I. Einleitung.

Ein mathematisches Pendel, d. h. eine an einem gewichtslos gedachten Faden aufgehängte kleine schwere Kugel würde, — wenn man von Hindernissen der Bewegung absieht —, einmal aus der Ruhelage um einen bestimmten Winkel herausgebracht und dann losgelassen, fortdauernd um die Ruhelage gleichmäßig hin- und herschwingen; d. h. es würde von der abgelenkten Lage aus durch die Gleichgewichtslage hindurch nach der entgegengesetzten Seite bis zu derselben Elongation von der Ruhelage sich bewegen, dann umkehren und durch die Ruhelage wieder hindurch bis zur ursprünglichen Lage zurückkehren, um nun die Bewegung von neuem zu beginnen.

Reibung in der Aufhängevorrichtung und Luftwiderstand verändern diese Bewegung insofern, als die aufeinanderfolgenden Elongationen von der Ruhelage fortwährend kleiner werden, bis sie schließlich gleich Null sind, d. h. das Pendel zur Ruhe gelangt.

Die durch diese Bewegungshindernisse hervorgerufene Abnahme der Schwingungsbogen eliminiert man, da sie bei den meisten Pendelschwingungen nur klein ist, dadurch, daß man das Mittel aus je zwei aufeinanderfolgenden Elongationen auf der einen Seite bildet; dieses ist dann mit hinreichender Genauigkeit dem absoluten Werte nach gleich der zwischen ihnen beobachteten Elongation auf der anderen Seite. Derartige Schwingungen bezeichnet man als symmetrische Schwingungen. Außer bei einem Fadenpendel finden wir sie bei der Wage, bei einer auf eine Spitze gesetzten Magnetnadel u. s. f.

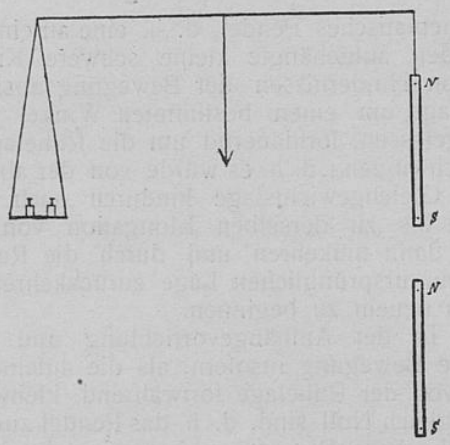
Mathematisch ausgedrückt ist die Bedingung für symmetrische Schwingungen die, daß die Summe der Drehungsmomente, welche das schwingende System in die Ruhelage zurückzubringen suchen, zu beiden Seiten der Ruhelage bei gleichen Elongationen dem absoluten Betrage nach denselben Wert besitzen muß.

Indessen gibt es eine Reihe von Fällen, in denen die Drehungsmomente bei gleichen Elongationen von der Ruhelage verschiedene absolute Werte besitzen, oder anders ausgedrückt, in denen die absolut gleichen Drehungsmomente in verschiedenen Elongationen auftreten. Solche Fälle bieten sich teils ganz von selbst dar, teils lassen sie sich leicht konstruieren. Ein Beispiel möge dies erläutern:

Hängt man an den einen Arm einer Wage (Fig. 1) an Stelle der Wagschale einen Magneten und stellt man senkrecht unter diesen einen zweiten Magneten auf, so wirkt außer der Schwere noch die von den beiden Polen herrührende Anziehung resp. Abstoßung, wenn die entgegengesetzten resp. gleichnamigen Pole einander zugekehrt sind. Ist daher der Wagebalken um einen Winkel α nach der einen Seite abgelenkt, so ist das Gesamt-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

drehungsmoment ein anderes, als wenn die Ablenkung um denselben Winkel nach der anderen Seite geschieht, da das von der Anziehung resp. Abstoßung der Magnetpole herrührende Drehungs-



moment, das von der Entfernung der Magnetpole von einander abhängt, verschiedene Werte in beiden Lagen besitzt.

In solchen Fällen ist das Mittel aus zwei aufeinanderfolgenden Elongationen auf der einen Seite größer oder kleiner als die zwischen ihnen beobachtete Elongation auf der anderen Seite. Derartige Schwingungen werden als unsymmetrisch bezeichnet. Beiläufig gesagt ist die Asymmetrie in dem angeführten Falle so groß, daß sie an einer gewöhnlichen Demonstrationswage schon mit bloßem Auge sichtbar ist.

Von den verschiedenen Fällen vorkommender asymmetrischer Schwingungen sind bisher vier Fälle theoretisch und experimentell eingehend untersucht worden. Zwei dieser Fälle habe ich bearbeitet[1]): 1. den Fall, daß an einem Horizontal-Intensitäts-Variometer oder Unifilar-Magnetometer der Magnet durch Torsion des fest mit ihm verbundenen Aufhängedrahtes um einen Winkel aus dem Meridian abgelenkt ist, und 2. den vorher erwähnten Fall der magnetischen Wage.

Zwei weitere Fälle sind von F. Eichhorn[2]) untersucht, nämlich 3. der Fall, daß ein an einem straff ausgespannten dünnen Draht senkrecht dazu angelöteter Stab durch Drillung des Drahtes gehoben wird, und 4. der Fall, daß das astatische Nadelpaar eines Galvanometers durch einen Strom abgelenkt wird, wenn das

---

[1]) Paul Schulze: Ueber asymmetrische Schwingungen um eine Lage stabilen Gleichgewichts. Dissert. Greifswald 1901.

[2]) Friedrich Eichhorn; Ueber die Asymmetrie der Schwingungen und ihren Zusammenhang mit der Asymmetrie der Ablenkungen im Falle eines durch Drillung gehobenen Pendels und eines durch einen Strom abgelenkten astatischen Nadelpaares. Dissert. Marburg 1909.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nadelpaar mit der Ebene der Windungen einen Winkel bildet.

Der dritte Fall bildet im Prinzip ein Analogon zu dem ersteren, wie denn auch die mathematische Entwicklung in beiden Fällen eine ganz ähnliche ist. Eine diesen Fall illustrierende Demonstrationsvorrichtung kann man leicht auf folgende Weise herstellen: An einem Bindfaden befestigt man senkrecht zu diesem ein leichtes Stäbchen (Federhalter), knüpft das eine Ende fest und tordiert am anderen Ende, indem man den Faden gespannt hält. Je dünner dabei der Faden ist, um so deutlicher tritt die Asymmetrie in Erscheinung.

Bei den symmetrischen Schwingungen, wie beispielsweise bei denen eines Pendels, führen die theoretischen Untersuchungen zu einer Differentialgleichung von der Form:

A. $$K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - C \sin\alpha ,$$

worin K das Trägheitsmoment des schwingenden Systems, α die Schwingungsweite und C eine Konstante bedeutet. Entwickelt man $\sin\alpha$ in eine Potenzreihe, so erhält die Gleichung die Form:

B. $$K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - c_1 \alpha - c_3 \alpha^3 - c_5 \alpha^5 - \ldots .$$

Bei den unsymmetrischen Schwingungen treten nun auf der rechten Seite der Gleichung A noch ein zweites Glied oder auch noch mehrere Glieder hinzu, die im allgemeinen dem sin der Schwingungsweite nicht mehr proportional sind. Die Reihenentwicklung führt dann zu einer Differentialgleichung, in der auch gerade Potenzen von α vorkommen, sodaß sie also die allgemeine Form enthält:

C. $$K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - c_1 \alpha - c_2 \alpha^2 - c_3 \alpha^3 - c_4 \alpha^4 - \ldots .$$

Da bei gewöhnlichen Pendelschwingungen, bei denen man sich auf kleine Amplituden beschränkt, die Reihe gewöhnlich nach dem ersten Gliede abgebrochen wird, so liegt es nahe, da offenbar die Asymmetrie durch die Glieder mit geraden Potenzen bedingt ist, die Untersuchungen zunächst auf die beiden ersten Glieder zu beschränken. Für die vier oben angeführten Fälle ist dies auch geschehen und daher stets die Gleichung:

D. $$K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - c_1 \alpha - c_2 \alpha^2$$

zu Grunde gelegt worden.

Es mag im Voraus erwähnt werden, daß in den vier behandelten Fällen sich die beobachtete Asymmetrie mit um so größerer Genauigkeit durch Hinzunahme des zweiten Gliedes erklären ließ, je kleiner die Schwingungen waren. Indessen sei hinzugefügt, daß beispielsweise die Beobachtungen und Rechnungen bei dem Magnetometer nur einen solchen Genauigkeitsgrad be-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

saßen, daß die Beobachtungsfehler in die fünfte Dezimalstelle der Rechnung eingingen, sodaß also nur die vierte Dezimalstelle als genau angesehen werden durfte. Bei dem Unifilar-Magnetometer, wie es für erdmagnetische Messungen verwendet wird, ist der Genauigkeitsgrad aber ein erheblich größerer, so daß man hier auch noch weitere Glieder berücksichtigen muß.

J. Horn[1]) hat nun kurze Zeit nach mir dieselbe Differentialgleichung unter Berücksichtigung des dritten Gliedes behandelt und sodann, veranlaßt durch weitere Arbeiten[2]), die Theorie durch Hinzufügung neuer Glieder erweitert.[3])

Es ist ohne weiteres klar, daß die Lösung der Differentialgleichung von Horn die allgemeinere ist und daß sich aus ihr die in den früheren Arbeiten gefundene Lösung als ein spezieller Fall ergeben muß.

Da Horn indessen die Differentialgleichung unter ganz allgemeinen Gesichtspunkten gelöst hat, so sollen unter Zugrundelegung seiner Lösung nur diejenigen Formeln abgeleitet werden, die für die experimentelle Untersuchung von Schwingungen nötig sind. Ferner sind auch die Horn'schen Bezeichnungen nicht die allgemein üblichen. Letztere sollen daher ebenfalls eingeführt werden, sodaß die nunmehr angeführten Gleichungen direkt Anwendung finden können.

Im folgenden Abschnitte soll alsdann eine den Horn'schen Entwicklungen für Schwingungen entsprechende Entwicklung für unsymmetrische Ablenkungen gegeben werden. Die Untersuchung der einzelnen Fälle unsymmetrischer Schwingungen, in Sonderheit die Untersuchung bei der magnetischen Wage hatte nämlich zu der Tatsache geführt, daß die Ablenkungen aus der Ruhelage, die durch gleichmäßig zu beiden Seiten der Ruhelage wirkende Ursachen hervorgebracht sind, ebenfalls unsymmetrisch sind. Die für die einzelnen Fälle entwickelten Formeln lassen sich, wie im dritten Teil gezeigt wird, in eine allgemein geltende Formel zusammenfassen.

Im letzten Kapitel sollen endlich die für die unsymmetrischen Ablenkungen entwickelten Formeln auf das zu erdmagnetischen Messungen dienende Unifilarmagnetometer Anwendung finden.

---

[1]) J. Horn: Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad. Zeitschr. f Mathem. u. Physik Band 47. 1902. 3. und 4. Heft p. 407—428.

[2]) F. Richarz und P. Schulze: Asymmetrische Schwingungen um eine Lage stabilen Gleichgewichts. Archiv Néerland. Ser. 2. Bd. 6. 1901. Ann. d. Phys. Bd. 8. 1902.

P. Schulze Dissert. s. o.

P. Schulze: Ueber das Unifilarmagnetometer. Ann. d. Phys. Bd. 8. 1902.

F. A. Schulze: Die Schwingungsdauer und Dämpfung asymmetrischer Schwingungen. Ann. d. Phys. Bd. 8. 1902.

[3]) J. Horn: Zur Theorie der kleinen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad. Zeitschr. f. Math. und Phys. Bd. 49. 1903. Heft 2 p. 246—269.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Auflösung der Differentialgleichung für unsymmetrische Schwingungen.

Stellt man für ein um die Ruhelage schwingendes System die Differentialgleichung der Beschleunigung auf, so erhält man eine Gleichung von der Form[1]):

$$(1) \quad K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = f(\alpha)$$

dann läßt sich $f(\alpha)$ in eine Mac-Laurinsche Reihe entwickeln:

$$(2) \quad K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = f(o) + \alpha f^{I}(o) + \frac{\alpha^2}{2!} f^{II}(0) + \frac{\alpha^3}{3!} f^{III}(o) + \frac{\alpha^4}{4!} f^{IV}(o)$$

die für hinreichend kleine Werte von α konvergiert. Da $f(0)$ die Summe der Drehungsmomente in der Ruhelage darstellt, so ist $f(o) = O$. Setzen wir:

$$- f^{I}(0) = c_1, - \frac{f^{II}(o)}{2!} = c_2, - \frac{f^{III}(o)}{3!} = c_3, - \frac{f^{IV}(o)}{4!} = c_4 \ldots$$

so erhalten wir die früher angegebene Differentialgleichung für unsymmetrische Schwingungen: [2])

$$(3) \quad K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - c_1 \alpha - c_2 \alpha^2 - c_3 \alpha^3 - c_4 \alpha^4 - \ldots.$$

oder

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{c_1}{K} \left\{ - \alpha - \frac{c_2}{c_1} \alpha^2 - \frac{c_3}{c_1} \alpha^3 - \ldots \right\}$$

Die erste Integration liefert:

$$(4) \quad \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{c_1}{K} \left\{ C^2 - \alpha^2 - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \alpha^3 - \frac{2}{4} \frac{c_3}{c_1} \alpha^4 - \frac{2}{5} \frac{c_4}{c_1} \alpha^5 - \ldots \right\}$$

---

1) Vergl. F. Richarz und P. Schulze s. o. p. 362.

2) Horn untersucht die Differentialgleichung nicht in dieser Form, sondern in der Form:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

Man erkennt aber leicht, dass eine einfache Umformung der Gleichung (3) auf die vorstehende führt:

Setzt man:

$$\alpha = x$$

$$\sqrt{\frac{c_1}{K}} . t = t \qquad \text{also} \sqrt{\frac{c_1}{K}} dt = dt \qquad d\left(\sqrt{\frac{c_1}{K}} t\right)^2 = dt^2$$

$$- \frac{c_2}{c_1} = a_2; - \frac{c_3}{c_1} = a_3; - \frac{c_4}{c_1} = a_4; \ldots.$$

so geht die Gleichung (3) in die vorstehende über.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

worin C^2 die Integrationskonstante bedeutet. Mithin:

$$(5)\quad \frac{d\alpha}{dt} = \pm \sqrt{\frac{c_1}{K}} \sqrt{C^2 - \alpha^2 - \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}\alpha^3 - \frac{2}{4}\frac{c_3}{c_1}\alpha^4 - \frac{2}{5}\frac{c_4}{c_1}\alpha^5 - \ldots}$$

In den beiden äußersten Lagen von α, zwischen denen das System hin- und herschwingt und die wir mit ϑ und ϑ_1 ($\vartheta > o$ $\vartheta_1 < o$) bezeichnen wollen, wird $\frac{d\alpha}{dt} = O$. Dann folgt:

$$C^2 - \vartheta^2 - \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}\vartheta^3 - \frac{2}{4}\frac{c_3}{c_1}\vartheta^4 - \frac{2}{5}\frac{c_4}{c_1}\vartheta^5 - \ldots = O$$

und

$$C^2 - \vartheta_1^2 - \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}\vartheta_1^3 - \frac{2}{4}\frac{c_3}{c_1}\vartheta_1^4 - \frac{2}{5}\frac{c_4}{c_1}\vartheta_1^5 - \ldots = O$$

oder durch Subtraktion:

$$(\vartheta_1^2 - \vartheta^2) + \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}(\vartheta_1^3 - \vartheta^3) + \frac{2}{4}\frac{c_3}{c_1}(\vartheta_1^4 - \vartheta^4) + \frac{2}{5}\frac{c_4}{c_1}(\vartheta_1^5 - \vartheta^5) + \ldots = O$$

oder nach Division durch $\vartheta_1 - \vartheta$:

$$(6)\quad \vartheta_1 + \vartheta + \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}(\vartheta_1^2 + \vartheta_1\vartheta + \vartheta^2) + \frac{2}{4}\frac{c_3}{c_1}(\vartheta_1^3 + \vartheta_1^2\vartheta + \vartheta_1\vartheta^2 + \vartheta^3) + \frac{2}{5}\frac{c_4}{c_1}(\vartheta_1^4 + \vartheta_1^3\vartheta + \vartheta_1^2\vartheta^2 + \vartheta_1\vartheta^3 + \vartheta^4) = O.$$

Nimmt man nun den einen Wert ϑ als gegeben an, so läßt sich ϑ_1 als Potenzreihe von ϑ darstellen:

$$(7)\quad \vartheta_1 = -\vartheta - \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}\vartheta^2 - \frac{4}{9}\frac{c_2^2}{c_1^2}\vartheta^3 - \left(\frac{16}{27}\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{2}{3}\frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{2}{5}\frac{c_4}{c_1}\right)\vartheta^4.$$

Ganz analog kann man auch ϑ_1 als gegeben ansehen und dann ϑ als eine Potenzreihe von ϑ_1 darstellen. Da die Gleichung (6) in ϑ und ϑ_1 symmetrisch ist, so ergibt sich sofort:

$$(8)\quad \vartheta = -\vartheta_1 - \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}\vartheta_1^2 - \frac{4}{9}\frac{c_2^2}{c_1^2}\vartheta_1^3 - \left(\frac{16}{27}\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{2}{3}\frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{2}{5}\frac{c_4}{c_1}\right)\vartheta_1^4 - \ldots$$

Für die experimentelle Untersuchung der Schwingungen folgt daraus: Sind die Coeffizienten c_1, c_2, c_3 . . . bekannt, und hat man die Elongationen ϑ von der Ruhelage aus auf der einen Seite beobachtet, so läßt sich mit Hilfe von (7) zu jedem Wert ϑ der zugehörige Wert ϑ_1 auf der anderen Seite berechnen. Umgekehrt kann man mit Hilfe von (8) zu jedem beobachteten Werte ϑ_1 den zugehörigen Wert ϑ berechnen. Zu beachten ist indessen dabei, daß $\vartheta_1 < O$, $\vartheta > O$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für die Constante C folgt:

$$C = \vartheta + \frac{1}{3}\frac{c_2}{c_1}\vartheta^2 - \left(\frac{1}{18}\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{1}{4}\frac{c_3}{c_1}\right)\vartheta^3 + \left(\frac{1}{54}\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{1}{12}\frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{1}{5}\frac{c_4}{c_1}\right)\vartheta^4 + \ldots$$

Mithin:

$$(9)\quad \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\alpha=0} = \pm\sqrt{\frac{c_1}{K}}\left\{\vartheta + \frac{1}{3}\frac{c_2}{c_1}\vartheta^2 - \left(\frac{1}{18}\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{1}{4}\frac{c_3}{c_1}\right)\vartheta^3 + \left(\frac{1}{54}\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{1}{12}\frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{1}{5}\frac{c_4}{c_1}\right)\vartheta^4 + \ldots\right\}$$

Eine entsprechende Gleichung würde sich wiederum ergeben, wenn man C nach Potenzen von ϑ_1 ($\vartheta_1 < 0$) entwickelt. Für experimentelle Untersuchungen hat diese Formel jedoch eine untergeordnete Bedeutung.

Wichtiger dagegen ist die Formel für die Schwingungsdauer, die nunmehr abgeleitet werden soll.

Bei der Berechnung der Schwingungsdauer hat man zu beachten, daß man hier zwischen einer dreifachen Schwingungsdauer zu unterscheiden hat: 1) Die Dauer einer Schwingung T von einer äussersten Lage zur anderen (halbe Schwingung): 2) Die Dauer der Schwingung T_1 von einer äussersten Lage $\alpha = \vartheta$ bis zur Ruhelage $\alpha = 0$, und die Dauer der Schwingung T_2 von der Lage $\alpha = 0$ bis zur Lage $\alpha = \vartheta_1$. Zwischen ihnen besteht die Beziehung:

$$T = T_1 + T_2.$$

Geht man aus von der Differentialgleichung:

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -c_1\alpha - c_2\alpha^2 - c_3\alpha^3 - \ldots$$

und läßt man die Bewegung aus der Stelle $\alpha = \vartheta$ beginnen, so ist $t = 0$ und $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\alpha=\vartheta} = 0$ zu setzen.

dann folgt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{c_1}{K}\int_{\vartheta}^{\alpha}\left(-\alpha - \frac{c_2}{c_1}\alpha^2 - \frac{c_3}{c_1}\alpha^3 - \ldots\right)d\alpha$$

oder:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{c_1}{K}\cdot\Phi(\alpha) = \frac{c_1}{K}\left\{\vartheta^2 - \alpha^2 - \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}(\alpha^3 - \vartheta^3) - \frac{2}{4}\frac{c_3}{c_1}(\alpha^4 - \vartheta^4) - \frac{2}{5}\frac{c_4}{c_1}(\alpha^5 - \vartheta^5) - \ldots\right\}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dann läßt sich $\Phi(\alpha)$ auf die Form bringen:

$$\Phi(\alpha) = (\vartheta - \alpha)(\alpha - \vartheta_1) \,.\, \Phi_1(\alpha)$$

worin ϑ_1 dargestellt ist durch die Potenzreihe (6) und worin

$$\Phi_1(\alpha) = 1 + \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}\alpha + \frac{1}{2}\frac{c_3}{c_1}\alpha^2 - \left(\frac{4}{9}\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{1}{2}\frac{c_3}{c_1}\right)\vartheta^2$$
$$+ \frac{2}{5}\frac{c_4}{c_1}\alpha^3 - \left(\frac{1}{3}\frac{c_2 \,.\, c_3}{c_1^2} - \frac{2}{5}\frac{c_4}{c_1}\right)\alpha\,\vartheta^2$$
$$- \left(\frac{8}{27}\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{1}{3}\frac{c_2\,c_3}{c_1^2}\right)\vartheta^3 - \ldots$$

bedeutet. Sowohl die Potenzreihe (6) wie auch $\Phi_1(\alpha)$ sind für hinreichend kleine Werte von $|\vartheta|$ resp. $|\alpha|$ und $|\vartheta|$ konvergent.

Gehört nun α dem Intervalle $\vartheta \ldots \vartheta_1$ an, so ist die Zeit t, nach welcher die Lage α zum ersten Male erreicht wird:

$$t = \pm\sqrt{\frac{K}{c_1}} \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{d\,\alpha}{\sqrt{\Phi(\alpha)}}$$

$$(10)\quad t = \pm\sqrt{\frac{K}{c_1}} \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{d\,\alpha}{\sqrt{(\vartheta - \alpha)(\alpha - \vartheta_1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Phi_1(\alpha)}}$$

wo das Zeichen — oder + gilt, je nachdem ϑ positiv oder negativ ist, während alle vorkommenden Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind.

Dann läßt sich setzen:

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi_1(\alpha)}} = g_0 + g_1\alpha + g_2\alpha^2 + g_3\alpha^3 + \ldots$$

wobei gesetzt ist:

$$g_0 = 1 + \left(\frac{2}{9}\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{1}{4}\frac{c_3}{c_1}\right)\vartheta^2 + \left(\frac{4}{27}\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{1}{6}\frac{c_2 c_3}{c_1^2}\right)\vartheta^3 + \ldots$$

$$g_1 = -\frac{1}{3}\frac{c_2}{c_1} - \left(\frac{2}{9}\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{5}{12}\frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{1}{5}\frac{c_4}{c_1}\right)\vartheta^2 + \ldots$$

$$g_2 = \left(\frac{1}{6}\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{1}{4}\frac{c_3}{c_1}\right) + O.\,\vartheta + \ldots$$

$$g_3 = -\left(\frac{5}{54}\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{1}{4}\frac{c_2 \,.\, c_3}{c_1^2} + \frac{1}{5}\frac{c_4}{c_1}\right) + \ldots.$$

u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da wir $\vartheta > O$ voraussetzen, ist in (10) das negative Vorzeichen zu wählen, das sich aber durch Umkehrung der Grenzen für das Integral in das positive verwandeln läßt. Dann wird:

$$t = \sqrt{\frac{K}{c_1}} \int_{\alpha}^{\vartheta} (g_0 + g_1 \alpha + g_2 \alpha^2 + g_3 \alpha^3) \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt{(\vartheta - \alpha)(\alpha - \vartheta_1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{K}{c_1}} \Big\{ g_0 + \frac{1}{2} g_1 (\vartheta + \vartheta_1) + g_2 \left[\frac{3}{8}(\vartheta + \vartheta_1)^2 - \frac{1}{2} \vartheta \vartheta_1\right]$$

$$+ g_3 \left[\frac{5}{16} (\vartheta + \vartheta_1)^3 - \frac{3}{4} \vartheta \vartheta_1 (\vartheta + \vartheta_1)\right] + \ldots \Big\} \int_{\alpha}^{\vartheta} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\vartheta - \alpha)(\alpha - \vartheta_1)}}$$

$$+ \sqrt{\frac{K}{c_1}} \Big\{ g_1 + \frac{3}{4} g_1 (\vartheta + \vartheta_1) + g_3 \left[\frac{5}{8} (\vartheta + \vartheta_1)^2 - \frac{2}{3} \vartheta \vartheta_1\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{2} g_1 + \frac{5}{12} g_3 (\vartheta + \vartheta_1) + \ldots\right] \alpha + \frac{1}{3} g_3 \alpha^2 + \ldots \Big\} \sqrt{(\vartheta - \alpha)(\alpha - \vartheta_1)}$$

Mit Hilfe der Gleichungen:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{K}{c_1} \Phi(\alpha)$$

$$\Phi(\alpha) = (\vartheta - \alpha)(\alpha - \vartheta_1) \Phi_1(\alpha)$$

ergibt sich, wenn man dem obigen entsprechend das negative Vorzeichen wählt:

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \sqrt{\frac{K}{c_1}} \sqrt{(\vartheta - \alpha)(\alpha - \vartheta_1)} \sqrt{\Phi_1(\alpha)}$$

und daraus folgt:

$$\sqrt{(\vartheta - \alpha)(\alpha - \vartheta_1)} = \frac{-\frac{d\alpha}{dt}}{\sqrt{\frac{K}{c_1}} \sqrt{\Phi_1(\alpha)}}$$

Ferner ist

$$\int_{\alpha}^{\vartheta} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\vartheta - \alpha)(\alpha - \vartheta_1)}} = \arccos \frac{\alpha - \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2}}{\frac{\vartheta - \vartheta_1}{2}}$$

Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich, wenn man für ϑ_1 und $\frac{1}{\sqrt{\Phi_1(\alpha)}}$ die früher angegebenen Reihen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und für g_0, g_1, g_2 .... die obigen Werte benützt:

$$(11)\quad t = \sqrt{\frac{K}{c_1}}\left[1 + \left(\frac{5}{12}\,\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{3}{8}\,\frac{c_3}{c_1}\right)\vartheta^2 + \left(\frac{5}{18}\,\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{1}{4}\,\frac{c_2 \cdot c_3}{c_1^2}\right)\vartheta^3 + \ldots\right] \arccos \frac{\alpha - \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2}}{\frac{\vartheta - \vartheta_1}{2}}$$

$$- \frac{d\alpha}{dt}\left[-\frac{1}{3}\,\frac{c_2}{c_1} + \left(\frac{7}{36}\,\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{1}{8}\,\frac{c_3}{c_1}\right)\alpha - \left(\frac{37}{324}\,\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{5}{24}\,\frac{c_2 \cdot c_3}{c_1^2} + \frac{1}{15}\,\frac{c_4}{c_1}\right)\alpha^2 - \left(\frac{143}{324}\,\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{19}{24}\,\frac{c_2\,c_3}{c_1^2} + \frac{1}{5}\,\frac{c_4}{c_1}\right)\vartheta^2 + \ldots\right]$$

Hierin ist:

$$\frac{\alpha - \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2}}{\frac{\vartheta - \vartheta_1}{2}} = \frac{\alpha - \frac{1}{3}\,\frac{c_2}{c_1}\alpha\vartheta + \frac{1}{3}\,\frac{c_2}{c_1}\vartheta^2 - \frac{1}{9}\,\frac{c_2^2}{c_1^2}\alpha\vartheta^2 + \frac{1}{9}\,\frac{c_2^2}{c_1^2}\vartheta^3 + \ldots}{\vartheta}$$

Aus dieser Gleichung erhält man insbesondere die Zeit T, welche das schwingende System gebraucht, um aus der Lage $\alpha = \vartheta$ in die Lage $\alpha = \vartheta_1$ zu gelangen, dadurch, daß man setzt:

$$\alpha = \vartheta_1 \quad \frac{d\alpha}{dt} = O.$$

dann folgt:

$$(12)\quad T^{1)} = \pi\sqrt{\frac{K}{c_1}}\left[1 + \left(\frac{5}{12}\,\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{3}{8}\,\frac{c_3}{c_1}\right)\vartheta^2 + \left(\frac{5}{18}\,\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{1}{4}\,\frac{c_2\,c_3}{c_1^2}\right)\vartheta^3 + \left(\frac{385}{576}\,\frac{c_2^4}{c_1^4} - \frac{275}{192}\,\frac{c_2^2\,c_3}{c_1^3} + \frac{57}{256}\,\frac{c_3^2}{c_1^2} + \frac{7}{8}\,\frac{c_2\,c_4}{c_1^2} - \frac{5}{16}\,\frac{c_3}{c_1}\right)\vartheta^4 + \ldots\right.$$

Die zum Uebergange aus der Lage $\alpha = \vartheta$ in die Lage $\alpha = o$ erforderliche Zeit T_1 erhält man, indem man in (11) $\alpha = O$, $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{c_1}{K}}\,.\,\vartheta_1$ setzt, und dann statt ϑ_1 die Reihenentwicklung (7) benützt.

---

[1]) Das letzte hier angegebene Glied ist von Horn bei dieser Ableitung nicht angeführt, sondern einer zweiten Berechnung zur Ableitung der Schwingungsdauer entnommen. Man würde es hier erhalten durch Hinzunehmen weiterer Glieder in der Gleichung (11).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dann folgt:

$$(13)\quad T_1 = \frac{T}{2} - \sqrt{\frac{K}{c_1}} \left\{ \frac{2}{3}\,\frac{c_2}{c_1}\,\vartheta + \frac{2}{9}\,\frac{c_2^2}{c_1^2}\,\vartheta^2 - \left(\frac{61}{81}\,\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{7}{6}\,\frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{8}{15}\,\frac{c_4}{c_1}\right)\vartheta^3 + \ldots \right\}$$

Die zum Uebergange aus der Lage $\alpha = O$ in die Lage $\alpha = \vartheta_1$ erforderliche Zeit T_2 ergiebt sich aus der Beziehung:

$$T_1 + T_2 = T.$$

Und man erhält:

$$(14)\quad T_2 = \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{K}{c_1}} \left\{ \frac{2}{3}\,\frac{c_2}{c_1}\,\vartheta + \frac{2}{9}\,\frac{c_2^2}{c_1^2}\,\vartheta^2 + \left(\frac{61}{81}\,\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{7}{6}\,\frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{8}{15}\,\frac{c_4}{c_1}\right)\vartheta^3 + \ldots \right.$$

Durch die im vorstehenden abgeleiteten Gleichungen sind alle diejenigen gegeben, welche für die experimentelle Untersuchung der Schwingungen nötig sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Unsymmetrische Ablenkungen und deren Zusammenhang mit unsymmetrischen Schwingungen.

In dem eingangs erwähnten Falle der magnetischen Wage führten die Untersuchungen über die Bestimmung des Abstandes der beiden einander zugekehrten Magnetpole zu der Tatsache, daß die Ablenkungen des Wagebalkens aus der Ruhelage, hervorgebracht durch Hinzulegen und Hinwegnehmen desselben Uebergewichtes, nach beiden Seiten hin verschieden sind.[1]) Und zwar zeigte sich, daß die größere Ablenkung nach derjenigen Seite erfolgt, nach der auch bei den Schwingungen die größere Abweichung stattfindet.

Diese Tatsache führte zu der Vermutung, daß zwischen den Schwingungen und Ablenkungen offenbar ein Zusammenhang besteht, der sich für den Fall der Wage auch nachweisen ließ. F. Richarz hat dann später gezeigt[2]), daß in allen Fällen, in denen unsymmetrische Schwingungen vorhanden sind, auch unsymmetrische Ablenkungen existieren. Für den Fall kleiner Ablenkungen hat er auch die Formel entwickelt, die den Zusammenhang darstellt. Indessen gilt, wie aus der Arbeit von F. Eichhorn hervorgeht[3]), diese Formel keineswegs allgemein, sie hat vielmehr nur eine beschränkte Gültigkeit. Im folgenden soll daher nicht nur die von Richarz gegebene Entwicklung erweitert, sondern auch für allgemeinere Fälle eine Entwicklung gegeben werden.

Dazu gehen wir aus von der Differentialgleichung der Beschleunigung, welche lautet:

$$K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - c_1 \alpha - c_2 \alpha^2 - c_3 \alpha^3 - c_4 \alpha^4 - \ldots.$$

In einer Lage, in der das schwingende System gegen die Ruhelage den Winkel β bildet, werde nun plötzlich das schwingende System festgehalten. Dann muß offenbar ein Drehungsmoment vorhanden sein, welches demjenigen das Gleichgewicht hält, welches das System in die Ruhelage zurückzudrehen sucht. Ist der Winkel β nur klein, so wird auch dieses Drehungsmoment nur klein sein. Bezeichnen wir dieses mit δ, so gilt die Beziehung:

$$(15) \quad \delta = - c_1 \beta - c_2 \beta^2 - c_3 \beta^3 - c_4 \beta^4 - \ldots.$$

1) Ausführliches hierüber siehe: P. Schulze Dissert. p. 71 u. f.
2) F. Richarz u. P. Schulze s. o. p. 361.
3) Eichhorn s. o. p. 52 u. 67.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für hinreichend kleines δ läßt sich nun β als eine Potenzreihe von δ darstellen:

$$(16)\ \beta = -\frac{1}{c_1}\,\delta - \frac{c_2}{c_1^3}\,\delta^2 - \left(2\,\frac{c_2^2}{c_1^5} - \frac{c_3}{c_1^4}\right)\delta^3$$
$$- \left(5\,\frac{c_2^3}{c_1^7} - 5\,\frac{c_2\,c_3}{c_1^6} + \frac{c_4}{c_1^5}\right)\delta^4 - \ldots$$

Wir erkennen die Koeffizienten von δ, δ^2, δ^3.. lassen sich durch dieselben Größen ausdrücken wie die Koeffizienten von $\vartheta^2\,\vartheta^3\,\vartheta^4$.. in (7). Bezeichnen wir zur Abkürzung die Koeffizienten von δ, δ^2... mit $\mu_1\ \mu_2 \ldots$, setzen wir also:

$$(17)\ \beta = -\mu_1\,\delta - \mu_2\,\delta^2 - \mu_3\,\delta^3 - \mu_4\,\delta^4 - \ldots$$

so ergeben sich für den Zusammenhang mit den Koefficienten von ϑ^2, ϑ^3 ϑ^4... die folgenden Beziehungen:

Aus:

$$\mu_1 = \frac{1}{c_1} \quad \mu_2 = \frac{c_2}{c_1^3} \quad \mu_3 = 2\,\frac{c_2^2}{c_1^5} - \frac{c_3}{c_1^4}$$
$$\mu_4 = 5\,\frac{c_2^3}{c_1^7} - 5\,\frac{c_2\,c_3}{c_1^6} + \frac{c_4}{c_1^5}$$

Folgt:

$$c_1 = \frac{1}{\mu_1} \quad c_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1^3} \quad c_2 = 2\,\frac{\mu_2^2}{\mu_1^5} - \frac{\mu_3}{\mu_1^4}$$
$$c_4 = 5\,\frac{\mu_2^3}{\mu_1^7} - 5\,\frac{\mu_2\,\mu_3}{\mu_1^6} + \frac{\mu_4}{\mu_1^5}$$

Man erkennt, die Größen $c_1\ c_2\ c_3 \ldots$ lassen sich durch die Größen $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \ldots$ ebenso ausdrücken, wie die Größen $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \ldots$ durch $c_1\ c_2\ c_3 \ldots$ ausgedrückt sind.

Setzen wir die letzteren Werte ein in die Reihe:

$$\vartheta_1 = -\vartheta - \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}\,\vartheta^2 - \frac{4}{9}\frac{c_2^2}{c_1^2}\,\vartheta^3 - \left(\frac{16}{27}\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{2}{3}\frac{c_2\,c_3}{c_1^2} + \frac{2}{5}\frac{c_4}{c_1}\right)\vartheta^4 - \ldots$$

so folgt:

$$(18)\ \vartheta_1 = -\vartheta - \frac{2}{3}\frac{\mu_2}{\mu_1^2}\,\vartheta^2 - \frac{4}{9}\frac{\mu_2^2}{\mu_1^4}\,\vartheta^3 - \left(\frac{34}{27}\frac{\mu_2^3}{\mu_1^6} - \frac{4}{3}\frac{\mu_2\,\mu_3}{\mu_1^5} + \frac{2}{5}\frac{\mu_4}{\mu_1^4}\right)\vartheta^4 - \ldots$$

Diese Beziehungen zwischen der Asymmetrie der Schwingungen und Ablenkungen haben indessen nur solange Gültigkeit, als das neu hinzugefügte Drehungsmoment eine vom Ablenkungswinkel unabhängige Größe ist. Es kann indessen aber auch der Fall eintreten, daß dieses Drehungsmoment seinerseits wieder mit der Größe des Ablenkungswinkels wächst oder abnimmt. Einen solchen Fall hat beispielsweise F. Eichhorn ausführlich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

behandelt [1]), und zwei andere Fälle habe ich bereits früher angedeutet [2]).

In solchen Fällen läßt sich δ in die Form bringen:

$$\delta = \delta_0 \, \varphi(\beta)$$

und wir erhalten als Gleichgewichtsbedingung:

$$\delta_0 \, \varphi(\beta) = - c_1 \beta - c_2 \beta^2 - c_3 \beta^3 - c_4 \beta^4 - \ldots$$

Entwickeln wir $\varphi(\beta)$ in eine Reihe:

$$\varphi(\beta) = a_0 + a_1 \beta + a_2 \beta^2 + a_3 \beta^3 + a_4 \beta^4 + \ldots$$

so folgt:

$$\delta_0 (a_0 + a_1 \beta + a_2 \beta^2 + a_3 \beta^3 + a_4 \beta^4 + \ldots) = - c_1 \beta - c_2 \beta^2 - c_3 \beta^3 - c_4 \beta^4 - \ldots$$

$$(19) \quad \delta_0 = - \frac{c_1}{a_0} \beta - \left(\frac{c_2}{a_0} - \frac{a_1 c_1}{a_0^2}\right)\beta^2 - \left(\frac{c_3}{a_0} - \frac{a_1 c_2}{a_0^2} - \frac{a_2 c_1}{a_0^2} + \frac{a_1^2 c_1}{a_0^3}\right) \beta^3$$
$$- \left(\frac{c_4}{a_0} - \frac{a_1 c_3}{a_0^2} - \frac{a_2 c_2}{a_0^2} + \frac{a_1^2 c_2}{a_0^3} - \frac{a_3 c_1}{a_0^2} + 2\frac{a_1 a_2 c_1}{a_0^3} - \frac{a_1^3 c_1}{a_0^4}\right) \beta^4 - \ldots$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung die Coeffizienten von $\beta, \beta^2 \ldots$ mit $b_1 \; b_2 \ldots$, so folgt:

$$\delta_0 = - b_1 \beta - b_2 \beta^2 - b_3 \beta^3 - b_4 \beta^4 - \ldots\ldots$$

Dann läßt sich umgekehrt β in eine Reihe nach Potenzen von δ_0 entwickeln und wir erhalten:

$$\beta = - \frac{1}{b_1} \delta_0 - \frac{b_2}{b_1^3} \delta_0^2 - \left(2 \frac{b_2^2}{b_1^5} - \frac{b_3}{b_1^4}\right) \delta_0^3$$
$$- \left(5 \frac{b_2^3}{b_1^7} - 5 \frac{b_2 b_3}{b_1^6} + \frac{b_4}{b_1^5}\right) \delta_0^4 - \ldots$$

Sezen wir für b_1, b_2 .... die obigen Werte ein, so folgt:

$$(20) \quad \beta = - \frac{a_0}{c_1} \delta_0 - \left(\frac{c_2 a_0^2}{c_1^3} - \frac{a_1 a_0}{c_1^2}\right) \delta_0^2$$
$$- \left[\frac{a_0^3}{c_1^3}\left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_3}{c_1}\right) - \frac{a_0^2}{c_1^2}\left(3 \frac{a_1 c_2}{c_1^2} - \frac{a_2}{c_1}\right) + \frac{a_0 a_1^2}{c_1^3}\right] \delta_0^3$$
$$- \left[\frac{a_0^4}{c_1^4}\left(5 \frac{c_2^3}{c_1^3} - 5 \frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{c_4}{c_1}\right) - \frac{a_0^3}{c_1^3}\left(10 \frac{c_2^2 a_1}{c_1^3} - 4 \frac{a_2 c_2}{c_1^2} - 4 \frac{a_1 c_3}{c_1^2} + \frac{a_3}{c_1}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{a_0^2}{c_1^2}\left(6 \frac{a_1^2 c_2}{c_1^3} - 3 \frac{a_1 a_2}{c_1^2}\right) - \frac{a_0 a_1^3}{c_1^4}\right] \delta_0^4$$

---

1) F. Eichhorn: Dissert. p. 49.
2) P. Schulze. Ueber das Unifilarmagnetometer. Ann. d. Phys. Bd. 8. 1902. p. 714.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man erkennt sofort, die Formel (16) geht unmittelbar aus dieser allgemeineren hervor, wenn man $a_0 = 1$, $\delta_0 = \delta$, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = O$ setzt.

Bezeichnen wir jetzt die Koeffizienten von $\delta_0\ \delta_0^2 \ldots$ mit $\mu_1\ \mu_2 \ldots$, so ergeben sich für den Zusammenhang mit den Größen $c_1\ c_2 \ldots$ die folgenden Beziehungen:

Aus:

$$\mu_1 = \frac{a_0}{c_1}$$

$$\mu_2 = \frac{c_2 a_0^2}{c_1^3} - \frac{a_1 a_0}{c_1^2}$$

$$\mu_3 = \frac{a_0^3}{c_1^3}\left(2\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_3}{c_1}\right) - \frac{a_0^2}{c_1^2}\left(3\frac{a_1 c_2}{c_1^2} - \frac{a_2}{c_1}\right) + \frac{a_0 a_1^2}{c_1^3}$$

$$\mu_4 = \frac{a_1^4}{c_0^4}\left(5\frac{c_2^3}{c_1^3} - 5\frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{c_4}{c_1}\right) - \frac{a_0^3}{c_1^3}\left(10\frac{c_2^2 a_1}{c_1^3} - 4\frac{a_2 c_2}{c_1^2} - 4\frac{a_1 c_3}{c_1^2} + \frac{a_3}{c_1}\right)$$
$$+ \frac{a_0^2}{c_1^2}\left(6\frac{a_1^2 c_2}{c_1^3} - 3\frac{a_1 a_2}{c_1^2}\right) - \frac{a_0 a_1^3}{c_1^4}$$

ergeben sich:

$$c_1 = \frac{a_0}{\mu_1} \qquad c_2 = \frac{a_0 \mu_2}{\mu_1^3} - \frac{a_1}{\mu_1}$$

$$c_3 = 2\frac{\mu_2^2 a_0}{\mu_1^5} - \frac{\mu_3 a_0}{\mu_1^4} - 7\frac{a_1 \mu_2}{\mu_1^3} + 6\frac{a_1^2}{a_0 \mu_1} + \frac{a_2}{\mu_1}$$

$$c_4 = 5\frac{a_0 \mu_2^3}{\mu_1^7} - \frac{a_0 \mu_2}{\mu_1^6}\left(5\mu_3 + 8 a_1 \mu_2\right) + \frac{1}{\mu_1^5}\left(a_0 \mu_4 - 20 a_1 \mu_2^2 + 4 a_0 a_1 \mu_3\right)$$
$$+ \frac{1}{\mu_1^4}\left(5\mu_3 a_1 + 28 a_1^2 \mu_2\right) + \frac{1}{\mu_1^3}\left(a_2 \mu_2 + 24\frac{a_1^2 \mu_2}{a_0}\right)$$
$$- \frac{1}{\mu_1^2}\left(4 a_1 a_2 + 24\frac{a_1^3}{a_0}\right) + \frac{1}{\mu_1}\left(a_3 + 12\frac{a_1 a_2}{a_0}\right)$$

Setzen wir diese Werte für c_1, c_2, c_3, c_4 in die Gleichung für ϑ_1 ein, so erhalten wir endlich:

$$(21)\quad \vartheta_1 = -\vartheta - \frac{2}{3}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1^2} - \frac{a_1}{a_0}\right)\vartheta^2 - \frac{4}{9}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1^2} - \frac{a_1}{a_0}\right)^2 \vartheta^3 + \left(\frac{34}{27}\frac{\mu_2^3}{\mu_1^6}\right.$$
$$\left. - \frac{4}{3}\frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1^5} + \frac{2}{5}\frac{\mu_4}{\mu_1^4} + \ldots\right)\vartheta^4 + \ldots$$

Die letzte Klammer enthält außer den angeführten Gliedern noch solche, in denen a_0, a_1, $a_2 \ldots$ als Faktoren auftreten.

Man erkennt, die vorstehende Gleichung geht in die frühere (18) über, wenn man $a_0 = 1$ $a_1 = a_2 = \ldots = O$ setzt.

Die vorstehenden Gleichungen geben allgemein den Zusammenhang zwischen der Asymmetrie der Schwingungen und der Asymmetrie der Ablenkungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um also die Koeffizienten in der Reihe für ϑ_1 aus denen in der Reihe für die Ablenkungen finden zu können, hat man außer den Größen μ auch noch die Größen a nötig. Indessen lassen sich in den meisten Fällen die Größen a durch die gleichen Konstanten ausdrücken wie die Größen c, wie man das bei den oben erwähnten vier Fällen asymmetrischer Schwingungen in der Tat feststellen kann[1]). Dann besteht also noch eine besondere Beziehung zwischen den Größen c und a und mithin auch zwischen den Grössen μ und a, eine Beziehung, die indessen für jeden Einzelfall eine besondere ist. Ein Beispiel hierfür bietet der von F. Eichhorn[2]) untersuchte Fall des Galvanometers, bei dem sich als Koeffizient von ϑ^2 unserer Bezeichnung entsprechend ergibt:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1^2 + 2\mu_1}$$

(Das bei Eichhorn sich findende Minuszeichen erklärt sich daraus, dass Eichhorn den hier mit μ_1 bezeichneten Wert mit $-\mu_1$ bezeichnet hat.)

Diese Beziehung ergibt sich indessen leicht aus der obigen allgemeinen Formel, weil in diesem speziellen Fall $a_0 = -\mu_1 c_1$ und $a_1 = -2c_2$ ist.

1) Verg. P. Schulze: Zeitschr. f. Math. und Phys. Bd. 59.
2) F. Eichhorn s. o. p. 46 u. f.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IV. Anwendung der Theorie asymmetrischer Schwingungen und Ablenkungen auf das zu erdmagnetischen Messungen dienende Unifilar-Magnetometer.

1. Schwingungen bei dem Magnetometer.

M. Eschenhagen [1]) hat zur Messung der erdmagnetischen Variationen ein besonders empfindliches Instrument konstruiert, das kurz als Eschenhagen'sches Unifilarmagnetometer bezeichnet wird. Infolge seiner außerordentlichen Empfindlichkeit eignet sich dasselbe auch vorzüglich zur Bestimmung der Störungen der Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus. Von einer gewöhnlichen Drehwage unterscheidet sich dieses Instrument dadurch, daß bei ihm der Draht, an dem der Magnet befestigt wird, ersetzt ist durch einen möglichst dünnen Quarzfaden. Der daran befestigte Magnet ist infolgedessen nur klein. Die Verwendung von Quarzfäden ist deswegen besonders empfehlenswert, weil bei ihnen der störende Einfluß der elastischen Nachwirkung fast vollständig fortfällt.

Zur Bestimmung der Variationen des Erdmagnetismus wird das Instrument zunächst so aufgestellt, daß die Achse des Magneten sich im Meridian befindet, wenn der Draht ohne Torsion ist. Alsdann wird der Torsionskopf gedreht und zwar solange, bis die Achse des Magneten ungefähr senkrecht zum Meridian steht.

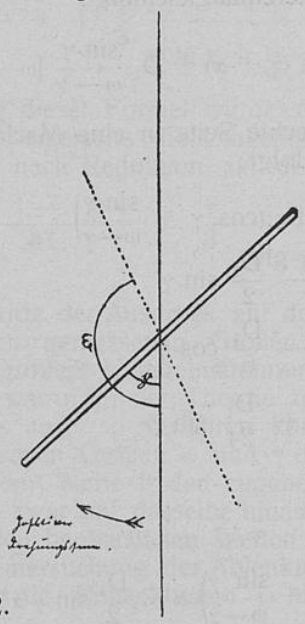


Fig. 2.

Um für diesen Fall zu einer Differentialgleichung der Beschleunigung zu gelangen, gehen wir aus von einer allgemeinen Betrachtung.

Es sei die Senkrechte die Lage des Magnetischen Meridians, in welcher sich der Magnet befindet, wenn der Aufhängefaden ohne Torsion ist. Nun wird der Torsionskopf gedreht um den Winkel ω, der Magnet folgt teilweise der Drehung und kommt nach einigen Schwankungen zur Ruhe. In dieser Lage bilde er gegen den

1) M. Eschenhagen, Verhandlungen der deutschen Physikalischen Gesellschaft 1899 p. 147.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Meridian den Winkel γ. Wird nun der Magnet in Schwingungen versetzt und bildet die Achse gegen die Ruhelage den Winkel α, so wirken auf den Magneten zwei Drehungsmomente: das eine, vom Erdmagnetismus herrührende, ist proportioeal $\sin(\gamma + \alpha)$, das andere, von der Torsion herrührende, ist proportional $[\omega - (\gamma + \alpha)]$, wirkt jedoch im entgegengesetzten Sinne.

Bezeichnen K das Trägheitsmoment, D_1 und D_2 Proportionalitätsfaktoren, setzt man ferner denjenigen Drehungssinn als positiv fest, in welchem tordiert ist, so erhalten wir als Differentialgleichung der Beschleunigung:

$$(22) \quad K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - D_1 \sin(\gamma + \alpha) + D_2 [\omega - (\gamma + \alpha)]$$

Für die Ruhelage, d. h. für $\alpha = o$, wird auch $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = o$.

Mithin:

$$O = - D_1 \sin \gamma + D_2 (\omega - \gamma)$$

also:

$$(23) \quad D_2 = \frac{D_1 \sin \gamma}{\omega - \gamma}$$

Daher lautet die Differentialgleichung:

$$K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = f(\alpha) = - D_1 \sin(\gamma + \alpha) + D_1 \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma} [\omega - (\gamma + \alpha)].$$

Entwickeln wir die rechte Seite in eine Maclaurinsche Reihe nach Potenzen von α, so folgt:

$$c_1 = - f^{I}(o) = D_1 \left(\cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma}\right)$$

$$c_2 = - \frac{f^{II}(o)}{2} = - \frac{D_1}{2} \sin \gamma$$

$$c_3 = - \frac{f^{III}(o)}{6} = - \frac{D_1}{6} \cos \gamma$$

$$c_4 = - \frac{f^{IV}(o)}{24} = + \frac{D_1}{24} \sin \gamma$$

Mithin ergibt sich:

$$(24) \quad K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - D_1 \left(\cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma}\right) \alpha + \frac{D_1}{2} \sin \gamma \, \alpha^2 + \frac{D_1}{6} \cos \gamma \, \alpha^3 - \frac{D_1}{24} \sin \gamma \, \alpha^4 - \ldots$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus folgt:

$$(25)\quad \vartheta_1 = -\vartheta + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\operatorname{cotg}\gamma + \dfrac{1}{\omega-\gamma}}\,\vartheta^2 - \left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{\operatorname{cotg}\gamma + \dfrac{1}{\omega-\gamma}}\right)^2\vartheta^2$$

$$+\left[2\left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{\operatorname{cotg}\gamma + \dfrac{1}{\omega-\gamma}}\right)^3 + \frac{1}{18}\,\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\left(\operatorname{cotg}\gamma + \dfrac{1}{\omega-\gamma}\right)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{60}\,\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\operatorname{cotg}\gamma + \dfrac{1}{\omega-\gamma}}\right]\vartheta^4$$

Entsprechend lauten die Gleichungen für T, T_1, T_2.

Was die experimentellen Untersuchungen zur Bestätigung dieser theoretischen Ueberlegungen anlangt, so sei dazu nur kurz folgendes bemerkt[1]): In den unten angeführten Arbeiten sind die Schwingungen und auch der p. 23 behandelte Fall der Ablenkungen untersucht für den Fall, daß die Glieder mit höheren als zweiten Potenzen vernachlässigt werden können. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir für ϑ_1 die Gleichung:

$$(26)\quad \vartheta_1 = -\vartheta + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\operatorname{cotg}\gamma + \dfrac{1}{\omega-\gamma}}\,\vartheta^2.$$

Zur Bestätigung dieser Formel wurde folgendermaßen verfahren:

Es wurden einerseits die Umkehrpunkte bei Schwingungen beobachtet und nach Reduktion auf den Bogen wurde gebildet:

$$\frac{|\vartheta_1| - |\vartheta|}{\vartheta^2} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\operatorname{cotg}\gamma + \dfrac{1}{\omega-\gamma}}$$

Andererseits wurde der Ausdruck auf der rechten Seite direkt berechnet aus den gemessenen Größen ω und γ. Beide Werte zeigten um so größere Uebereinstimmung, je kleiner die Schwingungen waren, was nach der Theorie zu erwarten war.

Man hätte auch so verfahren können, daß man zunächst aus den gemessenen Größen ω und γ den Koeffizient von ϑ^2, und alsdann zu jedem Werte ϑ den zugehörigen Wert ϑ_1 berechnete, was im Prinzip zwar auf dasselbe hinauskommt, indessen für den Vergleich mit den beobachteten Werten ϑ_1 übersichtlicher wäre.

Für die Untersuchung der Ablenkungen wurde der Torsionskopf, nachdem die Einstellungen ω und γ beobachtet waren,

1] Ausführliches darüber findet sich in: P. Schulze Diss. p. 30 u. f. F. A. Schulze p. 1119 u. R. v. Förster: Ueber die Asymmetrie der Ablenkungen und ihren Zusammenhang mit der Asymmetrie der Schwingungen bei einem magnetischen Horizontalintensitätsvariometer Dissert. Marburg 1905.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

um gleiche Winkel nach links und rechts gedreht, aus den beiden Ablenkungen μ_1 und μ_2 berechnet und der aus ihnen gefundene Wert $\frac{2}{3}\,\frac{\mu_2}{\mu_1^2}$ mit dem obigen Resultat verglichen, wobei sich die gleiche Uebereinstimmung zeigte. Endlich führten auch die Beobachtungen der Schwingungsdauern zu dem gleichen Ergebnis.

Man könnte daher geneigt sein anzunehmen, daß es überhaupt bei allen Untersuchungen asymmetrischer Schwingungen und Ablenkungen genügt, wenn man nur die Glieder mit zweiten Potenzen in ϑ berücksichtigt.

Betrachten wir indessen die Gleichung:

$$\vartheta_1 = -\vartheta - \frac{2}{3}\,\frac{c_2}{c_1}\,\vartheta^2 - \left(\frac{2}{3}\,\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \vartheta^3 - \cdots$$

genauer, so zeigt sich, daß die Entscheidung darüber, ob das dritte Glied in Fortfall kommen kann oder nicht, nicht nur von der Größe des ersten Bruches ϑ, sondern auch von der Größe der Koeffizienten abhängt. Ist ϑ so groß, daß bei ϑ^3 noch solche Stellen auftreten, die innerhalb der Genauigkeitsgrenzen liegen und ist $\frac{2}{3}\,\frac{c_2}{c_1}$ groß, so wird man auch das dritte Glied noch berücksichtigen müssen. In den ersten drei von mir mitgeteilten Messungsreihen war $\frac{2}{3}\,\frac{c_2}{c_1}$ nur klein. Hier konnte das dritte Glied daher ohne weiteres in Fortfall kommen. Die beiden ersten Fälle besitzen außerdem, da sie als unvollkommene Messungen überhaupt nur dazu dienten, die Asymmetrie in dem theoretisch berechneten Sinne nachzuweisen, nicht den Wert wie die vollkommenen Messungen.

Im vierten Falle aber war der Koeffizient erheblich größer, (d. h. $\omega-\gamma$ war gegen γ groß), und hier zeigt sich in der Tat, daß die Berücksichtigung des drittes Gliedes eine Verbesserung in dem theoretisch berechneten Sinne mit sich brachte, wie die folgende der vierten Messungsreihe entnommene Zusammenstellung zeigt, in der ϑ_1 berechnet ist unter Berücksichtigung zweiter und dritter Potenzen von ϑ.[1])

Gemessen:

$$\omega = 261{,}8^0 = 4{,}5553$$
$$\gamma = 72^0\,28^{\mathrm{I}} = 1{,}2648$$

Berechnet:

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}} = 0{,}5418.$$

[1]] Vergl. P. Schulze, Dissert p. 48.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ϑ beobachtet	ϑ_1 beobachtet	ϑ_1 berechnet unter Berücksichtigung des Gliedes mit ϑ^3	mit ϑ^2
0.2250	0.2061	0.2009	0.1976
0.1757	0.1645	0.1618	0.1602
0.1217	0.1164	0.1142	0.1137
0.0824	0.0804	0.0792	0.0787
0.0562	0.0553	0.0546	0.0545
0.0268	0.0265	0.0264	0.0264

Wenn man nun auch aus dieser Messungsreihe erkennt, daß bei Berücksichtigung des dritten Gliedes tatsächlich eine größere Annäherung an die wirkliche Beobachtung erzielt wird, so sieht man doch andererseits, daß die erzielte Verbesserung in diesem Falle nicht so erheblich ist, daß sie unbedingt berücksichtigt werden müßte. Indessen ist hierbei aber zu bedenken, daß die vorstehenden experimentellen Untersuchungen keineswegs Präzisionsmessungen waren, sondern ebenso wie auch bei der Wage an einem gewöhnlichen Demonstrationsinstrument vorgenommen wurden, sodaß instrumentelle Fehler garnicht berücksichtigt sind. Insbesondere ist die elastische Nachwirkung bei der Torsion des Drahtes nicht berücksichtigt worden. Für den damaligen Fall war das auch nicht erforderlich, da es sich nur darum handelte, nachzuweisen, ob überhaupt Theorie und Beobachtung in Einklang gebracht werden können.

Bei den Unifilarmagnetometern aber, die für erdmagnetische Untersuchungen verwendet werden, sind alle instrumentellen Fehler auf ein Minimum herabgedrükt. Bei diesen läßt sich außerdem sowohl bei den Beobachtungen, wie auch bei den Berechnungen ein höherer Genauigkeitsgrad erzielen, so daß, da die Berechnungen auf mindestens 5 Dezimalstellen noch genau sind, das dritte Glied auch schon bei kleineren Schwingungen in Betracht kommt. Dann aber kommt hinzu, daß bei diesen Instrumenten, und besonders trifft das bei dem Eschenhagen'schen Unifilarmagnetometer zu, die Asymmetrie, d. h. der Winkel $\omega - \gamma$, ganz besonders groß gemacht werden kann. In diesem Falle ist die Hinzunahme des dritten Gliedes jedenfalls nötig.

2. Ablenkungen bei einem Magnetometer.

Die Ablenkungen an einem Unifilarmagnetometer können nun auf verschiedene Weise hervorgebracht werden. Einige dieser Fälle, insbesondere die für die erdmagnetischen Untersuchungen wichtigen, sollen im folgenden besprochen werden.

1. Ablenkungen durch weitere Drehung des Torsionskopfes.

Befindet sich der aus dem Meridian um den Winkel γ abgelenkte Magnet in der Ruhelage, so gilt als Geichgewichtsbedingung:

$$D_1 \sin \gamma = D_2 (\omega - \gamma)$$

dreht man nun den Torfionskopf um einen kleinen Winkel ε, so

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

folgt der Magnet der Drehung um einen kleinen Winkel β und die neue Gleichgewichtsbedingung ist:

$$D_1 \sin(\gamma + \beta) = D_2 [\omega + \varepsilon - (\gamma + \beta)]$$

oder unter Benuzung der vorhergehenden Gleichung:

$$D_1 \sin(\gamma + \beta) = \frac{D_1 \sin\gamma}{\omega - \gamma} [\omega + \varepsilon - (\gamma + \beta)]$$

oder: $$-\frac{D_1 \sin\gamma}{\omega - \gamma} \cdot \varepsilon = -D_1 \sin(\gamma + \beta) + D_1 \frac{\sin\gamma}{\omega - \gamma} [\omega - (\gamma + \beta)]$$

Entwickeln wir die rechte Seite in eine Reihe, so folgt schließlich:

$$-D_1 \frac{\sin\gamma}{\omega - \gamma} \cdot \varepsilon = -D_1 \left(\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\omega - \gamma}\right) \beta + \frac{D_1}{2} \sin\gamma\, \beta^2$$
$$+ \frac{D_1}{6} \cos\gamma\, \beta^3 - \frac{D_1}{24} \sin\gamma \cdot \beta^4$$

In die früher abgeleitete allgemeine Formel haben wir zu setzen:

$$\delta_0 = \varepsilon, \quad a_0 = -D_1 \frac{\sin\gamma}{\omega - \gamma}, \quad a_1 = a_2 = \ldots = O$$

Dann ergiebt sich nach einigen Umformungen schließlich:

$$(27) \quad \beta = \frac{1}{(\omega - \gamma) \operatorname{cotg}\gamma + 1} \varepsilon + \frac{\omega - \gamma}{2[(\omega - \gamma)\operatorname{cotg}\gamma + 1]^3} \varepsilon^2$$
$$+ \left[\frac{(\omega - \gamma)^2}{2[(\omega - \gamma)\operatorname{cotg}\gamma + 1]^5} + \frac{(\omega - \gamma)\operatorname{cotg}\gamma}{6[(\omega - \gamma)\operatorname{cotg}\gamma + 1]^4}\right] \varepsilon^3$$
$$+ \left[\frac{(\omega - \gamma)^3}{2[(\omega - \gamma)\operatorname{cotg}\gamma + 1]^7} + \frac{5}{12} \frac{(\omega - \gamma)^2 \operatorname{cotg}\gamma}{[(\omega - \gamma)\operatorname{cotg}\gamma + 1]^6}\right.$$
$$\left. - \frac{\omega - \gamma}{[(\omega - \gamma)\operatorname{cotg}\gamma + 1]^5}\right] \varepsilon^4 + \ldots$$

Dieser Fall der Ablenkungen ist von R. v. Foerster, allerdings nur unter Berücksichtigung des zweiten Gliedes eingehend behandelt worden.[1])

2. Ablenkungen durch einen zweiten Magneten.

Ein zweiter Fall unsymmetrischer Ablenkungen kann dadurch hervorgebracht worden, daß man einen zweiten Magneten in die Nähe bringt und zwar so, daß er zu beiden Seiten der Ruhelage eine symmetrische Lage einnimmt.

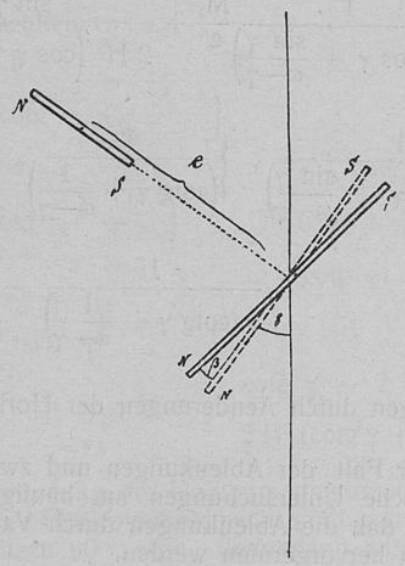
Gehen wir hier wieder von der Ruhelage aus, so lautet die Gleichgewichtsbedingung:

$$D_1 \sin\gamma = D_2 (\omega - \gamma).$$

Wir bringen nun einen zweiten Magneten in eine solche Lage zu dem ersten, daß die Achse des zweiten Magneten senk-

1) R. v. Förster: s. v. Dissert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Figur 3.

recht steht auf der Achse des ersteren, wenn dieser in der Ruhelage sich befindet, und daß die Verlängerung der Achse des festen Magneten durch den Mittelpunkt des beweglichen hindurchgeht. Wird dann der bewegliche Magnet hierdurch um den Winkel β abgelenkt und bedeuten M und M_1 die magnetischen Momente des beweglichen und des festen Magneten, so lautet die neue Gleichgewichtsbedingung:

$$D_1 \sin(\gamma + \beta) - \frac{D_1 \sin \gamma}{\omega - \gamma} [\omega - (\gamma + \beta]) = \frac{M M_1}{e^3} \cos \beta$$

Hierin bedeutet e den Abstand der Mitten beider Magnete. Durch Reihenentwicklung folgt:

$$-\frac{M M_1}{e^3}\left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24} - \ldots\right) = -D_1 \left(\cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma}\right) \beta$$

$$+ \frac{D_1}{2} \sin \gamma\, \beta^2 + \frac{D_1}{6} \sin \gamma\, \beta^3 - \frac{D_1}{24} \sin \gamma\, \beta^4 - \ldots$$

In die obige allgemeine Ablenkungsformel haben wir also zu setzen:

$$\delta o = -\frac{M M_1}{e^3},\ a_0 = 1,\ a_1 = a_3 = a_5 = \ldots O,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_4 = \frac{1}{24}$$

Dann folgt schließlich, wenn man noch berücksichtigt, daß $D_1 = M H$ ist, worin H die Horizontal-Intensiät bedeutet:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(28)\ \beta = -\frac{1}{H\left(\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\omega-\gamma}\right)}\frac{M_1}{e^3} + \frac{\sin\gamma}{2\,H^2\left(\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\omega-\gamma}\right)^3}\left(\frac{M_1}{e^3}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2\,H^3\left(\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\omega-\gamma}\right)^3}\left\{\frac{1}{\left(\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}\right)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3\left(\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}\right)} - 1\right\}\left(\frac{M_1}{e^3}\right)^3 - \ldots$$

3. Ablenkungen durch Aenderungen der Horizontal-Intensität.

Ein dritter Fall der Ablenkungen und zwar derjenige, der für erdmagnetische Untersuchungen am häufigsten in Betracht kommt, ist der, daß die Ablenkungen durch Variationen der Horizontalintensität hervorgerufen werden.

Aendert sich die Horizontalintensität um den Betrag δH, so ändert sich die Ablenkung um den Betrag β. Dann lautet die Gleichgewichtsbedingung:

$$M\,(H + \delta H)\sin\,(\gamma + \beta) - D_2\,(\omega - \gamma - \beta) = o.$$

$$M\,H\,\sin\,(\gamma + \beta) - \frac{M\,H\,\sin\gamma}{\omega-\gamma}\,(\omega-\gamma-\beta) = -\,M\,\delta H\sin\,(\gamma+\beta)$$

Hieraus ergibt sich schließlich:

$$\delta\,H\left\{M\sin\gamma + M\cos\gamma\,\beta - \frac{M\sin\gamma}{2}\beta^2 - \frac{M\cos\gamma}{6}\beta^3 + \ldots\right\}$$

$$= -\,M\,H\left(\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\omega-\gamma}\right)\beta + \frac{M\,H}{2}\sin\gamma\,\beta^2 + \frac{M\,H}{6}\cos\gamma\,\beta^3 - \ldots$$

In die allgemeine Ablenkungsformel ist also einzusetzen:

$$a_0 = M\sin\gamma \qquad a_1 = M\cos\gamma \qquad \delta_0 = \delta\,H$$

$$a_2 = -\frac{M\sin\gamma}{2} \qquad a_3 = -\frac{M\cos\gamma}{6}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dann folgt schließlich:

$$(29)\quad \beta = -\frac{1}{H\left(\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega - \gamma}\right)}\delta H$$

$$+\left(\frac{1}{2H^2\left(\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}\right)^3} + \frac{\operatorname{cotg}\gamma}{H^2\left(\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}\right)}\right)\delta H^2$$

$$-\left(\frac{1}{2H^3\left(\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}\right)^5} - \frac{3}{2}\,\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{H^3\left(\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}\right)^4}\right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{cotg}\gamma - 2\operatorname{cotg}^2\gamma}{2H^3\left(\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}\right)^3}\right)\delta H^3$$

Bei der Verwendung des Unifilarmagnetometers zur Messung der Variationen der Horizontalintensität stellt man das Instrument so ein, daß γ nahezu 90^0 wird, denn dann wird das vom Erdmagnetismus herrührende Drehungsmoment am größten. Nun bestimmt man aus Ablenkungen oder Schwingungsdauern den Skalenwert, d. h. denjenigen Wert δH, welcher der Aenderung der Horizontal-Intensität entspricht, wenn sich die Einstellung des Magneten um je einen Skalenteil (auf den Bogen reduziert) an der davor fest aufgestellten Skala ändert. Diese Bestimmung des Skalenwertes geschieht unter der Annahme, daß die Ablenkungen und Schwingungen symmetrisch sind. Dann entspricht einer Aenderung in der Einstellung des Magneten um n Skalenteile auch die n fache Aenderung der Horizontal-Intensität.

Da nun, wie vorher gezeigt ist, die Ablenkungen wie auch Schwingungen unsymmetrisch sind, und da die Asymmetrie gerade dann, wenn γ nahezu 90^0 ist, besonders groß wird, so entspricht einer Aenderung der Horizontal-Intensität um den Betrag δH nach entgegengesetzten Richtungen nicht derselbe absolute Betrag der Ablenkungen. Daraus folgt umgekehrt, daß auch den einzelnen Skalenteilen verschiedene Werte der Aenderungen von δH entsprechen.

M. Eschenhagen hat nun zwar, wie ich aus persönlichen Mitteilungen von Prof. Edler weiß, die Asymmetrie der Ablenkungen beobachtet; er hat dieselbe indessen dadurch eliminiert, daß er unter den Magneten einen zweiten legte und diesen solange verschob, bis die Ablenkungen resp. Schwingungen symmetrisch wurden.

Will man nun aber die Skalenwerte für das unsymmetrisch schwingende System bestimmen, so hat man für jeden Skalenteil die Aenderung δH festzusetzen. Dies läßt sich nun auf folgende Weise ausführen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dazu gehen wir aus von der Gleichung

$$M\delta H \sin(\gamma+\beta) = -MH\sin(\gamma+\beta) + \frac{M\,H\,\sin\gamma}{\omega-\gamma}\,(\omega-(\gamma+\beta))$$

und entwickeln δH nach Potenzen von β.

Dann ergibt sich unter Benutzung der früheren Formel:

$$(30)\quad \delta H = -H\left(\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}\right)\beta + \frac{H}{2}\left[1 + 2\operatorname{cotg}\gamma\left(\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}\right)\right]\beta^2 - H\left\{\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{3} + \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}\right)\left(1 + \operatorname{cotg}^2\gamma\right)\right\}\beta^3 - \ldots$$

Sind hierin nun die Größen: H, $\operatorname{cotg}\gamma$ und $\frac{1}{\omega-\gamma}$ bekannt, so kann man, für jeden Wert β, und damit auch für die Elongationen an der Skala den Wert δH berechnen. Für die einzelnen Skalenteile erhält man die Werte alsdann durch Subtraktion zweier aufeinanderfolgende Werte. Das Verfahren läßt sich indessen dadurch erheblich vereinfachen, daß man δH bestimmt etwa für die Teilstriche 10, 20, 30 . . . zu beiden Seiten der Ruhelage und durch Interpolation die entsprechenden Einzelwerte sucht.

Der Wert von H ist durch Absolut-Messungen gegeben, hingegen sind $\operatorname{cotg}\gamma$ und $\frac{1}{\omega-\gamma}$ zu bestimmen.

Das kann in verschiedener Weise geschehen:

1. Man benützt die Ablenkungen durch Drehung des Torsionskopfes um einen Winkel ε.

Bezeichnen wir in der Gleichung (27) die Koeffizienten von ε, ε^2, ε^3, ... mit μ_1 μ_2 . . ., also:

$$\beta = \mu_1\,\varepsilon + \mu_2\,\varepsilon^2 + \mu_3\,\varepsilon^3 + \mu_4\,\varepsilon^4 + \ldots$$

so lassen sich die Koeffizienten μ_1 μ_2 . . . aus mehreren Ablenkungen nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen. Dann erhalten wir aus

$$\frac{2\,\mu_2}{\mu_1^2} = \frac{\omega-\gamma}{(\omega-\gamma)\operatorname{cotg}\gamma + 1} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}}$$

eine Bestimmungsgleichung für $\operatorname{cotg}\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aus

$$\mu_1 = \frac{1}{(\omega-\gamma)\cot g\,\gamma + 1} = \frac{\frac{1}{\omega-\gamma}}{\cot g\,\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}}$$

läßt sich alsdann $(\omega-\gamma)$ und mithin auch $\cot g\,\gamma$ finden.

2. In ähnlicher Weise läßt sich auch die Ablenkung durch einen zweiten Magneten benützen. Aus der hier geltenden Gleichung:

$$(31)\quad \beta = -\mu_1 \frac{M_1}{e^3} + \mu_2 \left(\frac{M_1}{e^3}\right)^2 - \mu_3 \left(\frac{M_1}{e^3}\right)^3 + \ldots$$

bestimmt man, indem man den ablenkenden Magneten, dessen Moment bekannt ist, in verschiedene Entfernungen bringt, nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Koeffizienten $\mu_1 . \mu_2 \ldots$.

Dann folgt aus: $2\,\frac{\mu_2}{\mu_1^2} = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\omega-\gamma}} = \frac{1}{\cot\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}}$

eine Gleichung für $\cot g\,\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}$. Aus:

$$\mu_1 = \frac{1}{H\left(\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\omega-\gamma}\right)} = \frac{\frac{1}{\sin\gamma}}{H\left(\cot g\,\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}\right)}$$

erhalten wir, da auch H bekannt ist, eine Gleichung für $\sin\gamma$ und mithin auch für $\cot g\,\gamma$.

Uebrigens würde man eine ganz ähnliche Bestimmungsmöglichkeit haben, wenn man den ablenkenden Magneten so senkrecht zur Ruhelage des beweglichen legt, daß die Achse des letzteren durch den Mittelpunkt des festen Magneten geht (zweite Hauptlage).

Der Wert $\cot g\,\gamma - \frac{1}{\omega-\gamma}$, aber n u r dieser, kann auch durch Schwingungen bestimmt werden, indem man zu verschiedenen Werten ϑ die entsprechenden Werte ϑ_1 beobachtet. Der nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmte Koeffizient von δ_2 ergibt alsdann direkt eine Gleichung für $\cot g\,\gamma + \frac{1}{\omega-\gamma}$

In analoger Weise läßt sich derselbe Wert aus der Beobachtung der Schwingungsdauern ermitteln, indem man $\frac{T_2 - T_1}{T}$ bildet und diesen Wert für verschiedene Werte von ϑ berechnet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf