkeit des Resultates von Encke wachgerufen. Da die Rechnung mit der äußersten Sorgfalt durchgeführt war, so konnte der Fehler nur vorhanden sein in den der Rechnung zu Grunde liegenden gegebenen Größen. Eine sorgfältige Untersuchung hat gezeigt, daß die angenommenen geographischen Längen der amerikanischen Beobachtungsorte zum Theil sehr fehlerhaft waren. Eine neue Berechnung nach Correction dieser Fehler ergab die Sonnenparallaxe zu 8",83.

Da die Entfernung der Erde von der Sonne den Maaßstab bildet, nach welchem alle übrigen Entfernungen, wie auch die Größen der Himmelskörper, gemessen werden, so begreift man, wie viel daran liegen muß, diese Entfernungen möglichst genau zu bestimmen. Da am 9. December 1874 und am 6. December 1882 wiederum Venusdurchgänge eintreten, so rüstet man sich jetzt schon, um in möglichst vollkommener Weise den ersten dieser Durchgänge zu beobachten. Um möglichst viele Beobachtungen des Ortes des Planeten auf der Sonnenscheibe machen zu können,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wird man sich eines bis jetzt zu astronomischen Messungen noch wenig gebräuchlichen Hülfsmittels bedienen. Man wird nämlich die Sonnenscheibe photographisch abbilden, und mit ihr den darauf befindlichen Planeten. Jede einzelne Messung erfordert dann wenig Zeit und ist zugleich unabhängig von der Auffassung des Beobachters.

Da der Durchgang des Planeten in unseren Gegenden nicht sichtbar ist, so werden aus vielen Ländern Expeditionen zur Beobachtung ausgerüstet. Auch Deutschland wird sich in hervorragender Weise betheiligen. Wir wollen vorläufig unseren Landsleuten gutes Wetter mit auf die Reise wünschen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf