Der mineralogische Unterricht ist nach den allgemeinen Bestimmungen vom 28. Februar 1883, betreffend Änderungen in der Abgrenzung der Lehrpensa, auf den preufsischen Gymnasien der Obertertia zugewiesen. Da in dieser Klasse auch der Bau des menschlichen Körpers durchzunehmen ist, so mufs in der kurzen Zeit eines Halbjahres in 40 bis 50 Lehrstunden der Schüler mit einem neuen Zweige der Naturbeschreibung bekannt gemacht werden, welcher wegen der besonderen Eigenschaften, die das Gebiet des Unorganischen kennzeichnen, eine von der bisherigen oft sehr verschiedene Art der Darstellung erfordert, weil selbst bei elementarster Behandlung Thatsachen aus anderen, dem Schüler noch fremden Gebieten der Naturwissenschaften und der Mathematik herangezogen werden müssen. Dafs sich also dem mineralogischen Unterrichte, dem auf dieser Stufe alle Unterstützung seitens der Hilfswissenschaften: Stereometrie, Physik und Chemie fehlt, recht erhebliche Schwierigkeiten entgegenstellen, ist nicht zu leugnen. Ob und inwieweit diese auf chemisch-physikalischem Gebiete beseitigt werden können, ist eine Frage, die ich hier unerörtert lassen will; jedenfalls mufs man sich aber davor hüten, die rege Teilnahme, welche die Schüler chemischen und physikalischen Erscheinungen und besonders Versuchen entgegenbringen, zugleich als Mafsstab für ihr Verständnis gelten zu lassen. Bei dem gänzlichen Mangel physikalischer Kenntnisse über die einschlägigen Erscheinungen flüssiger und luftförmiger Körper dürfte namentlich die chemische Seite der Mineralogie die meisten Bedenken erregen.

Nicht minder grofs scheinen die Schwierigkeiten auf dem krystallographischen Gebiete zu sein; tritt ja hier aufser ungenügender Vorbereitung noch die bei manchem Schüler nicht geringe Abneigung gegen mathematische Denkthätigkeit erschwerend hinzu.

Und doch ist gerade dieser Zweig der Naturbeschreibung wie kein anderer geeignet, den Sinn für mathematische Vorstellungen zu wecken und zu beleben und dadurch der Mathematik einen grofsen Teil ihrer wirklichen oder auch nur eingebildeten Schwierigkeit zu nehmen. Erfahrungsmäfsig fallen ja manchem Schüler, auch in den oberen Klassen, stereometrische Vorstellungen aufserordentlich schwer, und ich suche einen der Gründe hierfür darin, dafs sich die Schüler von den Jahre lang geübten und in ihrem Geiste haftenden planimetrischen Bildern nicht losmachen können, weil ihnen nicht frühzeitig genug Gelegenheit geboten wurde, ihre räumliche Anschauung auszubilden. Indem nun schon der Obertertianer dazu angeleitet wird, seine planimetrischen Kenntnisse an Krystallen oder ihren Modellen zu verwerten, wird der spätere stereometrische Unterricht in wirksamster Weise vorbereitet, so dafs also hier die Krystallographie ähnliche Zwecke verfolgen kann, wie der vorbereitende geometrische Unterricht in Quinta. Es wird

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aber auch die mathematische Phantasie des Schülers durch solche Beschäftigung mit der Natur angeregt und sein Wissen erhält dadurch einen bedeutenderen Inhalt, dafs er hier zum ersten Male erkennt, welche strenge mathematische Gesetzmäfsigkeit in der Natur waltet und in welcher innigen Beziehung die Mathematik zur Naturwissenschaft steht.

Die hieraus erwachsende Aufgabe, die Schüler schon frühzeitig an der Hand der Naturwissenschaft in stereometrische Anschauungen einzuführen, rechtfertigt meiner Ansicht nach nicht nur die Beibehaltung bezw. Einführung der Mineralogie in die Obertertia des Gymnasiums, sondern auch die besondere Betonung der Krystallographie, was ja auch in den Lehrplänen vom 31. März 1882 seinen Ausdruck in der Forderung gefunden hat, die einfachsten Krystallformen zur Kenntnis der Schüler zu bringen. Die erfolgreiche Lösung der gestellten Aufgabe halte ich freilich nur dann für möglich, wenn die Krystallographie im Sinne eines stereometrischen Anschauungs-Unterrichtes behandelt wird, der sich von speziell krystallographischen Abstraktionen, wie z. B. — um vorläufig nur das wichtigste hervorzuheben — der symbolischen Bezeichnungsweise, fern hält. — Die Teilnahme der Schüler am krystallographischen Unterrichte wird leicht durch kleine Versuche[1]) über die Krystallisation des Kochsalzes, Alauns und ähnlicher Salze geweckt und gefördert; ebenso macht ihnen die Vergleichung der künstlich dargestellten oder aus der Sammlung vorgelegten (gut ausgebildeten) Krystalle mit den entsprechenden Modellen Freude. Ihr Eifer für die Sache bethätigt sich dann häufig dadurch, dafs sie unaufgefordert die verschiedenartigsten Pappmodelle anfertigen. Freilich dauert dieser Thatendrang meist nicht lange; ihre anfangs rege Teilnahme am Unterrichte erlahmt nur zu oft in demselben Mafse, als sich die zur Durchnahme bestimmten Krystallgestalten mehren. Einen grofsen Teil der Schuld an der schnell eintretenden Ermattung und der damit zusammenhängenden Erfolglosigkeit des krystallographischen Unterrichts schiebe ich auf die üblichen Modelle, namentlich auf diejenigen, die sich die Schüler selbst anfertigen, an denen sie also den geeignetsten Übungs- und Wiederholungsstoff besitzen sollten. Das geschlossene, unzerlegbare Krystallmodell, sei es aus Pappe, Holz oder Glas, genügt nach meiner Erfahrung für den elementaren krystallographischen Unterricht nicht, um dem Schüler ein klares und anschauliches Bild von den einfachsten Gesetzen der Krystallographie zu liefern. Die vielen ungewohnten Abstraktionen, zu denen der Schüler durch solche Modelle gezwungen wird, wirken ermüdend und lähmend auf den Gang des Unterrichtes; der Schüler vergifst bald den Zusammenhang und die Ableitungsgesetze, die er den von einander getrennten, noch dazu oft in ganz unpassenden Gröfsenverhältnissen stehenden Modellen nicht ansehen kann; er verliert damit gleichzeitig das Verständnis für den Unterricht und die Freude an seiner Sammlung, die ihm nicht viel mehr als ein Spielzeug gewesen ist, das als nutz- und wertlos verworfen wird, sobald sich ihm keine neue Seite mehr abgewinnen läfst. Soll die Teilnahme des Schülers für die Krystallographie auf dieser Stufe erhalten werden, so mufs ihm alles so deutlich und anschaulich wie möglich gemacht werden; jeder Schnitt, der am Modelle vorgenommen werden soll, mufs seine Schnittlinien und -flächen erkennen lassen, die Gestalt und Gröfse der abgeschnittenen Stücke ist, namentlich zu Anfang, dem Schüler ebenso deutlich zu zeigen, wie der übrig bleibende, abgeleitete Körper. Damit hängt wieder zusammen, dafs Grundform und abgeleitete Form in ihrem natürlichen Gröfsenverhältnisse aufgefafst werden, dafs also dem Schüler nicht Oktaeder

---

[1]) Vergl. z. B. Reidt, Vorschule der Mineralogie, S. 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und Würfel neben einander in beliebigen Achsenlängen gezeigt werden dürfen, wenn man ihm klar machen will, dafs der eine Körper aus dem anderen entstanden sei.

In einigen der eben erwähnten Punkte werden die durchsichtigen Glasmodelle, welche im Innern die abgeleitete oder die Grundform erkennen lassen, den Anforderungen des Anschauungs-Unterrichts gerecht; sie erfüllen aber ihren Zweck nicht, wo es darauf ankommt, Schnittlinien und -flächen oder abgeschnittene Stücke deutlich zu machen. Ein anderer Übelstand dieses in mancher Hinsicht vortrefflichen Lehrmittels liegt meines Erachtens auch darin, dafs man dem Schüler gleich Grundform und abgeleiteten Körper zusammen als etwas Ganzes, Fertiges vorstellen mufs, wobei der Schüler nicht auf den ersten Blick die Grundform zu erkennen vermag. Störend wirkt dies namentlich bei Ableitung der hemiedrischen Gestalten, wo der Schüler im Gegensatz zum früher Gelernten den umhüllenden Körper als den abgeleiteten aufzufassen hat. Diesen Mifsständen habe ich durch Konstruktion zerlegbarer Krystallmodelle abzuhelfen gesucht[1]). In den meisten dieser Modelle liegt, wie bei den gläsernen, der eine Körper in dem anderen eingeschlossen, der umhüllende Teil ist aber nach gewissen Hauptrichtungen in zwei oder mehrere Teile zerschnitten. In diesen offenen umhüllenden Teilen ist die Form des eingeschlossenen Teiles, gleichsam wie ein Abdruck, sichtbar. Wie diese Modelle den oben aufgestellten Anforderungen der Anschaulichkeit genügen, will ich in den folgenden Abschnitten, die dem krystallographischen Unterrichtsstoffe gewidmet sind, zu zeigen suchen. An dieser Stelle möchte ich aber gleich noch zwei für die Schule recht wesentliche Eigenschaften dieser Modelle hervorheben: erstens ihre Billigkeit und zweitens ihre leichte Herstellbarkeit. Die Kosten der Anfertigung sind im Vergleich mit den Preisen der käuflichen Glasmodelle verschwindend klein. Das Oktaeder im Würfel kostet beispielsweise 3,50 M, der Pyramidenwürfel im Pyritoeder gar 6 M[2]); dagegen kommen die Herstellungskosten der ganzen Sammlung, die aus den von mir konstruierten Netzen hervorgeht, kaum in betracht: sie betragen, die Anschaffung der Netze eingerechnet, ungefähr 4 M. Dazu kommt nun noch der unbestreitbare Vorteil, den die Schüler aus der selbständigen Anfertigung der Modelle ziehen können; freilich ist sie mühsamer und zeitraubender als die der einfachen, geschlossenen Formen; der Schüler wird jedoch für die aufgewandte Mühe und Zeit dadurch entschädigt, dafs er sich einen Anschauungs- und Übungsstoff schafft, dem er auch selbständig (z. B. durch verschiedenartige Zusammensetzung der Teile, Messungen der Achsen und Winkel u. s. w.) neue Seiten abgewinnen kann.

Um Mifsverständnissen vorzubeugen, will ich hier ausdrücklich bemerken, dafs ich nicht wünsche, das Anfertigen der Modelle obligatorisch zu machen, sondern dem Lehrer die Auswahl geeigneter Schüler empfehle, welche mit Hilfe der von der Schule zur Verfügung zu stellenden Netze eine Modellsammlung für die Schule anzufertigen haben. Die Anschaffung der Netze seitens der Schüler ist natürlich vollständig freizustellen. Über die Art der Anfertigung und der Beteiligung der Schüler dabei habe ich mich in dem begleitenden Texte, der den Netzen beigegeben ist, ausführlich ausgesprochen; besondere Berücksichtigung habe ich auch den Farben, die den verschiedenartigen Flächen und Kanten der Körper durch Bekleben mit buntem Papiere zu geben sind, angedeihen lassen. Zu diesem Zwecke sind viele Flächen

---

[1]) Die Netze zum Anfertigen zerlegbarer Krystallmodelle sind in R. Gaertners Verlag, H. Heyfelder, Berlin 1888, erschienen.

[2]) Vgl. den Katalog von Warmbrunn, Quilitz u. Co. Abt.: Chemie. 1885.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Netze mit Buchstaben (o und i) bezeichnet, wobei im allgemeinen die Anordnung getroffen ist, dafs die Flächen der äufseren Oberfläche einerlei Farbe (o) und ebenso die der inneren Oberfläche, also alle Schnittflächen, inneren Hohlräume u. s. w., eine von der ersten verschiedene Farbe (i) erhalten. In den Beschreibungen der Modelle, die den einzelnen Abschnitten folgen, werde ich hierüber noch ausführlicher zu sprechen haben.

Meine ursprüngliche Absicht, die Netze als Anhang zu dieser Abhandung herauszugeben, mufste ich bei dem Umfange, den die Sache bei der Bearbeitung annahm, fallen lassen. Dadurch wurde der Plan für diese Arbeit wesentlich und nicht zum Vorteile der Darstellung verändert. Die Schwierigkeiten, welche sich der Beschreibung der Körper dadurch entgegenstellen, dafs ich den Leser nicht auf die Netze verweisen kann, habe ich durch die Beigabe der Figurentafel einigermafsen zu heben gesucht. Diese Figuren, welche nur die hauptsächlichsten Zerlegungen veranschaulichen sollen, stellen nicht etwa jede für sich einen einzigen Körper dar, sondern einen aus mehreren Stücken zusammensetzbaren; von den umhüllenden Teilen ist meist nur ein gewisses Stück gezeichnet, um die ausgeführten Schnitte recht deutlich zu machen und den umhüllten Körper nicht zu sehr zu verdecken.

In den nachfolgenden Abschnitten ist der krystallographische Elementar-Unterricht so geschildert, wie ich ihn mir mit Rücksicht auf eine stereometrische Propädeutik unter Benutzung der zerlegbaren Krystallmodelle zurecht gelegt habe. Dabei soll die hier innegehaltene Anordnung des Stoffes für den Unterricht in keiner Weise als mafsgebend betrachtet werden; erwähnen will ich aber, dafs ich es für zweckmäfsig gefunden habe, zuerst den Inhalt der vier ersten Abschnitte hintereinander zu besprechen, damit die drei Hauptkörper des regulären Systems: Würfel, Oktaeder und Tetraeder in ihrem Zusammenhange von den Schülern vollständig erfafst werden. Dann lasse ich die vollständige Beschreibung des Bleiglanzes folgen, wobei ich mich ganz an die von *Reidt, Vorsch. der Min. S. 9*, vorgeschriebene Reihenfolge halte. Es werden dabei auch diejenigen physikalischen und chemischen Eigenschaften hervorgehoben und durch ganz einfache Versuche erläutert, welche den Bleiglanz vom Blei unterscheiden. Dann gehe ich zum Quarze über und wähle in systematischer Folge (Silikate, Salze, Erze, Brenzen) die wichtigsten Mineralien, welche gröfstenteils später aufgeführt sind, zur Besprechung aus.

Die Überschriften der einzelnen Abschnitte lassen schon erkennen, in welcher Ausdehnung der krystallographische Stoff behandelt wird; Vollständigkeit kann natürlich bei der Kürze der Zeit nach keiner Seite hin erstrebt werden. Dem regulären Systeme ist der meiste Platz eingeräumt und es sind namentlich die Beziehungen zwischen Würfel, Oktaeder und Tetraeder wegen ihrer stereometrischen Wichtigkeit sehr eingehend behandelt. Die weniger häufigen Holoeder des regulären Systems: Leucitoeder, Pyramidenoktaeder und Diamantoeder sind fortgelassen und damit beschränkt sich auch die Zahl der regulären Hemieder auf das Tetraeder und Pyritoeder. Das nächst wichtigste System, das hexagonale, ist auch noch durch eine gröfsere Mannigfaltigkeit von Krystallgestalten und Kombinationen vertreten; die gröfste Beschränkung habe ich mir dagegen, was die Auswahl der Körper anbetrifft, in den vier übrigen Systemen auferlegt. Wenn die Schüler hier an ganz wenigen, unter sich gleichartigen Gestalten (Säulen) eine klare Vorstellung von den verschiedenen Achsensystemen, ihren gemeinsamen und unterscheidenden Merkmalen erhalten, so genügt das, glaube ich, vollauf für den ersten Unterricht. Der für die richtige stereometrische Auffassung dieser Dinge bei weitem lehrreichsten Gestalt, der klinorhombischen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Säule, sind mehrere Modelle gewidmet, welche die verschiedenen Kantenabstumpfungen, die Spaltungsflächen des Orthoklases u. a. veranschaulichen sollen. Die Oktaeder dieses und des klinorhomboidischen Systems sind fortgelassen.

Bei dieser Auswahl der Körper hoffe ich zwischen zu enger Begrenzung, die dem Stoffe zu wenig gerecht wird, und zu grofser Mannigfaltigkeit, die verwirrend wirkt, die richtige Mitte gehalten zu haben. Gegen den (immerhin möglichen) Vorwurf der Überladung mit Stoff kann ich bemerken, dafs mit Hilfe der zerlegbaren Modelle die meisten Schüler nach Überwindung der ersten Schwierigkeiten ganz von selbst die Ableitungsgesetze finden lernen und bei der Wiederholung das Vorzeigen des betreffenden Modelles genügt, um den durchgenommenen Stoff in das Gedächtnis der Schüler zurückzurufen; ich habe dadurch im Unterrichte viel Zeit und Worte gespart. — Ob ich bei den zerlegbaren Modellen unter der Menge der möglichen Zerlegungen stets die geeignetsten gewählt habe, mufs ich dem Urteile der Fachgenossen überlassen; jedenfalls würde ich für Ratschläge, welche den Versuch, zerlegbare Pappmodelle beim Unterrichte einzuführen, unterstützen, sehr dankbar sein.

Schliefslich habe ich noch einige Bemerkungen über die Art und Weise der Darstellung vorauszuschicken. Jeder Abschnitt ist in zwei Teile a. und b. geteilt; unter a. ist der Unterrichtsstoff, unter b. sind die Modelle behandelt. Bei Darlegung des ersteren habe ich manches nur angedeutet, wie z. B. die Beschreibungen der Krystallgestalten, den Verlauf der Achsen, Erklärung der Namen u. a., was im Unterrichte selbstverständlich vollständig ausgeführt werden mufs; bei anderen Punkten, den Ableitungsgesetzen der Körper, stereometrischen Beziehungen derselben, Berücksichtigung des Zusammenhanges zwischen Krystallographie und Naturbeschreibung, bin ich aber aus didaktischen Gründen ziemlich ausführlich gewesen. Den letzten Punkt zu betonen erscheint mir wesentlich, weil einerseits die Krystallographie leicht Gefahr läuft, nur Mathematik zu treiben, andererseits gerade durch Hinweise darauf, wie sich die Krystallographie durch scharfsinnige Beobachtung der Natur entwickelt hat, welche Schlüsse sich aus den verschiedenen Krystallformen und Kombinationen eines Minerals auf die einzelne Gestalt und das System ziehen lassen, das Nachdenken der Schüler angeregt und dadurch ihre Teilname lebendig erhalten wird.

In der Darstellungsweise habe ich mich bemüht, den gelehrten Apparat, den Gebrauch wissenschaftlicher Kunstausdrücke u. s. w., möglichst einzuschränken. Dahin gehört, dafs ich die Säulen stets als einfache Formen im stereometrischen Sinne, nicht aber als Kombinationen der offenen Prismen mit ihren Pinakoiden auffasse, von einer Unterscheidung zwischen Prisma und Doma, zwischen Säulen erster und zweiter Art, namentlich aber von aller Symbolik absehe. In denjenigen Fällen, wo die krystallographische Bezeichnungsweise von der stereometrischen abweicht, habe ich mich der Schüler wegen für letztere entschieden. Dies betrifft z. B. die Unterscheidung zwischen Kanten- und Flächenwinkeln; unter Kantenwinkel ist stets der von zwei anstofsenden Kanten gebildete Winkel gemeint. Ferner wird das Wort *Pyramide* nicht, wie es vielfach in Leitfäden nach dem Vorgange *Naumanns* geschieht, auf die Doppelpyramide übertragen, für welche die Bezeichnungen: Oktaeder, Dihexaeder u. s. w. völlig ausreichend und zutreffend sind. Solche ungenauen Bezeichnungsweisen dürfen jedenfalls in Schulbüchern, wo sie nur Verwirrung in den Köpfen der Schüler anrichten, nicht vorkommen. Bei den Beschreibungen der Modelle unter b. habe ich möglichst Wiederholungen des unter a. bereits Gesagten zu vermeiden gesucht; doch mufsten auch hier nicht selten auf den Unterrichtsstoff bezügliche Bemerkungen eingeschaltet

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

werden; es sind meist solche, welche erst durch die Besonderheiten des zerlegbaren Modelles oder eines seiner Teile veranlafst und deshalb besser an die Beschreibung desselben angeknüpft wurden, oder auch solche, welche die zweckmäfsige Verwendbarkeit der Modelle auch im stereometrischen oder weniger elementaren krystallographischen Unterrichte darthun sollen. Bei der Aufzählung der Modelle ist gleichzeitig auf die Netze, die zu ihrer Anfertigung dienen können, hingewiesen. Nur wenige Netze kommen in der von mir herausgegebenen Sammlung, die ich nur als eine Ergänzung der bereits vorhandenen Hilfsmittel aufgefafst wissen möchte, nicht vor; bei diesen habe ich durch ein K. auf die *120 Krystallformennetze von Kenngott*, bei den übrigen durch ein V. auf meine Sammlung verwiesen. Die Angaben über die Achsen- oder Kantenlängen sollen den Leser über die Gröfse der Modelle unterrichten; sie ist so gewählt, dafs die Modelle als Demonstrationsobjekte vor der Klasse verwendet werden können, ohne dafs darunter ihre Handlichkeit zu sehr leidet.

Zeichnungen einfacher Krystallformen, die unter meiner Anleitung von den Schülern in der Klasse entworfen werden, lasse ich als häusliche Arbeit in ein besonderes Heft eintragen.

I. Das reguläre System.

§ 1. Ableitung des Kubooktaeders und Oktaeders aus dem Würfel.

a. Nachdem die Schüler durch Versuche über die Krystallisation des Kochsalzes und Alauns mit den beiden Grundformen, Würfel und Oktaeder, bekannt gemacht worden sind, weist man sie darauf hin, dafs die Natur durchaus nicht immer so einseitig verfährt, wie hier bei dieser raschen, stets auf dieselbe Weise erfolgenden Krystallbildung. Ihr Schaffen, das meist sehr lange Zeiträume beansprucht, ist von den verschiedenartigsten Umständen, dem Erstarren geschmolzener Massen, der Verdunstung wässeriger Lösungen, räumlicher Behinderung, Druck und vielen anderen Dingen, die wir dem fertigen Krystalle nicht mehr ansehen können, abhängig. Dadurch wird es begreiflich, dafs die Natur auch aus demselben Stoffe häufig die allerverschiedenartigsten Gestalten formt. So erscheinen z. B. beim Bleiglanze die beiden oben erwähnten Gestalten, Würfel und Oktaeder, oft neben einander und bei anderen, sehr verbreiteten Mineralen ist die Mannigfaltigkeit der Formen bisweilen eine aufserordentlich grofse. Diese sehr auffallende Erscheinung zu erklären, zu zeigen, dafs in dieser Vielheit von Gestalten keine Willkür, sondern Einheit, gesetzmäfsiger Zusammenhang herrscht, ist eine der ersten und hauptsächlichsten Aufgaben der Krystallographie.

Der Würfel (Kubus, Hexaeder), der mafsgebende Körper für die Stereometrie, soll uns auch als Grund- und Ausgangsform für die Krystallographie dienen. Nach seiner vollständigen Beschreibung werden die drei Achsen des Würfels[1]) mit allen ihren Eigenschaften erklärt und ihre ein für alle Male gültige Bezeichnungsweise und Stellung festgesetzt: die von rechts nach links verlaufende Horizontalachse heifst die x-Achse, die von vorn nach hinten gerichtete die y-Achse und die vertikale die z-Achse. Die Zeichnung eines Würfels mit seinen Achsen, die am besten nach einem Drahtmodelle an der Wandtafel in Parallel-Projektion entworfen wird und von den Schülern im verkleinerten Mafsstabe (1 : 10) nachzuzeichnen ist, soll die Schüler an stereometrisches

[1]) Vgl. Anm. S. 19.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zeichnen und Sehen gewöhnen. Die der x- und z-Achse parallelen Kanten werden 40 bezw. 4 cm lang, die der y-Achse parallelen Kanten 20 bezw. 2 cm lang genommen; die Achsen werden rot gezeichnet und mit den entsprechenden Buchstaben x, y, z benannt. Hierauf erklärt man die Benennung der drei aufeinander senkrechten Achsenebenen und die Lage der Würfelflächen zu diesen. Nun wird ein mit dem vorigen völlig übereinstimmendes Achsenkreuz an die Tafel gezeichnet; die 6 Endpunkte der Achsen werden durch 12 gerade Linien verbunden. Diese Zeichnung des Oktaeders in Parallel-Projektion hat erstlich den Zweck, die Schüler in dem Erkennen des Körpers aus der ebenen Figur zu üben; zweitens soll sie zeigen, dafs Würfel und Oktaeder in ihren Achsen vollständig übereinstimmen können, was durch 2 entsprechende Pappmodelle noch besonders veranschaulicht wird. Nachdem so die Schüler in dem gemeinschaftlichen Achsenkreuz eine erste Beziehung zwischen beiden Körpern gefunden haben, werden sie darauf hingewiesen, dafs gerade bei solchen Mineralien, welche in beiden Gestalten krystallisieren, wie z. B. dem Bleiglanze oder Flufsspate, häufig die Würfel unvollkommen ausgebildet sind: statt der Ecken treten Abstumpfungen in Gestalt kleiner Dreiecke auf; auch die Oktaeder zeigen ähnliche Unvollkommenheit, nur sind hier die Abstumpfungsflächen kleine Quadrate. Wir wollen zunächst diese Erscheinung beim Würfel genauer ins Auge fassen und die Abstumpfung an einem Modelle in ganz bestimmter, regelmäfsiger Weise ausführen. Die acht Ecken des Würfels sollen nämlich so abgeschnitten werden, dafs jede Schnittfläche durch die Mitte je dreier anstofsender Kanten geht. Dadurch entsteht ein Körper, der von sechs kongruenten Quadraten, den Überresten der Würfelflächen, und acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken, den neu entstandenen Schnittflächen, begrenzt wird. Jene Flächen stimmen in Zahl und Art mit den Würfelflächen, diese in gleicher Weise mit den Oktaederflächen überein; ferner ist die Neigung der Schnittflächen gegen die Achsenebenen dieselbe wie bei den Oktaederflächen. Der neue Körper zeigt also in seinen Begrenzungsstücken sowohl die Eigenschaften des Würfels als auch die des Oktaeders: er ist demnach als eine Mittelform zwischen beiden anzusehen und führt deshalb den Namen Kubooktaeder. Die Beschreibung desselben wird vervollständigt [1]), der Verlauf der Achsen angegeben und der Begriff der Kombination zweier Krystallformen erläutert. Auch die Gestalt einer abgeschnittenen Ecke — dreiseitige Pyramide mit regulärer Grundfläche — ist zu beschreiben und zu zeigen, dafs sich aus den acht Ecken ein Oktaeder, dessen Achsen mit denen des Würfels übereinstimmen, zusammensetzen läfst.

Beim Kubooktaeder stofsen je zwei benachbarte Abstumpfungsflächen in einem Punkte zusammen. Wird nun die Abstumpfung der acht Würfelecken parallel zu den bisherigen Schnittflächen gleichzeitig [2]) und gleichmäfsig weiter fortgesetzt, so werden je zwei benachbarte Abstumpfungsflächen sich gegenseitig in einer Linie durchschneiden müssen. Dabei verkleinern sich die Quadrate des Kubooktaeders, bis sie im weiteren Verlaufe der Abstumpfung schliefslich zu Punkten werden und das Oktaeder zum Vorschein kommt. Durch gleichzeitiges, in bestimmter gesetzmäfsiger Weise erfolgendes Abschneiden der Ecken eines Würfels kann man

[1]) Die Flächenwinkel bleiben unberücksichtigt. Vgl. § 2.

[2]) Die Vorstellung des gleichzeitigen Schneidens ist unerläfslich, wenn man ein richtiges Bild von den gleich grofsen abgeschnittenen Stücken gewinnen will. Beim mechanischen Herausschneiden des eingeschlossenen Oktaeders (z. B. aus einem Kartoffel-Würfel) müssen die Ecken selbstverständlich nacheinander abgeschnitten werden; eine deutliche Vorstellung von der Gröfse und Gestalt der schliefslich abgeschnittenen Stücke erhält man aber dadurch nicht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also aus ihm, dem umhüllenden Körper, das eingeschlossene, umhüllte Oktaeder von gleicher Achsenlänge herausschneiden[1]). Bei der Vergleichung beider Körper ist anzugeben, wie die Stücke (Flächen, Ecken, Kanten) sich gegenseitig entsprechen, wie die Achsen verlaufen, wie die Oktaederkante (-fläche) aus der Würfelkante (-fläche) konstruiert werden kann. Dann ist eins der acht Stücke zu beschreiben, die bei der Eckenabstumpfung des Würfels abfallen. Die Vergleichung des erhaltenen Oktaeders mit dem Kubooktaeder hat die Kongruenz der Dreiecksflächen beider Körper zu zeigen. Endlich kann noch das zwischen zwei parallelen Dreiecksflächen beider Körper herausgeschnittene Stück beschrieben und mit dem oben erwähnten Würfelstück verglichen werden.

b. Als Modelle dienen:

1. ein Würfel (V. I),
2. ein Kubooktaeder (V. II^{a}),
3. ein Oktaeder (V. III),

deren Achsen 5 cm lang sind; sie werden in der Weise, wie es Fig. 1 veranschaulicht, übereinandergesetzt. Eine Stricknadel, die als Vertikalachse durch die drei Körper gesteckt wird, dient zur Befestigung; ihre Enden werden mit Korken versehen, um ihr Herausgleiten zu verhüten. Die Würfelflächen und Quadrate des Kubooktaeders erhalten einerlei Farbe (z. B. rot), die Oktaederflächen und Dreiecke des Kubooktaeders eine andere (z. B. grün). Der Zweck dieser Zusammenstellung ist nach dem Vorhergehenden ohne weiteres ersichtlich; besonders sei hier noch auf die deutlich hervortretende parallele Lage der dreieckigen Flächen des Kubooktaeders und Oktaeders hingewiesen.

4. 8 Würfelecken (V. II^{b}),

welche das Kubooktaeder (2) zum Würfel (1) vervollständigen. Ihre gleichseitig-dreieckigen Flächen sind grün, die anderen rot zu bekleben. Vier davon schiebe man passend so an das Kubooktaeder heran, dafs sie auf dem Würfel ruhen. Die Lage einer solchen Ecke ist in Fig. 1 durch eine gestrichelte Linie angedeutet.

5. Das Oktaeder im Würfel (V. IV^{a-f}).

Dieses zerlegbare Modell besteht aus dem umhüllenden Würfel, dessen Kante 8 cm lang ist, und dem eingeschlossenen Oktaeder, welches in einen Hohlraum des ersteren pafst. Der umhüllende Körper ist durch drei aufeinander senkrechte Hauptschnitte in vier Teile zerlegt. Der erste (Fig. 2) stellt die Hälfte des in der xy-Ebene durchschnittenen Umhüllungs-Würfels, der zweite den vierten Teil und die beiden übrigen je den achten Teil desselben dar. In Fig. 2 ist nur die eine Würfelhälfte gezeichnet, in ihr das Oktaeder ruhend. Gegenseitige Lage der Körper, Verlauf der gemeinschaftlichen Achsen, Abhängigkeit der Kanten von einander, Neigung der Flächen u. a. treten augenfällig hervor. Die andere Hälfte des Umhüllungs-Würfels, die auf der ersten ruhend, das Oktaeder bedeckend zu denken ist, besteht aus drei Teilen, deren Schnittlinien in Fig. 2 punktiert gezeichnet sind. Die beiden (in der Figur rechts liegenden) Achtel des Umhüllungs-Würfels zeigen die Gestalt der Eckkörper, die bei der Entstehung des Oktaeders vom Würfel abfallen. Alle der äufseren Würfeloberfläche angehörigen Flächen des Modelles erhalten rote, die übrigen, auch die des eingeschlossenen Oktaeders, grüne Farbe. Stumpft man bei einem der eben erwähnten Achtel die ursprüngliche Würfelecke durch die Kubooktaederfläche ab, so erhält man das zwischen zwei parallelen Dreiecken liegende Stück des umhüllenden Kubooktaeders (V. IVe). Es lassen sich an

[1]) Die Spaltbarkeit des Flufsspates liefert dazu ein Beispiel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ihm die Wandlungen, welche die Schnittfläche beim Übergange von der einen zur anderen Dreiecksfläche durchmacht, leicht erklären. Das Maximum, ein reguläres Sechseck, liegt im mittleren Abstande der beiden kongruenten Grenzflächen.

§ 2. Ableitung des Kubooktaeders und Würfels aus dem Oktaeder.

a. Die oben erwähnten Abstumpfungen der Oktaederecken beim Bleiglanze führen dazu, das Verfahren, welches zur Ableitung des Oktaeders aus dem Würfel diente, auch auf das Oktaeder anzuwenden. Schneidet man nämlich von einem Oktaeder die sechs Ecken bis zu den Mitten der Kanten (also den Achsenebenen parallel) ab, so erscheint wieder die bereits besprochene Mittelform, das Kubooktaeder. Bei dieser Entstehung werden aber die Achsen der Grundform bis auf die Hälfte verkürzt; denn setzt man zwei der abgeschnittenen Ecken, welche vierseitige Pyramiden mit quadratischen Grundflächen darstellen, zu einer Doppelpyramide zusammen, so erhält man ein Oktaeder, das mit dem Kubooktaeder gleiche Achsen hat.

Wenn die Oktaederecken parallel zu den quadratischen Flächen des Kubooktaeders weiter als bis zu den Mitten der Kanten abgestumpft werden, so erhält bei zunehmender Verkleinerung der Oktaederflächen der Körper immer mehr Würfelgestalt, bis schliefslich nur noch die Mittelpunkte der Oktaederflächen als Ecken des neu entstandenen Würfels übrig bleiben. Der vom Oktaeder eingeschlossene Würfel berührt also mit seinen acht Ecken die Mittelpunkte der acht Oktaederflächen, seine Achsen sind gleich dem dritten Teile der Oktaederachsen. Hiernach läfst sich aus der gegebenen Kantenlänge des Oktaeders die des eingeschlossenen Würfels konstruieren.

b. Aufser dem Kubooktaeder (2) werden zur Erläuterung gebraucht:

6. 6 vierseitige Pyramiden (V. II^{c}),

welche das Kubooktaeder (2) zu einem Oktaeder von doppelter Achsenlänge vervollständigen. Die Seitenflächen der Pyramiden werden grün, die Grundflächen rot beklebt. Um die sechs Ecken auf den quadratischen Flächen des Kubooktaeders festzuhalten, dient ein halbes, hohles Oktaeder von 6 cm Kantenlänge, das man aus grün beklebtem Schreibpapiere anfertigt. In dieses setzt man erst eine Pyramide mit der Spitze nach unten gerichtet, darauf das Kubooktaeder mit vier seitlich angepafsten Ecken; die sechste, oberste, wird durch eine Stricknadel, die als Vertikalachse durch das ganze Modell geht, festgehalten.

7. Der Würfel im Oktaeder (V. V^{a-e}).

Das umhüllende Oktaeder, dessen Achse 12 cm lang ist, besteht aus drei Teilen: einer Hälfte und zwei Vierteln. Erstere ist in Fig. 3 mit dem zur Hälfte herausragenden eingeschlossenen Würfel, der lose in einer entsprechenden Vertiefung der Oktaederhälfte sitzt, dargestellt. Auf der Schnittfläche, der xy-Ebene, giebt die Diagonale des grofsen Quadrates die Achsenlänge des Oktaeders, die Seite des kleinen Quadrates die Achsenlänge (4 cm) des eingeschlossenen Würfels an. Die punktierten Linien deuten in der Figur den auszuführenden Schnitt an, der die Hälfte in zwei das umhüllende Oktaeder ergänzende Viertel teilt. Diese beiden Viertel haben zwei aufeinander senkrechte Schnittflächen: die eine ist ein Rechteck, aus welchem ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, die andere ein gleichschenkliges Dreieck, aus dem ein Rechteck herausgeschnitten ist. Setzt man die beiden Viertel mit den dreieckigen Schnittflächen aneinander, so erhält man die in Fig. 3 abgebildete Hälfte; werden sie aber mit den rechteckigen Schnittflächen zusammengesetzt, so ergiebt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich eine Hälfte, deren Schnittebene vier Höhen der Seitendreiecke enthält. Der in dieser Hälfte liegende Hohlraum zeigt die Form eines in der Diagonalebene halbierten Würfels; es tritt hier die Lage der Würfelecken in den Mitten der Oktaederflächen besonders deutlich hervor. Der halbierende Schnitt hat die Gestalt eines Rhombus; sein stumpfer Winkel giebt die Neigung der Oktaederflächen, den Flächenwinkel, an; er beträgt ungefähr $109^1/_2{}^\circ$[1]). Erst an dieser Stelle wird man den schiefen Flächenwinkel erklären. Alle der äufseren Oktaederoberfläche angehörigen Flächen erhalten grüne, die anderen, auch die des eingeschlossenen Würfels, rote Farbe.

§ 3. Ableitung des Tetraeders aus dem Würfel.

a. Vermittelst der Eckenabstumpfung läfst sich aufser dem Oktaeder noch eine andere wichtige Krystallgestalt, die beim Fahlerze sehr häufig ist, aus dem Würfel ableiten. An einem Würfel (vgl. b, 8), der in den im § 1 angegebenen Mafsen an der Tafel vorgezeichnet und von den Schülern nachgezeichnet wird, beziffere man die oberen Ecken, links vorn beginnend und nach rechts weiter gehend, mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, die unteren entsprechend mit 5, 6, 7, 8 und ziehe auf den Flächen die Diagonalen $\overline{13}$, $\overline{16}$ und $\overline{36}$. Wird durch diese Linien ein Schnitt gelegt, so fällt dadurch die ganze Ecke 2 vom Würfel ab. Nun ziehe man die Diagonalen $\overline{18}$ und $\overline{38}$; sie bestimmen zusammen mit $\overline{13}$ einen zweiten Schnitt, durch welchen die Ecke 4 fortfällt. Von der oberen Würfelfläche ist dann nur noch die Diagonale $\overline{13}$ als Kante übrig geblieben. Führt man schliefslich von der Diagonale $\overline{68}$ aus einen Schnitt nach der Ecke 1 und einen zweiten nach der Ecke 3, durch welche die Ecken 5 und 7 verschwinden, so sind nun von dem Würfel vier abwechselnd liegende Ecken, oben die mit geraden, unten die mit ungeraden Zahlen bezeichneten, fortgenommen. Der übrigbleibende Körper ist das Tetraeder. Die Zeichnung stellt den Würfel mit dem eingeschlossenen Tetraeder dar (Fig. 4). Um die Figur recht klar zu machen, ziehe man die sechs Diagonalen mit blauer Farbe und bestimme zugleich ihre Mittelpunkte. Die rot zu zeichnenden Verbindungslinien je zweier gegenüberliegender Mittelpunkte sind die Achsen beider Körper. Bei der Beschreibung des Tetraeders wird man seine dreiseitigen Ecken mit den Würfelecken vergleichen lassen und namentlich die Lage des Achsenkreuzes und die dadurch bedingte Normalstellung des Körpers auf einer Kante hervorheben. Es liegt darin ein wesentlicher Unterschied zwischen krystallographischer und stereometrischer Anschauung; letztere fafst das Tetraeder als eine dreiseitige Pyramide, also auf einer Fläche ruhend, auf. Der Vergleich des Tetraeders mit einer der vier abgeschnittenen Ecken, welche dreiseitige Pyramiden mit gleichseitigen Grundflächen sind, führt auf die Erklärung der geraden Pyramide und des regulären Körpers. Ferner wird darauf hinzuweisen sein, dafs das Tetraeder der einfachste polyedrische Körper ist, ähnlich wie das Dreieck die einfachste geradlinige ebene Figur ist. Die gegebene Ableitung des Tetraeders aus dem Würfel zeigt, wie aus der einen Fläche die andere konstruiert werden kann. Die abgeschnittenen Ecken sind den unter (4) im § 1 beschriebenen ähnlich.

b. Zur Erläuterung dient:

8. Das Tetraeder im Würfel (V. VI^{a-b}),

ein zerlegbares Modell, welches aus vier kongruenten dreiseitigen Pyramiden, den abgeschnittenen

---

[1]) Bezeichnet α den Flächenwinkel, so ist $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$, also $\alpha = 109^\circ\ 28'\ 16''$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Würfelecken, und dem von diesen umschlossenen Tetraeder besteht[1]). Die Achsenlänge des Modelles (Seitenkante der rechtwinkligen Ecken) ist 7,5 cm. Die der Würfeloberfläche angehörenden Flächen erhalten blaue, alle übrigen gelbe Farbe. Zur Veranschaulichung des Achsenverlaufs thuen auch zwei Drahtmodelle eines Würfels und Tetraeders von gleichen Achsen gute Dienste. Man verbindet in dem letzteren die Mitten je zweier gegenüberliegender Kanten durch Fäden und setzt es nun passend in den Drahtwürfel ein.

9. Die Kombination des Tetraeders mit dem Würfel (K. Nr. 80) erläutert eine Zwischenstufe der Entwicklung oder auch die Kantenabstumpfung des Tetraeders. Damit dieses Modell mit dem vorigen der Gröfse nach übereinstimme, macht man die Diagonale der ursprünglichen Würfelfläche, deren Rest ein symmetrisches Sechseck ist, gleich der Tetraederkante von (8); die Reste der Würfelkanten nehme man 2 cm lang. Die Sechsecke erhalten blaue, die Dreiecke gelbe Farbe.

§ 4. Ableitung des Tetraeders aus dem Oktaeder.

a. Wegen des einfachen und übersichtlichen Verlaufs der Achsen von einer Ecke zur gegenüberliegenden gilt in der Mineralogie nicht der Würfel, sondern das Oktaeder als Grundform, aus welcher sich alle verwandten Arten ableiten lassen müssen. Dies mufs also auch heim Tetraeder der Fall sein. Aus der Art, wie Oktaeder und Tetraeder aus dem Würfel entstehen, können wir schliefsen, dafs das Oktaeder als der kleinere Körper im Tetraeder eingeschlossen sein werde, woraus weiter folgt, dafs das Oktaeder wachsen mufs, um ein Tetraeder zu werden. Das Wachsen eines Krystalls besteht aber, wie z. B. die Oktaeder des Alauns erkennen lassen, häufig darin, dafs sich einzelne Flächen auf Kosten andrer in ihrer Ebene ausdehnen und so die benachbarten zum teil verdecken. Dieses Anwachsen der Oktaederflächen wollen wir nun in bestimmter, gesetzmäfsiger Ordnung vor sich gehen lassen. Ähnlich wie in § 3 beim Würfel die Ecken, sollen jetzt die Flächen des Oktaeders beziffert werden. Wachsen nun in der oberen Pyramide die Flächen 1 und 3 in ihrer Ebene über die benachbarten Dreiecke 2 und 4 fort, so werden sie sich in einer geraden Linie durchschneiden, welche durch die obere Spitze der Pyramide parallel zur xy-Ebene geht. Diese Linie soll zugleich die Grenze des Wachstums sein, so dafs also statt der oberen vier Pyramidenflächen nur noch zwei, wie ein Dach zusammenstofsende Flächen sichtbar sind. Gleichzeitig mit den beiden Flächen 1 und 3 sollen auch unten 6 und 8 über 5 und 7 hinauswachsen; dann wird von unten her ein Dach, dessen First durch die untere Pyramidenspitze geht und gegen den oberen um 90° gedreht erscheint, auf das obere zu wachsen und dabei seine Flächen rechts und links in je zwei Linien durchschneiden, so dafs nun mit den beiden Firstlinien zusammen sechs Schnittlinien entstehen, in denen das Wachstum beendigt ist. Damit ist aber der neue Körper, das Tetraeder, fertig. In seiner Stellung, Gröfse und dem Verlauf der Achsen unterscheidet es sich in keiner Weise von dem aus dem Würfel entstandenen. Beide Entstehungsarten haben die Eigentümlichkeit gemeinsam, dafs die Veränderungen der Grundformen nur an der Hälfte bestimmter Begrenzungsstücke vorgenommen wurden; nach der ersten Art (§ 3) mufste ein viereckiger, nach der zweiten ein vierflächiger Körper entstehen. Hieran

[1]) Die vollständige Abstumpfung einer Würfelecke zeigen auch die Achtel des Umhüllungswürfels im Modelle (5). Vgl. Fig. 2.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schliefst sich die Erklärung der Namen Halbflächner (Hemieder) und Vollflächner (Holoeder) mit dem Hinweise darauf, dafs der Würfel kein Hemieder (im Sinne der Erklärung) besitzen kann; auch hierdurch wird es gerechtfertigt, das Oktaeder als krystallographische Grundform anzusehen. Für die stereometrische Anschauung ist diese Art der Ableitung deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil der Schüler hier die Entstehung einer dreiseitigen Ecke durch drei sich in einem Scheitelpunkte schneidende Ebenen kennen lernt und sieht, dafs vier nicht parallele Ebenen sich in sechs geraden Linien durchschneiden, ähnlich wie vier sich schneidende Linien sechs Durchschnittspunkte haben. Die Konstruktion und das Gröfsenverhältnis der Oktaeder- und der umhüllenden Tetraederfläche sind leicht anzugeben.

Die Schüler haben nun eine Anzahl verschiedenartiger Körper kennen gelernt, denen ein und dasselbe Achsensystem gemeinsam ist. Dies letztere ist also das wichtigste Kennzeichen für die krystallographische Zusammengehörigkeit dieser Körper und es dient deshalb, da man verschiedene solcher Systeme unterscheidet, als Einteilungsgrund für die Krystallographie. Die bisher besprochenen Körper gehören dem regulären Systeme an.

b. Das zerlegbare Modell:

10. Das Oktaeder im Tetraeder (V. VII^{a-c})

besteht aus dem in der xy-Ebene halbierten Umhüllungs-Tetraeder und dem eingeschlossenen Oktaeder. Die Achsenlänge ist dieselbe (7,5 cm) wie bei (8). In der Fig. 5 ist eine Hälfte des Tetraeders gezeichnet, in welcher das Oktaeder halb eingeschlossen liegt. Eine solche Tetraederhälfte wird aufsen begrenzt von zwei kongruenten gleichschenkligen Trapezen, deren kleinere Grundlinien gleich der halben Tetraederkante sind, und zwei kongruenten gleichseitigen Dreiecken, die gleich den Flächen des eingeschlossenen Oktaeders sind. Diese äufsere Begrenzung umschliefst einen Hohlraum mit quadratischer Öffnung, in welcher ein halbes hohles Oktaeder hängt, das mit seiner unteren Spitze auf der Tetraederkante und mit zwei seiner Flächen auf den Trapezen liegt, während zwischen seinen beiden anderen Flächen und den beiden Dreiecken der Tetraederhälfte ein hohler Raum bleibt. Die Flächen werden folgendermafsen mit buntem Papiere beklebt: die äufseren Tetraederflächen erhalten gelbe Farbe, die inneren Oktaederflächen dagegen abwechselnd blaue und gelbe und zwar so, dafs die auf den Trapezen aufliegenden Dreiecke gelb, die andern blau werden. Die Flächen des eingeschlossenen Oktaeders werden ebenfalls abwechselnd blau und gelb beklebt. Setzt man nun die eine Tetraederhälfte so auf das Oktaeder, dafs gleichfarbige Flächen sich decken, so stellen die Trapezflächen das Anwachsen der oberen, abwechselnd liegenden, gelben Oktaederflächen und die Bildung der neuen Kantenlinie, des Dachfirstes, dar. Die beiden unten herausragenden gelben Oktaederflächen liegen mit den gelben Dreiecken der Tetraederhälfte in einer Ebene, so dafs dadurch das Anwachsen jener Flächen über die Randkanten hinaus und die Bildung der neuen, dreiseitigen Ecke veranschaulicht wird. Die andere Tetraederhälfte ist so anzufügen, dafs wiederum gleichfarbige Flächen aufeinanderfallen. Dabei werden die beiden noch übrigen blauen Oktaederflächen durch das Zusammenwachsen der benachbarten gelben völlig verdeckt. — Der quadratische Querschnitt des Umhüllungstetraeders zeigt die Lage und Länge der gemeinschaftlichen Achsen. Das ganze Modell kann durch die unter (8) im § 3 beschriebenen vier Ecken zum Würfel, der Tetraeder und Oktaeder gleichzeitig einhüllt, vervollständigt werden. Legt man durch den Mittelpunkt der Tetraederkante einen auf ihr senkrecht stehenden, das Tetraeder halbierenden Schnitt, so durchschneidet er das eingeschlossene Oktaeder in einem Rhombus (vgl. (7) im § 2), dessen spitzer

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Winkel der Neigungswinkel der Tetraederflächen ist; er ist also das Supplement des Oktaederwinkels und beträgt daher $70^1/_2{}^\circ$ (genau $70^\circ\ 31'\ 44''$). — Mit Hilfe der beiden Tetraederhälften läfst sich auch die Zwillingsbildung beim Tetraeder erläutern, wenn man die eine Hälfte so auf das eingeschlossene Oktaeder setzt, dafs ungleichfarbige Flächen sich decken. Will man bei dieser Gelegenheit auch das Gegentetraeder veranschaulichen, so würden bei diesem Modelle die Farben blau und gelb mit einander zu vertauschen sein.

Wie die zerlegbaren Modelle auch bei der Volumen-Berechnung verwendet werden können, will ich an folgendem Beispiele zeigen. Der Kürze wegen soll die doppelte oder einfache Kantenlänge zweier ähnlicher Körper durch Indices 2 oder 1 ausgedrückt werden; bezeichnet man demnach den Würfel mit W_2, das eingeschlossene Oktaeder mit O_1, das eingeschlossene Tetraeder mit T_2 und eine Würfelecke (4) S. 10 mit E_1, so ist

$$W_2 = 8\ W_1, \text{ also auch } E_2 = 8\ E_1 \text{ und } T_2 = 8\ T_1.$$

Das Oktaeder O_1 wird zum Tetraeder T_2 dadurch vervollständigt, dafs man vier Tetraeder T_1 abwechselnd auf die Oktaederflächen setzt; also ist $T_2 = 2\ O_1$. Nun ist aber auch (S. 9) $O_1 = 8\ E_1$, also $T_2 = 16\ E_1$.

Ferner ist nach (8) im § 3: $W_2 = 4\ E_2 + T_2 = 48\ E_1$, also $W_2 = 6\ O_1 = 3\ T_2$. —

Endlich ist das Kubooktaeder $K = W_2 - 8\ E_1 = 40\ E_1$ und das Oktaeder $O_2 = K + 24\ E_1 = 64\ E_1$. Also ist

$$O_2 : W_2 : K : T_2 : O_1 = 64 : 48 : 40 : 16 : 8 = 8 : 6 : 5 : 2 : 1.$$

§ 5. Ableitung des Granatoeders aus dem Oktaeder.

a. Bei der Beschreibung des Rhombendodekaeders, zu welcher der Granat Veranlassung giebt, ist es zweckmäfsig, den Körper in zwei verschiedenen Stellungen, auf einer vierkantigen und auf einer dreikantigen Ecke, zu zeigen. Die Schüler werden dadurch von selbst zu der Frage geführt, zu welchem Systeme der Krystall gehöre, da er nach der ersten Stellung zum regulären, nach der zweiten zum hexagonalen[1]) Systeme gerechnet werden kann. Die Natur selbst entscheidet diese Frage dadurch, dafs sie den Granat — allerdings äufserst selten — auch in Würfeln und Oktaedern krystallisieren läfst. (Häufiger kommt Granatoeder und Oktaeder neben einander beim Magneteisen vor.) Um das Granatoeder aus dem Oktaeder abzuleiten, sollen an letzterem sämtliche zwölf Kanten gleichzeitig und senkrecht zu den Achsenebenen abgeschnitten werden. Die entstehenden Schnittflächen sind symmetrische Sechsecke; die Oktaederflächen bleiben zwar ihrer Gestalt nach erhalten, nehmen aber, je weiter die Kantenabstumpfung fortschreitet, desto mehr an Gröfse ab, während die Schnittflächen mehr und mehr der Gestalt von Rhomben sich nähern, so dafs in dem Augenblick, wo die Dreiecke in einen Punkt zusammenschrumpfen, das ursprüngliche Oktaeder sich in das Granatoeder verwandelt. — Die Vergleichung des eingeschlossenen Granatoeders mit seinem umhüllenden Oktaeder (Fig. 6) hat hervorzuheben: erstens die Lage der dreikantigen Ecken des ersteren zur Lage der Flächen des letzteren, zweitens die der vierkantigen Ecken zu einander, ferner den Verlauf (Normalstellung) und die Verkürzung der Granatoederachsen auf $^2/_3$ der ursprünglichen Länge, viertens den Verlauf der Linien, in welchen sich die Schnittflächen bei gleichzeitiger Kantenabstumpfung durch-

[1]) Die Beschreibung des Quarzes ist vorhergegangen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schneiden und endlich die Gestalt eines der zwölf Stücke, die durch die Kantenabstumpfung vom umhüllenden Oktaeder abfallen. Man wird ferner darauf hinweisen, dafs die grofsen Diagonalen der Granatoederflächen die Kanten des eingeschlossenen Oktaeders, die kleinen Diagonalen die Kanten des eingeschlossenen Würfels sind. Letzterer gehört als solcher auch dem umhüllenden Oktaeder an, da seine Ecken — die dreikantigen des Granatoeders — in den Mitten der Oktaederflächen liegen. Er zeigt ferner, dafs das Granatoeder aus dem Würfel entstehen kann durch Aufsetzen vierseitiger Pyramiden, deren paarweis aneinander stofsende Seitenflächen in einer Ebene liegen müssen. Die Ableitung aus dem Würfel durch Kantenabstumpfung desselben scheint mir höchstens wegen der Kombination beider Körper erwähnenswert.

Die Stellung des Granatoeders auf einer dreikantigen Ecke hilft den Flächenwinkel desselben veranschaulichen, da eine Ebene senkrecht durch die Mitte der Verbindungslinie zweier gegenüberliegender, dreikantiger Ecken gelegt ein reguläres Sechseck herausschneidet, dessen Winkel von 120° die Flächenwinkel des Granatoeders sind. Endlich bietet dieser vielseitige Körper noch Gelegenheit, den Unterschied zwischen krystallographischer und stereometrischer Regelmäfsigkeit zu erläutern und den Eulerschen Satz: $F + E = K + 2$ auf seine Richtigkeit hier sowohl als auch bei einigen der bereits bekannten Körper prüfen zu lassen.

b. Zur Erläuterung dient:

11. Die Kombination des Oktaeders mit dem Granatoeder (K. Nr. 74).

Die Abstumpfungsflächen erhalten rote, die Oktaederflächen grüne Farbe.

12. Das Granatoeder im Oktaeder (V. VIII^{a-f}).

Dieses Modell besteht aus dem in vier Teile zerlegbaren Umhüllungs-Oktaeder und dem in dessen Hohlraum passenden eingeschlossenen Granatoeder, welches 4 cm Kantenlänge hat. Die vier umhüllenden Teile sind 1) dasjenige Stück, welches bei gleichzeitiger Kantenabstumpfung des Oktaeders zwischen einer Oktaederkante und der parallel darunterliegenden Granatoederfläche herausgeschnitten wird; 2) ein Stück, welches zwei solche Teile zu einem Körper vereinigt, 3) ein drei solche Teile und 4) ein sechs solche Teile vereinigendes Stück. In Fig. 6 ist das Oktaeder mit dem eingeschlossenen Granatoeder so dargestellt, dafs das unter 3) beschriebene Stück an der Umhüllung fehlt und somit die darunterliegende dreiflächige Ecke des Granatoeders vollständig sichtbar wird. Das unter 1) beschriebene (kahnförmige) Stück ist mit Hilfe gestrichelter Linien kenntlich gemacht. Die beiden ersten liefern ein dem dritten Stück kongruentes und zeigen aneinandergesetzt den Verlauf der Schnittlinien nach dem Mittelpunkte der Oktaederfläche. Dem dritten Körper gehören von der Oktaeder-Oberfläche ein ganzes Dreieck und drei Drittel an, die aus den benachbarten Flächen herausgeschnitten sind; darunter liegen drei Granatoederflächen, welche in diesem Stück eine einspringende Ecke bilden. Die drei seitlichen Schnittflächen[1]) sind symmetrische Vierecke mit einspringendem Winkel. Das gröfste, vierte Stück läfst im Innern für das halbe, von sechs Flächen begrenzte, Granatoeder Raum. Die der äufseren Oberfläche des Oktaeders angehörigen Flächen erhalten grüne, alle übrigen rote Farbe. Die Oktaederachse, welche mit Hilfe einer durchgesteckten Stricknadel gemessen wird, ist 14,1 cm, die des granatoedrischen Hohlraumes 9,4 cm[2]) lang. Diese Längen entsprechen dem Verhältnisse 3 : 2. Es sei hier bemerkt, dafs

[1]) Sie sind in Fig. 6 durch Schraffierung hervorgehoben.

[2]) Diese Zahlen erhielt ich durch Messung, wobei die Dicke der Pappe mit in betracht kommt; durch Rechnung ergeben sich die Längen 13,8 cm und 9,2 cm.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Messungen zwischen umhüllenden und eingeschlossenen Körpern nur dann vergleichbare Resultate geben, wenn die Mafse für den letzteren dem Hohlraume entnommen werden; der eingeschlossene Körper selbst mufs, um in die umhüllenden Teile zu passen, etwas kleinere Dimensionen haben, als die Rechnung verlangt.

§ 6. Ableitung des Pyritoeders aus dem Pyramidenwürfel.

a. Der Schwefelkies (Pyrit) zeigt neben dem Würfel und Oktaeder eine Krystallform, das Pentagondodekaeder (Pyritoeder), die wegen der eigentümlichen Unregelmäfsigkeiten ihrer symmetrisch-fünfeckigen Flächen kaum einen Zusammenhang mit dem regulären Systeme erwarten läfst. Aus einer der erwähnten Grundformen kann man auch diese Gestalt nicht unmittelbar ableiten; es gelingt dies nur durch Vermittelung des Pyramidenwürfels, den man aus dem Würfel durch Aufsetzen von sechs geraden kongruenten Pyramiden auf seine Flächen erhält. Die Grundkanten der Pyramiden (Kanten des eingeschlossenen Würfels) sollen kurz als Würfelkanten bezeichnet werden; die Pyramidenhöhen müssen derart sein, dafs die Flächenwinkel an den Würfelkanten ausspringende bleiben. Die 24 gleichschenkligen Dreiecke mögen abwechselnd blau und gelb gefärbt sein, so dafs also nie zwei gleichfarbige Flächen mit einer Seite aneinander stofsen. Wir denken uns nun, ähnlich wie es in § 4 beschrieben wurde, die gelben Dreiecke über die blauen hinauswachsend, bis sich alle gelben Flächen zu einem neuen Körper zusammenschliefsen und die blauen vollständig verschwunden sind. Betrachten wir das Ergebnis dieses Wachsens zunächst an der vordersten Pyramide des in der Normalstellung befindlichen Pyramidenwürfels (vergl. Fig. 7); sie wird jetzt ihre Gestalt völlig verändern: die gelben Dreiecke[1]) erweitern sich über ihre Schnittlinien hinaus zu zwei gleichschenkligen Trapezen, die wie die Seitenflächen eines Daches, dessen First durch die Pyramidenspitze geht, auf den Würfelkanten ruhen; die seitliche Begrenzung der Dachflächen geschieht durch zwei niedrige gleichschenklige Dreiecke, Giebelwänden vergleichbar, die aus der Erweiterung der an die vorderste Pyramide anstofsenden gelben Dreiecke des Pyramidenwürfels hervorgegangen sind. Aus jedem der beiden zuletzt erwähnten Dreiecke wird aber in derselben Weise, wie eben beschrieben, je ein gleichschenkliges Trapez, welches zusammen mit jener Giebelwand ein symmetrisches Fünfeck bildet. Beim gleichzeitigen Wachsen aller gelben Flächen legen sich also über die 12 Würfelkanten hinweg, auf den gelben Flächen ruhend, 12 Fünfecke, welche das Pyritoeder umschliefsen. Jetzt wird die Beschreibung, welche sich anfangs nur auf die Gestalt des Pyritoeders beziehen konnte, vervollständigt, indem man die Normalstellung des Körpers auf einer Dachkante, den Verlauf der Achsen, die Lage der Kanten des eingeschlossenen Würfels (Diagonalen parallel zu den Dachkanten), der Ecken desselben u. a. hervorhebt und schliefslich mit einem Rückblick auf die Entstehung des Tetraeders aus dem Oktaeder die Hemiedrie des Pyritoeders erklärt.

b. Das zerlegbare Modell:

13. Der Pyramidenwürfel im Pyritoeder (V. IX^{a-f})

besteht aus einem Pyramidenwürfel mit abwechselnd blau und gelb beklebten Flächen, dessen Würfelkanten 5,6 cm lang sind, und dem in drei Teile zerlegbaren, umhüllenden Pyritoeder, dessen Teile durch Fig. 7 in folgender Weise anschaulich gemacht werden. Von dem Pyramidenwürfel

[1]) Sie sind in Fig. 7 weifs, die blauen schraffiert gezeichnet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sind zwei Pyramiden, oben und rechts, sichtbar, während die vorderste, unterste und linke Pyramide bereits vom Pyritoeder umhüllt sind. Durch die gestrichelten Linien wird ein oben beschriebenes Dach abgegrenzt, welches mit seinen (gelben) Dachflächen auf den (gelben) Dreiecken der vordersten Pyramide ruht und eine Würfelfläche zur Basis hat. Dieses Dach, welches auf der Unterseite die Form — gleichsam den Abdruck — der bedeckten Pyramide in denselben Farben wie diese zeigt, stellt den kleinsten Teil des Umhüllungs-Pyritoeders dar; die beiden anderen sind in einfacher Weise aus ihm entstanden: der zweite Teil zeigt nämlich zwei solche Dächer, der dritte Teil drei Dächer, welche drei in einer Würfelecke zusammenstofsende Pyramiden bedecken, zu einem Stück vereinigt. Auch diese beiden Teile lassen auf ihren Innenseiten die Abdrücke der entsprechenden Teile des Pyramidenwürfels erkennen. Das Pyritoeder ist demnach in den Kantenlinien des eingeschlossenen Würfels auseinandergeschnitten, läfst also dadurch gleichzeitig die Lage dieses Körpers hervortreten. In Fig. 7 ist die Bedeckung des Pyramidenwürfels durch das erste und zweite Stück ausgeführt; von letzterem ist links nur ein Giebeldreieck, unten eine Dachfläche und ein Giebeldreieck zu sehen. Das dritte Stück würde die oberste, rechte und hintere Pyramide bedecken. In den gestrichelten Linien stofsen Giebeldreiecke und Dachflächen in einer Ebene zusammen, so die symmetrisch-fünfeckigen Pyritoederflächen bildend. Die Modelle (10) und (13) haben dieselbe Farbenverteilung und geben so schon äufserlich ihre Zusammengehörigkeit als hemiedrische, aus den Holoedern nach denselben Gesetzen abgeleitete, Formen kund. Auch hier läfst sich ebenso wie bei (10) die Zwillingsbildung durch das Gegen-Pyritoeder veranschaulichen.

Zweckmäfsig ist es,

14. ein unzerlegbares Pyritoeder

zur Hand zu haben, das seiner Gröfse nach dem vorigen entspricht. Das Netz dazu erhält man leicht aus den drei Stücken des zerlegbaren Modells (vgl. V. S. 17); die Flächen werden gelb, die Dachkanten blau beklebt, die Diagonalen, welche die Lage der Würfelkanten angeben, mit Blaustift gezeichnet. Zur Veranschaulichung der Achsenlage werden die Mitten zweier gegenüberliegender Dachkanten durchbohrt und durch die Löcher eine Stricknadel gesteckt.

II. Das hexagonale System.

§ 7. Das Dihexaeder und die sechsseitige Säule.

a. Die Krystallformen des Quarzes weichen von denen des regulären Systems wesentlich ab: statt der vierseitigen Pyramiden treten hier sechsseitige auf, die meist eine sechsseitige Säule zuspitzen oder zu zweien vereinigt eine Doppelpyramide bilden. Letztere ist jedenfalls die einfachere Gestalt, da an ihr nur gleichartige Flächen (Dreiecke) vorkommen, während die Säule mit den zuspitzenden Pyramiden wegen ihrer ungleichartigen Flächen, die aufserdem noch bei der Säule gestreift, bei der Pyramide glatt sind, als Kombinationsform betrachtet werden mufs. Sehen wir zunächst von allen Unregelmäfsigkeiten der Krystallbildung, die wir weiter unten besprechen werden, ab, so ergeben sich hier zwei einfache Formen: die gerade sechsseitige Säule mit regulären Grundflächen und die sechsseitige Doppelpyramide oder das Dihexaeder; zwischen diesen beiden haben wir eine als Grundform auszusuchen. Wir wählen die letztere, weil sie, wie schon erwähnt, nur gleichartige Flächen hat und auch als Doppelpyramide die meiste Ähnlichkeit mit der Grund-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

form des regulären Systems, dem Oktaeder, besitzt. Nachdem der Körper vollständig beschrieben ist, zerlegt man ihn durch einen Schnitt in der Ebene der Randkanten in zwei gerade sechsseitige Pyramiden mit regulären Grundflächen und zieht auf ihnen die drei grofsen Durchmesser. Diese Linien werden als drei Achsen (Nebenachsen) des Körpers angesehen; eine Linie, welche die beiden Pyramidenspitzen des Dihexaeders verbindet, ist die vierte Achse (Hauptachse)[1]. Nach Besprechung der Unterschiede zwischen diesem, dem hexagonalen, und dem regulären Achsensysteme wird darauf hingewiesen, dafs die verschiedene Länge der Hauptachse spitze und stumpfe Formen des Dihexaeders hervorruft. Dabei bietet sich Gelegenheit zur Erwähnung des Satzes, dafs die Summe aller Kantenwinkel einer körperlichen Ecke stets kleiner als 4 R sein mufs, wie dies am deutlichsten die Netze beweisen. Es wird auch hier ein Dihexaeder in Parallel-Projektion (vergl. § 1) gezeichnet; die Hauptachse sei 6 cm, eine Nebenachse rechtwinklig dazu in der Papierebene 4,6 cm, die zweite 2,8 cm, die dritte 1,6 cm lang. Die für die Zeichnung gewählte Stellung, in welcher die eine Nebenachse horizontal von rechts nach links geht, bezeichnet man als die Normalstellung des Krystalls.

Die Entstehung der Kombination zwischen Dihexaeder und Säule wird erklärt durch gleichzeitige und gleichmäfsige Abstumpfung aller Randkanten des Dihexaeders parallel zu ihnen und zur Hauptachse. Die Gestalt der Schnittflächen, Verkürzung der Nebenachsen und ihr Verlauf in der Kombination sind ohne weiteres verständlich, ebenso die Entstehung der geraden sechsseitigen Säule aus der Kombination durch Abschneiden der Pyramidenspitzen parallel zur Ebene der Nebenachsen, wobei der Begriff der gerade abgestumpften Pyramide erläutert wird. Schliefslich mufs noch die verschiedenartige Ausbildung der Säulenflächen durch ungleichmäfsige Abstumpfung der Randkanten erklärt werden; es bleiben dabei die Flächenwinkel (120°) stets dieselben, ein Beweis, dafs die Abstumpfung immer parallel zur Säulenfläche verläuft. Ebenso unveränderlich sind auch die Neigungswinkel der Pyramidenflächen trotz ihrer sehr verschiedenen Ausdehnung.

b. Zur Erläuterung dient:

15. Ein spitzes Dihexaeder (V. X^a),

welches aus zwei kongruenten sechsseitigen Pyramiden mit regulärer Basis zusammengesetzt wird. Die Pyramidenkanten sind 8 cm, die Randkanten 4 cm lang; die Pyramidenflächen erhalten schwarze, die Grundflächen rote Farbe; die drei grofsen Durchmesser der letzteren zeichnet man schwarz. Ein stumpfes Dihexaeder kann zum Vorzeigen dem Modelle (18) entnommen werden.

16. Eine hexagonale Säule (V. X^b),

deren reguläre Grundflächen denen der Pyramiden (15) kongruent sind. Die Säulenkanten sind 3 cm lang. Alle Flächen der Säule erhalten rote Farbe. Das Modell bildet mit (15) zusammen die Kombination beider Körper. Dabei ist zu bemerken, dafs das Dihexaeder, welches dieser Kombination zu Grunde liegt, nicht mit (15) identisch ist, sondern gröfsere Dimensionen als dieses haben mufs.

Von einer Darstellung der abgeschnittenen Stücke ist hier und späterhin bei einigen

[1]) Ich will nicht unterlassen, hier auf eine sehr anschauliche Darstellung der Achsensysteme aufmerksam zu machen, die *V. Goldschmidt* in seiner Schrift: *Über krystallographische Demonstration mit Hilfe von Korkmodellen mit farbigen Nadelstiften. Berlin, J. Springer 1887.* veröffentlicht hat. Die Nadelstifte verfertigt man aus runden, bunt angestrichenen Holzstäbchen; in das eine Ende treibt man Stopfnadeln mit der Öhrseite ein. Gleichartige Achsen erhalten gleiche Farbe. Diese Stifte werden der Richtung der Achsen gemäfs in einen Kork gesteckt. Vgl. §§ 11. 12.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

anderen Kombinationen Abstand genommen, weil die Schüler an diesen Stellen durch den fortschreitenden Unterricht bereits in den Stand gesetzt sein werden, sich die einfachen Körper, um die es sich dabei handelt, auch ohne zerlegbares Modell vorzustellen.

§ 8. Ableitung des Rhomboeders aus dem Dihexaeder.

a. Der Kalkspat kommt neben dem Dihexaeder und der sechsseitigen Säule am häufigsten in einer Krystallgestalt, dem Rhomboeder, vor, die von den genannten aufserordentlich abweicht; ja würden diese nicht ausdrücklich auf das hexagonale System hinweisen, so würden wir das Rhomboeder wohl viel eher einem dreiachsigen, als diesem vierachsigen Systeme zuweisen müssen. In der That läfst sich in jedes Rhomboeder ein klinorhombisches Achsenkreuz[1]) hineinlegen, und es wäre sonach die Annahme gerechtfertigt, dafs der Kalkspat, wie es in Wirklichkeit bei einigen Mineralien vorkommt, in zwei verschiedenen Systemen krystallisiere. Die Thatsache indessen, dafs beim Kalkspat das Rhomboeder sehr häufig mit der hexagonalen Säule kombiniert ist — eine Kombination, die im § 10 genauer besprochen werden soll, — widerspricht dieser Annahme, da es in der Krystallwelt ein allgemein befolgtes Gesetz ist, dafs nie zwei verschiedenen Systemen angehörige Körper sich miteinander kombinieren. Wir sind also darauf angewiesen, das Rhomboeder in Beziehung zur hexagonalen Grundform, dem Dihexaeder, zu setzen.

Die Ableitung entspricht der des Tetraeders aus dem Oktaeder des regulären Systems. Die 12 Flächen eines Dihexaeders sollen abwechselnd rot und weifs gefärbt sein, sodafs in der oberen und unteren Pyramide je drei weifse Dreiecke liegen, die nur mit den Ecken aneinanderstofsen. Die weifsen Flächen sollen über die roten hinwegwachsen und zwar so lange, bis sie sich schneiden und dadurch die roten ganz verdecken. Statt der oberen sechsseitigen Pyramide bildet sich dann eine dreiseitige, deren Spitze in der ursprünglichen Pyramidenspitze liegt. Da aber gleichzeitig auch die unteren, abwechselnd liegenden weifsen Flächen wachsen, so wird von unten her eine zweite dreiseitige Pyramide die obere so durchdringen, dafs gegen eine Kante der oberen eine Fläche der unteren stöfst. Dadurch entstehen sechs neue Schnittlinien, die aber nicht in einer Ebene, wie die Randkanten des Dihexaeders, liegen, sondern zickzackförmig verlaufen, weil immer eine weifse obere Fläche über die anstofsende rote untere Fläche nach unten zu hinauswächst; das Umgekehrte findet bei den unteren weifsen Flächen statt. In Fig. 8 ist das eben beschriebene Wachstum so angedeutet, dafs die unteren weifsen Flächen bereits vollständig zur dreiseitigen Pyramide zusammengewachsen sind, die oberen weifsen sich aber nur über die Randkanten des Dihexaeders nach unten bis zum Durchschnitt mit der dreiflächigen Pyramide ausgedehnt haben. Der neu entstandene Körper, das Rhomboeder, umhüllt nun als hemiedrische Form sein Holoeder, das Dihexaeder. Hieraus ergiebt sich die Normalstellung, der Verlauf der Achsen, Einteilung der Kanten in Pyramiden- und Randkanten, Gestalt des Mittelquerschnitts in der Ebene der Nebenachsen; ferner erkennen die Schüler leicht, dafs das Rhomboeder je nach der Wahl der Grundform spitz oder stumpf ausfällt. Für die stereometrische Erkenntnis ist hier besonders wichtig, dafs die Schüler sehen, wie zwei körperliche Ecken sich gegenseitig durchdringen und einen geschlossenen Körper bilden können; auch der Vergleich zwischen dieser und der Entstehung des Tetraeders ist sehr lehrreich.

[1]) Die Beschreibung des Feldspats ist vorher gegangen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b. Aus den zerlegbaren Modellen (19) und (20) entnimmt man zur Beschreibung

17. ein spitzes und ein stumpfes Rhomboeder.

Zur Erläuterung seiner Entstehung dient das zerlegbare Modell:

18. Das Dihexaeder im Rhomboeder (V. XI^{a-c}),

welches aus einem in zwei Hälften zerlegbaren Umhüllungs-Rhomboeder, dessen Kante 5 cm lang ist, und dem eingeschlossenen stumpfen Dihexaeder besteht. In der unteren Hälfte (Fig. 8) liegen zwischen den zickzackförmigen Randkanten drei kleine, gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel bis zur Mitte der Rhomboederkanten reichen und deren Grundlinien drei Randkanten des eingeschlossenen Dihexaeders darstellen. Denkt man sich auf den drei Rhomboederflächen die Mitten der Randkanten verbunden, so bilden diese drei Verbindungslinien zusammen mit den drei Grundlinien jener kleinen Dreiecke ein reguläres Sechseck, den gemeinschaftlichen Mittelquerschnitt des Rhomboeders und Dihexaeders. Der Umfang dieses Sechsecks bildet die obere Grenzlinie für ein einzuhängendes halbes, hohles Dihexaeder, welches mit nach innen gerichteter Spitze auf der Pyramidenspitze ruht; drei Dreiecke liegen auf den Rhomboederflächen in der Weise, wie es in der Figur die gestrichelten Linien andeuten, die anderen drei liegen hohl über den Pyramidenkanten des Rhomboeders, mit der Basis an der der kleinen Ausfüllungsdreiecke des umhüllenden Teiles hängend. Die Flächen der inneren sechsseitigen Pyramidenecke sind abwechselnd rot und weifs und zwar so, dafs die weifsen Dreiecke auf den weifsen Rhomben liegen; auch die Ausfüllungsdreiecke erhalten als Teile der äufseren Oberfläche weifse Farbe, ebenso inwendig die über den Mittelquerschnitt hervorragenden dreieckigen Spitzen, die das Überwachsen der weifsen Dreiecke der unteren Pyramide versinnlichen. Das rot-weifse Dihexaeder wird so in die Rhomboederhälfte hineingesetzt, dafs gleichfarbige Flächen sich decken. Die obere Rhomboederhälfte, die mit der unteren völlig übereinstimmt, wird auf die herausragende Pyramide aufgesetzt und vervollständigt das in den Randkanten zusammenschliefsende Rhomboeder. Seine Pyramidenkanten erhalten grüne, die Randkanten rote Farbe. Das Gegen-Rhomboeder würde rote Flächen erhalten müssen. Das Modell läfst erkennen, wie aus der gegebenen Rhomboederfläche die des eingeschlossenen Dihexaeders erhalten werden kann.

§ 9. Ableitung des Skalenoeders aus dem Rhomboeder.

a. Verlängert man die vertikal gestellte Hauptachse eines Rhomboeders nach beiden Seiten um beliebige, aber gleiche Stücke und verbindet die Endpunkte der verlängerten Achsen mit den sechs Randecken des Rhomboeders, so bilden diese 12 Verbindungslinien mit den 6 im Zickzack liegenden Randkanten des Rhomboeders 12 kongruente, ungleichseitig-stumpfwinklige Dreiecke, welche das Skalenoeder begrenzen. Nach der Erklärung des Namens und der vollständigen Beschreibung zeigt man, wie die Entstehung dieses Körpers von den bisherigen Ableitungsgesetzen abweicht, da hier die hemiedrische Form, das Rhomboeder, als Grundform für eine neue Krystallgestalt angesehen wird. Diese Eigentümlichkeit hat die Teilung des hexagonalen Systems in eine dihexaedrische und eine rhomboedrische Abteilung veranlafst. Die Vergleichung des Skalenoeders mit dem ähnlich aussehenden Dihexaeder hat, abgesehen von den ungleichartigen Begrenzungsflächen, auf die Verschiedenheit der Flächenwinkel bei den Pyramidenkanten hinzuweisen; während

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beim Dihexaeder alle einander gleich sind, müssen hier zweierlei Winkel an den Kanten unterschieden werden: die stumpferen (längeren) liegen über den Flächen des eingeschlossenen Rhomboeders, die weniger stumpfen (kürzeren) über seinen Kanten.

Das Skalenoeder aus der dihexagonalen Doppelpyramide abzuleiten, halte ich für unzweckmäfsig, weil die Ableitung einerseits sehr umständlich ist, andererseits auch nichts wesentlich Neues bietet.

b. Zur Erläuterung dient das Modell:

19. Das Rhomboeder im Skalenoeder (V. XII^{a-c}),

welches aus dem in zwei Hälften zerlegbaren Umhüllungs-Skalenoeder und dem eingeschlossenen Rhomboeder besteht. Die beiden Hälften stofsen in den zickzackförmigen Randkanten zusammen; jede derselben hat eine einspringende, rhomboedrische Ecke, in welche die Hälfte des eingeschlossenen Rhomboeders pafst, wie dies Fig. 9 veranschaulicht. (Ich habe, abweichend von der Figur, in den Netzen XII^{a-c} ein spitzes Rhomboeder von 5 cm Kantenlänge und das Verhältnis der Hauptachsen beider Körper wie 5 : 3 gewählt.) Die Rhomboederflächen werden mit gelbem, die des Skalenoeders mit schwarzem Papiere beklebt; die längeren Pyramidenkanten erhalten gelbe, die kürzeren rote Farbe; beim Rhomboeder nimmt man für die Pyramidenkanten ebenfalls rot; dann stimmen die langen Skalenoederkanten in der Farbe mit den darunterliegenden Rhomboederflächen, die kurzen mit den Rhomboederkanten überein. Die zickzackförmigen Randkanten beider Körper bleiben weifs.

Es kann für den ersten Unterricht vielleicht überflüssig erscheinen, das Skalenoeder zu erklären. Die Ableitung ist aber mit Hilfe des zerlegbaren Modells so leicht und nimmt so wenig Zeit fort, dafs ich mich mit Rücksicht auf die wichtige Rolle, die dieser Körper beim Kalkspat spielt, entschlossen habe, ihn in das Pensum der Obertertia aufzunehmen. Aufserdem bietet das Modell ein einfaches Beispiel für einen Körper mit ausspringender (konvexer) oder einspringender (konkaver) Ecke, je nachdem eine Skalenoederhälfte mit oder ohne Rhomboeder betrachtet wird. Vgl. auch die Modelle (5), (10) und (18).

§ 10. Die sechsseitige Säule und das Rhomboeder.

a. Bei den sechsseitigen Säulen des Kalkspates erscheint statt der sechsseitigen Zuspitzung, die den Quarz kennzeichnet, fast ausschliefslich eine dreiseitige. Da das Rhomboeder aus zwei dreiseitigen Pyramiden hervorgeht (§ 8), so wird man vermuten müssen, dafs hier eine Kombination mit diesem Körper vorliegt. Um dies zu erklären, bringen wir ein stumpfes Rhomboeder in die Normalstellung und fällen von seinen sechs Randecken auf eine darunter liegende Horizontalebene (Tischplatte) Lote; die Fufspunkte derselben bestimmen dann die Ecken eines regelmäfsigen Sechsecks, während die Lote selbst als abwechselnd längere und kürzere Kanten einer auf dieser Grundfläche ruhenden sechsseitigen Säule erscheinen, deren Seitenflächen unten rechtwinklig abgeschnitten sind, oben aber in den zickzackförmig liegenden Randkanten des Rhomboeders endigen. Die eine, herausragende, Rhomboederhälfte bildet also die dreiseitige Zuspitzung, die andere liegt in einer entsprechenden Vertiefung in der Säule verborgen (vgl. Fig. 10). Statt der regelmäfsigen sechsseitigen Grundfläche kann wieder ein zuspitzendes Rhomboeder derselben Stellung wie das obere erscheinen. Man kann sich dies so vorstellen, als ob die untere, verdeckte Ecke des

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zuspitzenden Rhomboeders durch die Säule hindurch nach unten geschoben wird, bis sie auf der anderen Seite zum Vorschein kommt. Dann sind die beiden Rhomboederhälften gewissermafsen durch die Säule getrennt[1]). Der Verlauf der Nebenachsen ist durch die Lage des Rhomboeders bestimmt: sie verbinden die Mitten je zweier gegenüberliegender Säulenflächen. Auf der regelmäfsigen Grundfläche, die als Mittelquerschnitt der vollständigen Kombination aufgefafst werden kann, sind die Nebenachsen somit die drei kleinen Durchmesser, während sie früher (§ 7) durch die grofsen dargestellt wurden.

Der Kalkspat krystallisiert in der eben abgeleiteten Zusammensetzung ziemlich selten, viel häufiger dagegen in einer anderen, bei welcher die Stellung beider Körper ungleich verwickelter ist. Man sieht dies schon daran, dafs die zuspitzenden Flächen nicht Rhomben, sondern symmetrische Fünfecke sind und die Säulenkanten nicht gegen die Pyramidenkanten, sondern gegen deren Flächen stofsen. Diese schwierigere Stellung läfst sich aus der eben beschriebenen leicht dadurch ableiten, dafs man die Säulenkanten parallel zur Hauptachse und zur Querdiagonale der Rhomben so abschneidet, dafs wieder eine sechsseitige Säule entsteht.

b. Das zerlegbare Modell:

20. Die Kombination der sechsseitigen Säule und des Rhomboeders (V. XIII^{a-c}) wird nach dem vorhergehenden durch die Fig. 10 genügend erklärt. Das stumpfe Rhomboeder, dessen Kanten 4 cm lang sind, ruht mit seiner unteren Pyramidenecke auf der kongruenten einspringenden Ecke der Säule, deren kurze Kanten 7 cm lang sind. Die Säulenflächen beklebt man mit schwarzem, alle übrigen Flächen, auch die des Rhomboeders, mit grünem Papiere. Die Pyramidenkanten des letzteren können durch rote Farbe hervorgehoben werden. Auf der hexagonalen Grundfläche zieht man die drei kleinen Durchmesser, um die Richtung der Nebenachsen anzudeuten. Die Kombination ist, da die Zuspitzung nur einseitig ist, nur zur Hälfte dargestellt, um die Projektionsfigur der zickzackförmigen Randkanten — das reguläre Sechseck — zu ver-veranschaulichen.

III. Das klinorhombische System.

§ 11. Die klinorhombische Säule.

a. Der Feldspat vermittelt die Bekanntschaft mit einem neuen Krystallsysteme, dessen Gestalten freilich meist sehr verwickelt sind, so dafs sich schwer die einfache Grundform erkennen läfst. Als letztere betrachten wir eine vierseitige, von horizontaler Basis aus schief aufsteigende Säule, deren beide parallelen Grundflächen kongruente Rhomben und deren vier Seitenflächen kongruente Rhomboide sind. Verbindet man die Mittelpunkte der beiden Endflächen, so erhält man die schiefgerichtete z-Achse als Hauptachse; die Verbindungslinien der Mitten je zweier gegenüberliegender Säulenkanten ergeben die beiden Nebenachsen, die senkrecht zu einander sind, da sie den Diagonalen der rhombischen Endflächen parallel sind. Die x-Achse geht von rechts nach links, die y-Achse von vorn nach hinten. Das Achsenkreuz unterscheidet sich von dem regulären erstens durch die ungleiche Länge, zweitens durch die verschiedene Neigung der Achsen gegen einander. Die Ver-

[1]) Man vergleiche hiermit das auf die dreikantige Ecke gestellte Granatoeder, Anfang des § 5.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

anschaulichung dieser Verhältnisse geschieht mit Hilfe farbiger Nadelstifte[1]). Zwei rote Stifte stellen die x-Achse, zwei weifse die y-Achse, zwei blaue die z-Achse dar; die verschiedenen Farben deuten die verschiedene Länge an. Sie werden zunächst alle rechtwinklig zu einander mit den Spitzen in weiches Wachs gesteckt. Dieses Achsenkreuz entspricht einer geraden, d. h. einer von den Grundflächen aus sich senkrecht erhebenden, rhombischen Säule, welche als Grundgestalt des gleichbenannten Krystallsystems angesehen werden kann. Nun entfernt man eine weifse Nadel, legt das Achsenkreuz mit senkrecht gerichteter weifser Nadel auf den Tisch und neigt nun die beiden blauen Nadeln in der Ebene des Tisches gegen die roten. Hierdurch erkennen die Schüler, dafs die weifse Achse zur roten und blauen senkrecht bleibt und nur eine schiefe Neigung, nämlich zwischen der roten und blauen Achse, stattfindet. Darauf vervollständigt man wieder das Achsenkreuz durch Einstecken der zweiten weifsen Nadel und stellt es normal, d. h. die blaue Achse schief nach oben. Die schiefe Stellung der z-Achse zur x-Achse zieht die Neigung der Säule nach sich, so dafs aus der rhombischen eine klinorhombische wird. Ist die x-Achse länger als die y-Achse, so sind die zur xz-Ebene parallelen Säulenkanten spitz (scharf), die anderen stumpf. Schnitte, welche die scharfen Kanten parallel zur yz-Ebene abstumpfen, liefern Rechtecke, die Abstumpfungen der stumpfen Kanten parallel zur xz-Ebene aber Rhomboide. Geht erstere Abstumpfung bis zur Mitte der Endkanten, so sind die Endflächen symmetrische Sechsecke; tritt die andere in gleicher Weise dazu, so gehen sie in Rechtecke über und man erhält eine Art der klinorhombischen Säule, die beim Gips in tafelförmigen Spaltungskrystallen vorherrscht. Diese abgeleitete Form kann aus der entsprechenden rhombischen (geraden) Säule (vgl. Modell (27)) auch durch Neigung der Hauptachse hergeleitet werden. Die drei in einer Ecke zusammenstofsenden Kanten dieser Säulen sind den Achsen parallel und zeigen deshalb deutlich die Neigung derselben zu einander.

Zur Erläuterung der eigentümlichen Spaltbarkeit des Orthoklases soll durch die ursprüngliche Form der klinorhombischen Säule ein Horizontalschnitt in der xy-Ebene und ein Vertikalschnitt in der xz-Ebene bis zur x-Achse geführt werden, wodurch ein Viertel aus der Säule herausgeschnitten wird. Die Schnittflächen des übrig bleibenden Teiles bilden einen einspringenden rechten Winkel; es sind die Spaltungsflächen des Orthoklases. Er ist also erstens parallel zu den (rhombischen) Endflächen, zweitens parallel zur Ebene der beiden schiefstehenden Achsen spaltbar.

b. Als Modelle dienen:

21. Eine rhombische Säule (V. XIV[a]) und

22. Eine klinorhombische Säule (V. XV)

mit rhombischen Grundflächen und gleichen Achsenlängen; die Säulenkanten sind 7 cm, die Grundkanten 3,5 cm lang. Die Seitenflächen erhalten blaue, die Grundflächen gelbe Farbe.

23. Eine klinorhombische Säule (V. XVII),

deren scharfe Säulenkanten bis zur Mitte der Endkanten abgestumpft sind. Auf den symmetrisch-sechsseitigen Grundflächen wird die Richtung der Nebenachsen angegeben. Die ursprünglichen (rhomboidischen) Seitenflächen erhalten rote, die Abstumpfungs- und Endflächen gelbe Farbe.

24. Eine klinorhombische Säule (V. XVIII)

mit rechteckigen Grundflächen; auch hier wird die Richtung der Nebenachsen auf letzteren bezeichnet; alle Flächen sind gelb.

---

[1]) Vergl. Anm. S. 19.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

25. Eine in zwei Teile zerlegbare klinorhombische Säule, welche die Spaltungsflächen des Orthoklases zeigt (V. XVI[a–b]).

Der eine Teil stellt drei Viertel, der andere das herausgeschnittene Viertel der Säule dar. Auf der vertikalen und horizontalen Schnittfläche des ersteren (vgl. Fig. 11) zeichnet man die halbe z- und die halbe y-Achse. Die ursprünglichen Säulenflächen erhalten rote, die End- und Schnittflächen gelbe Farbe. Den drei Säulen (23), (24) und (25) liegt dasselbe Achsensystem zu Grunde, so dafs (23) und (24) durch Kantenabstumpfungen aus (25) hervorgehen würden (vgl. Fig. 12). Danach sind auch die Farben der drei Modelle verteilt; die Gestalt der abzuschneidenden Stücke wird von den Schülern leicht erkannt, wenn man die Säulen mit parallel gerichteten Achsen so übereinander setzt, dafs die Hauptachsen eine gerade Linie bilden. Modelle dafür anfertigen zu lassen, halte ich für überflüssig (vgl. S. 20). Dagegen empfiehlt es sich, eine Zeichnung wie sie in Fig. 12 dargestellt ist, anfertigen zu lassen; sie giebt ein genügend klares Bild der besprochenen Kantenabstumpfungen. (Abweichend von der üblichen Darstellung des Achsenkreuzes, bei welcher der orthodiagonale Hauptschnitt in der Papierebene, die Klinoachse also gegen den Beschauer gerichtet gezeichnet ist, lege ich den klinodiagonalen Hauptschnitt mit schiefgerichteter Hauptachse in die Papierebene und die Orthoachse senkrecht dazu[1]). Dadurch gewinnen die Schüler aus der Zeichnung leichter eine richtige Vorstellung von dem schiefen Achsenwinkel des Systems; da sie nämlich die aufserhalb der Papierebene liegende Achse in den Darstellungen der rechtwinkligen Systeme stets als Normale anzusehen gewohnt sind, so finden sie zwischen den Zeichnungen der rhombischen und klinorhombischen Oktaeder oder Säulen in der üblichen Darstellungsweise keinen Unterschied.) Die Säulenkanten der drei letzten Modelle sind 9 cm, die Endkanten von (25) 4,5 cm lang, der schiefe Achsenwinkel beträgt 65°.

IV. Die drei übrigen Systeme.

§ 12. Vergleich der Achsen und Grundformen des quadratischen, rhombischen und klinorhomboidischen Systems.

a. Das Wenige, was hierüber zu sagen ist, wird vielleicht an die Beschreibung des Aragonits oder, wie bei der von mir festgehaltenen Ordnung, gegen Ende des Unterrichtes an die des Schwefels angeknüpft. Da das rhombische Achsenkreuz bereits bei der klinorhombischen Säule (§ 11) Besprechung fand, wird hier seine Entwickelung aus dem regulären zu berücksichtigen sein. Man stellt zuerst durch sechs rote Nadelstifte das letztere dar (vgl. S. 24), ersetzt dann die beiden vertikalen durch blaue und erhält so das quadratische System, dessen Oktaeder (stumpf, spitz, regulär), Säule und Kombination beider Körper kurz erläutert werden. Darauf vertauscht man ein zweites rotes Nadelpaar mit einem weifsen und erhält das rhombische Achsenkreuz. Oktaeder, Säule und Kombination derselben genügen auch hier. Endlich geht man durch Neigung der blauen Stifte gegen die roten zum klinorhombischen und dann zum klinorhomboidischen Systeme, dessen Säule beschrieben wird, über. Als Beispiel für das letzte System dient am besten der Kupfervitriol, dessen künstlich darstellbare Krystalle die Schüler zu selbständiger Beobachtung anregen.

[1]) Nur wenige Schulbücher zeigen diese Art der Darstellung. Vgl. z. B. Zängerle, Lehrb. d. Mineral. Braunschweig.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b. Aufser der schon früher erwähnten Säule (21) dienen zur Erläuterung:

26. Ein in zwei vierseitige Pyramiden zerlegbares rhombisches Oktaeder, zur Säule (21) passend (V. XIV[b]),
27. Eine rhombische Säule mit rechteckigen Grundflächen, in den Mafsen mit (21) übereinstimmend (V. XIV[c]),
28. Ein in zwei vierseitige Pyramiden zerlegbares quadratisches Oktaeder (V. XIX[b]),
29. Eine zu (28) passende quadratische Säule (V. XIX[a]) und
30. Eine klinorhomboidische Säule (V. XX),

auf deren Grundflächen die Diagonalen gezogen werden, um die Richtung der Nebenachsen zu kennzeichnen.

Farbenverteilung und Mafse bedürfen in diesen einfachen Modellen keiner besonderen Erwähnung.

Um den Leser nicht durch zu grofse Ausführlichkeit in methodischen und didaktischen Einzelheiten zu ermüden, habe ich auf eine erschöpfende Darlegung aller Beziehungen zwischen dem hier behandelten krystallographischen Stoffe und der Stereometrie verzichtet. Es sollte nur im allgemeinen ein Gebiet umgrenzt werden, dessen Erweiterung oder Beschränkung jedem Lehrer überlassen bleiben mufs.

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf