Ueber die Darstellung von ganzzahligen Faktoriellen und Potenzen durch Produkte gemischter Zahlen.

Von
Theodor Harmuth.

I.

Unter denjenigen gemischten Zahlen, die sich zu ganzzahligen Produkten vereinigen lassen, sind zwei von besonderer Bedeutung. Es sind dies die Zahlen

$$\varphi(a) = a + \frac{a}{a+1} \quad \text{und} \quad \psi(a) = a + \frac{1}{a+2},$$

in denen a eine positive ganze Zahl bedeutet. Man findet zunächst

$$1) \qquad \varphi(a)\,\psi(a) = a(a+1)$$

$$\text{und } 2) \quad \varphi(a)\,\varphi(a+1) = a(a+3).$$

Sodann ist das Produkt

$$\varphi(a)\,\varphi(a+1)\,\varphi(a+2)\ldots\ldots\varphi(a+n)$$

für jedes beliebige ganzzahlige n ganzzahlig. Denn für eine gerade Anzahl von Faktoren erhält man direkt aus 2)

$$\varphi(a)\,\varphi(a+1) = a(a+3),$$

$$\varphi(a+2)\,\varphi(a+3) = (a+2)(a+5),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi(a+2n)\,\varphi(a+2n+1) = (a+2n)(a+2n+3),$$

also durch Multiplikation dieser Gleichungen das gewünschte Produkt. Für einen hinzutretenden Faktor $\varphi(a+2n+2)$ besteht aber die Gleichung

$$\varphi(a+2n+2) = \frac{(a+2n+2)(a+2n+4)}{a+2n+3},$$

die mit dem Produkt der vorangegangenen Gleichungen multipliziert, ebenfalls ein ganzzahliges Produkt giebt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ferner folgt aus 1)

$$a(a+1) = \varphi(a)\,\psi(a),$$
$$(a+2)(a+3) = \varphi(a+2)\,\psi(a+2),$$
$$\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(a+2n-2)(a+2n-1) = \varphi(a+2n-2)\,\psi(a+2n-2).$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit einander und setzt

$$\varphi(a)\,\psi(a) = f(a),$$

so erhält man

$$\frac{(a+2n-1)!}{(a-1)!} = f(a)\,f(a+2)\,f(a+4)\dots f(a+2n-2);$$

also für $a=1$ resp. $a=2$ die Formeln

$$(2n)! = f(1)\,f(3)\,f(5)\dots f(2n-1),$$
$$(2n+1)! = f(2)\,f(4)\,f(6)\dots f(2n).$$

Ersetzt man die Grössen f durch ihre Werte, so findet man

$$(2n)! = 1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}\cdot 3\frac{3}{4}\cdot 3\frac{1}{5}\cdot 5\frac{5}{6}\cdot 5\frac{1}{7}\dots\left(2n-1+\frac{2n-1}{2n}\right)\left(2n-1+\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{3\,.\,4\,.\,15\,.\,16\,.\,35\,.\,36\dots(4n^2-1)\,.\,4n^2}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\dots 2n\,.\,(2n+1)}$$

und

$$(2n+1)! = 2\frac{2}{3}\cdot 2\frac{1}{4}\cdot 4\frac{4}{5}\cdot 4\frac{1}{6}\cdot 6\frac{6}{7}\cdot 6\frac{1}{8}\dots\left(2n+\frac{2n}{2n+1}\right)\left(2n+\frac{1}{2n+2}\right)$$
$$= \frac{8\,.\,9\,.\,24\,.\,25\,.\,48\,.\,49\dots[(2n+1)^2-1]\,(2n+1)^2}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\dots(2n+1)\,.\,(2n+2)}.$$

Durch einfache Umformung erhält man hieraus die folgenden Ausdrücke für die Quadrate der Faktoriellen:

$$[(2n)!]^2 = \frac{3\,.\,4\,.\,15\,.\,16\,.\,35\,.\,36\dots(4n^2-1)\,4n^2}{2n+1},$$

$$[(2n+1)!]^2 = \frac{8\,.\,9\,.\,24\,.\,25\,.\,48\,.\,49\dots[(2n+1)^2-1]\,(2n+1)^2}{n+1}.$$

Aus 2) folgt weiter

$$\varphi(a)\,\varphi(a+1) = a\,(a+3),$$
$$\varphi(a+6)\,\varphi(a+7) = (a+6)(a+9),$$
$$\varphi(a+12)\,\varphi(a+13) = (a+12)(a+15),$$
$$\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi(a+6n-6)\,\varphi(a+6n-5) = (a+6n-6)(a+6n-3).$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergiebt sich, wenn man zugleich $a=3$ setzt und die Seiten vertauscht

$$3\,.\,6\,.\,9\dots(6n-3)\,.\,6n = \varphi(3)\,\varphi(4)\,\varphi(9)\,\varphi(10)\,\varphi(15)\,\varphi(16)\dots\dots\varphi(6n-3)\,\varphi(6n-2),$$

d. h. $3^{2n}\,.\,(2n)! = 3\frac{3}{4}\cdot 4\frac{4}{5}\cdot 9\frac{9}{10}\cdot 10\frac{10}{11}\cdot 15\frac{15}{16}\cdot 16\frac{16}{17}\dots\left(6n-3+\frac{6n-3}{6n-2}\right)\left(6n-2+\frac{6n-2}{6n-1}\right)$

$$= \frac{15\,.\,24\,.\,99\,.\,120\,.\,255\,.\,288\dots[(6n-2)^2-1]\,[(6n-1)^2-1]}{4\,.\,5\,.\,10\,.\,11\,.\,16\,.\,17\dots(6n-2)\,(6n-1)},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und da jeder Faktor des Zählers durch 3 teilbar ist,

$$(2n)! = \frac{5 \,.\, 8 \,.\, 33 \,.\, 40 \,.\, 85 \,.\, 96 \,..\, (12n^2 - 8n + 1)\,(12n^2 - 4n)}{4 \,.\, 5 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 16 \,.\, 17 \ldots (6n - 2)\,(6n - 1)}.$$

Die entsprechende Ableitung für $a = 1$ resp. $a = 2$ giebt zwar die analogen Formeln für die Produkte $1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10 \ldots$ und $2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \ldots$, dieselben gestatten aber eine Umformung in die einfache Faktorielle $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots$ nicht.

Durch Zusammenstellung von je drei der aus 2) folgenden Gleichungen

$$\varphi(a)\,\varphi(a+1) = a\,(a+3),$$
$$\varphi(a+1)\,\varphi(a+2) = (a+1)\,(a+4),$$
$$\varphi(a+2)\,\varphi(a+3) = (a+2)\,(a+5);$$

$$\varphi(a+6)\,\varphi(a+7) = (a+6)\,(a+9),$$
$$\varphi(a+7)\,\varphi(a+8) = (a+7)\,(a+10),$$
$$\varphi(a+8)\,\varphi(a+9) = (a+8)\,(a+11);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder durch Zusammenstellen von je zwei der folgenden Gleichungen

$$\varphi(a)\,\varphi(a+1)\,\varphi(a+2) = a\,(a+2)\,(a+4),$$
$$\varphi(a+1)\,\varphi(a+2)\,\varphi(a+3) = (a+1)\,(a+3)\,(a+5)$$

$$\varphi(a+6)\,\varphi(a+7)\,\varphi(a+8) = (a+6)\,(a+8)\,(a+10),$$
$$\varphi(a+7)\,\varphi(a+8)\,\varphi(a+9) = (a+7)\,(a+9)\,(a+11)\cdot$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und darauf folgende Multiplikation ergeben sich Formeln für die Produkte

$$a\,(a+1)\,(a+2)\ldots(a+5),$$
$$a\,(a+1)\,(a+2)\ldots(a+11),$$
$$a\,(a+1)\,(a+2)\ldots(a+17) \quad \text{u. s. w.}$$

Aus diesen folgt für $a = 1$

$$6! = 1\frac{1}{2}\left(2\frac{2}{3}\right)^2\left(3\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 4\frac{4}{5},$$

$$12! = 1\frac{1}{2}\left(2\frac{2}{3}\right)^2\left(3\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 4\frac{4}{5} \cdot 7\frac{7}{8}\left(8\frac{8}{9}\right)^2\left(9\frac{9}{10}\right)^2 \cdot 10\frac{10}{11},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aehnliche Formeln folgen aus $a = 2$ für $7!, 13!, 19! \ldots$, während die analogen Formeln für die übrigen Faktoriellen aus $a = 3, 4, 5, 6$ nur dadurch zu gewinnen sind, dafs zu den nach Analogie der vorigen gebildeten Ausdrücken beiderseits der Faktor $2!, 3!, 4!, 5!$ hinzutritt.

Aus den Gleichungen

$$\varphi(a)\,\varphi(a+1)\,\varphi(a+2) = a\,(a+2)\,(a+4),$$
$$\varphi(a+6)\,\varphi(a+7)\,\varphi(a+8) = (a+6)\,(a+8)\,(a+10),$$
$$\varphi(a+12)\,\varphi(a+13)\,\varphi(a+14) = (a+12)\,(a+14)\,(a+16),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erhält man eine neue Form von Faktoriellen. Multipliziert man die Gleichungen, vertauscht die Seiten der Produktgleichung und setzt $a = 2$, so findet man

$$2 . 4 . 6 = 2^3 . 3! = 2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 4\frac{4}{5},$$

$$2 . 4 \ldots 12 = 2^6 . 6! = 2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 4\frac{4}{5} \cdot 8\frac{8}{9} \cdot 9\frac{9}{10} \cdot 10\frac{10}{11} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Annahme $a = 1$ giebt eine ähnliche Form für das Produkt aller ungeraden Zahlen bis zu einer letzten an -1.

Ferner folgt aus

$$\varphi(a)\,\varphi(a+1) = a(a+3)$$

$$\text{und} \quad \varphi(a+1)\,\psi(a+1) = (a+1)(a+2)$$

die Gleichung

$$\varphi(a)\,\varphi^2(a+1)\,\psi(a+1) = a(a+1)(a+2)(a+3),$$

analog

$$\varphi(a+4)\,\varphi^2(a+5)\,\psi(a+5) = (a+4)(a+5)(a+6)(a+7),$$

$$\varphi(a+8)\,\varphi^2(a+9)\,\psi(a+9) = (a+8)(a+9)(a+10)(a+11),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man multipliziere dieselben und setze $a = 1$, so folgt

$$4! = 1\frac{1}{2} \cdot \left(2\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2\frac{1}{4},$$

$$8! = 1\frac{1}{2} \cdot \left(2\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2\frac{1}{4} \cdot 5\frac{5}{6} \cdot \left(6\frac{6}{7}\right)^2 \cdot 6\frac{1}{8},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$a = 2$ giebt analoge Formeln für $5!$, $9!$, $13! \ldots (4n+1)!$ Auch die übrigen Faktoriellen $(4n+2)!$ und $(4n+3)!$ sind ohne Mühe aus diesem System zu gewinnen, wenn man $a = 3$ resp. $a = 4$ setzt und beiderseits mit $2!$ resp. $3!$ multipliziert.

Soll mit Hilfe der bisher gebrauchten gemischten Zahlen die allgemeine Faktorielle

$$a(a+n)(a+2n)\ldots$$

dargestellt werden, so beachte man, dafs das beliebig weit ausgeführte Produkt

$$\varphi(a)\,\varphi(a+1)\,\varphi(a+2)\ldots$$

stets ganzzahlig ist und dafs man dadurch unter Zuhilfenahme von Stammbrüchen jedes beliebige Produkt $6(a+n)$ von $n = 4$ an darstellen kann. Es ist nämlich

$$a(a+4) = \varphi(a)\,\varphi(a+1)\,\varphi(a+2) \cdot \frac{1}{a+2},$$

$$a(a+5) = \varphi(a)\,\varphi(a+1)\,\varphi(a+2)\,\varphi(a+3) \cdot \frac{1}{(a+2)(a+3)},$$

$$a(a+6) = \varphi(a)\,\varphi(a+1)\ldots\varphi(a+4) \cdot \frac{1}{(a+2)(a+3)(a+4)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Jenachdem $n = 4, 5, 6 \ldots$ gegeben ist, setzt man in der ersten, zweiten, dritten .... dieser Gleichungen statt a successive $a, a + 2n, a + 4n, \ldots$ und multipliziert die erhaltenen Gleichungen, um $a(a+n)(a+2n)\ldots$ zu erhalten.

Für $n = 1, 2, 3$ geben die vorangehenden Abschnitte Darstellungen der gesuchten Faktorielle.

II.

Auch die Quadrate und höheren Potenzen der ganzen Zahlen — ausser 1 — lassen sich als Produkte gemischter Zahlen darstellen.

Für die Darstellung der Quadrate giebt die Identität

$$n^2 = \frac{n(a-k)}{a+k} \cdot \frac{n(a+k)}{a-k}$$

bei beliebiger Zahlenannahme für a und k verschiedene Möglichkeiten. Speziell für $a = n$ und $k = 1$ ist

$$\frac{n(n-1)}{n+1} = n - 2 + \frac{2}{n+1},$$

$$\frac{n(n+1)}{n-1} = n + 2 + \frac{2}{n-1},$$

$$\text{also} \quad n^2 = \left(n - 2 + \frac{2}{n+1}\right)\left(n + 2 + \frac{2}{n-1}\right).$$

Diese Formel giebt rechts ein Produkt von zwei gemischten Zahlen für $n \geqq 4$, jedoch so, dafs für ungerade n die Bruchteile noch reduzierbar sind. Man findet nach Ausführung der Reduktion

$$4^2 = 2\frac{2}{5} \cdot 6\frac{2}{3}, \qquad 5^2 = 3\frac{1}{3} \cdot 7\frac{1}{2},$$

$$6^2 = 4\frac{2}{7} \cdot 8\frac{2}{5}, \qquad 7^2 = 5\frac{1}{4} \cdot 9\frac{1}{3},$$

$$8^2 = 6\frac{2}{9} \cdot 10\frac{2}{7}, \qquad 9^2 = 7\frac{1}{5} \cdot 11\frac{1}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Eine gleichmäfsigere Darstellung folgt aus dem Umstande, dafs bei den Darstellungen der geraden Quadrate jeder Faktor der rechten Seite durch 2 teilbar ist. So ergiebt sich

$$2^2 = 1\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{3},$$

$$3^2 = 2\frac{1}{7} \cdot 4\frac{1}{5},$$

$$4^2 = 3\frac{1}{9} \cdot 5\frac{1}{7},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n^2 = \left(n - 1 + \frac{1}{2n+1}\right)\left(n + 1 + \frac{1}{2n-1}\right).$$

Zur Darstellung höherer Potenzen der ganzen Zahlen durch ein Produkt von zwei gemischten Zahlen kann man von der zuletzt genannten Formel ausgehen und einen resp. beide Faktoren mit n, n^2.. multiplizieren. So findet man zunächst

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$n^3 = \left(n(n-1) + \frac{n}{2n+1}\right)\left(n+1+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$\text{und } n^3 = \left(n-1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(n(n+1)+\frac{n}{2n-1}\right),$$

d. h. für $n = 2, 3, 4 \ldots$

$$2^3 = 2\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3} = 1\frac{1}{5} \cdot 6\frac{2}{3},$$

$$3^3 = 6\frac{3}{7} \cdot 4\frac{1}{5} = 2\frac{1}{7} \cdot 12\frac{3}{5},$$

$$4^3 = 12\frac{4}{9} \cdot 5\frac{1}{7} = 3\frac{1}{9} \cdot 20\frac{4}{7},$$

$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

Um aus derselben Gleichung eine Formel für n^4 zu erhalten, empfiehlt es sich am meisten, die nötige Multiplikation mit n^2 rechts auf beide Faktoren zu verteilen, da man dann völlig reduzierte Brüche erhält:

$$2^4 = 2\frac{2}{5} \cdot 6\frac{2}{3},$$

$$3^4 = 6\frac{3}{7} \cdot 12\frac{3}{5},$$

$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$n^4 = \left(n(n-1)+\frac{n}{2n+1}\right)\left(n(n+1)+\frac{n}{2n-1}\right).$$

Es liegt auf der Hand, dafs in ähnlicher Weise auch die Darstellung bei beliebiger Vergröfserung des Exponenten ausführbar ist.

Für die Darstellung der Quadrate zusammengesetzter Grundzahlen als Produkte gemischter Zahlen lassen sich auch die Gleichungen

$$\left(2n^2+1+\frac{1}{2n^2-1}\right)\left(1+\frac{n^2-1}{n^2}\right) = (2n)^2,$$

$$\left(3n^2+1+\frac{1}{3n^2-1}\right)\left(2+\frac{n^2-1}{n^2}\right) = (3n)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

$$\left(kn^2+1+\frac{1}{kn^2-1}\right)\left(k-1+\frac{n^2-1}{n^2}\right) = (kn)^2$$

anwenden.

Da in der allgemeinen Gleichung für $k = 1$ der zweite Faktor links keine gemischte Zahl, sondern ein echter Bruch ist, sind die Quadrate der Primzahlen im genauen Sinne der Aufgabe auf diesem Wege nicht zu erhalten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf