I.

Es sei zu bestimmen, wie oft der Primfactor N in dem Producte der natürlich auf einander folgenden Zahlen $1.2.3\ldots(0-2)(0-1)0$ enthalten ist.

In der Zahlenreihe von 1 bis 0 sei N^p die höchste von N vorkommende Potenz. In der Zahlenreihe von 1 bis N^p giebt es N^{p-1} Zahlen, welche den Factor N in erster, oder in höherer Potenz enthalten; es ist derselbe in der Reihe also einfach N^{p-1} mal enthalten. Nach Entfernung der einfachen Theiler N bilden die Quotienten die natürliche Zahlenreihe von 1 bis N^{p-1}. In dieser ist der Theiler N einfach N^{p-2} mal enthalten. Nach Entfernung der einfachen Theiler N bleiben als Quotienten die Zahlen der natürlichen Reihe von 1 bis N^{p-2} übrig u. s. f. Es ergiebt sich, dass in den Zahlen von 1 bis N^p der Factor N enthalten ist: $N^{p-1}+N^{p-2}+N^{p-3}++N^2+N+1=\frac{N^p-1}{N-1}$ mal.

Es sei jetzt m^π (wo π einen Index, keinen Potenz-Exponenten bezeichnet) die grösste in dem Bruche $\frac{0}{N^p}$ enthaltene ganze Zahl, welche also kleiner als N ist, Es theilen sich die Zahlen von 1 bis $m^\pi N^p$ in m^π Serien, von denen jede N^p Zahlen enthält und mit einer durch N^p theilbaren Zahl schliesst. Die Zahlen der $(Z+1)$ten Serie sind von der Form ZN^p+r; da nun $r<N^p$, so muss für jede Potenz von N. welche nicht grösser als N^p, immer sein $ZN^p+r\equiv r$. Es folgt, dass in jeder der m^π Serien die Anzahl der Factoren N gleich gross ist. Das Product $1.2.3\ldots.m^\pi N^p$ enthält also den Factor $N:m^\pi\frac{N^p-1}{N-1}$ mal. Es ist noch zu untersuchen, wie viel Factoren N in den übrigen $0-m^\pi N^p$ Zahlen enthalten sind. Diese Differenz ist kleiner als N^p, und es ist unter den Zahlen von $m^\pi N^p+1$ bis 0 keine durch N^p theilbare. Wohl aber werden einige durch N^{p-1} theilbar sein. Die Anzahl derselben wird durch die grösste in $\frac{0-m^\pi N^p}{N^{p-1}}$ enthaltene ganze Zahl, welche wir durch $m^{\pi-1}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bezeichnen, ausgedrückt. Man erhält ferner auch $m^{\pi-1}$ neue Serien von Zahlen, deren jede N^{p-1} Zahlen enthält. Die letzte Zahl in jeder Serie ist eine durch N^{p-1} theilbare Zahl. Setze $m^{\pi} N^{p} = q$, so ist die erste dieser Serien: $q+1, q+2, q+3, \ldots, q+N^{p-1}$. Offenbar hat diese Serie dieselbe Anzahl von Factoren N, als die Serie: $1, 2, 3 \ldots N^{p-1}$, d. h. sie enthält $N : \frac{N^{p-1}-1}{N-1}$ mal.

Die $(Z+1)$te Serie enthält die Zahlen $q'+1, q'+2, \ldots q'+r', \ldots q'+N^{p-1}$ (wo $q' = m^{\pi} N^{p} + ZN^{p-1}$). Es ist $q'+r' \equiv r'$ für jeden Modul, welcher keine grössere Potenz von N als N^{p-1} ist; woraus folgt, dass diese $(Z+1)$te Serie den Factor N eben so oft enthält, als die Serie $1, 2, \ldots r', \ldots N^{p-1}$, d. h. $\frac{N^{p-1}-1}{N-1}$ mal. Die $m^{\pi-1}$ Serien enthalten somit den Factor $N : m^{\pi-1} \frac{N^{p-1}-1}{N-1}$ mal; also enthält das Product alle Zahlen von 1 bis $m^{\pi} N^{p} + m^{\pi-1} N^{p-1}$ den Factor N:

$$m^{\pi} \frac{N^{p}-1}{N-1} + m^{\pi-1} \frac{N^{p-1}-1}{N-1} \text{ mal.}$$

Man suche die grösste in $\frac{0 - m^{\pi} N^{p} - m^{\pi-1} N^{p-1}}{N^{p-2}}$ enthaltene ganze Zahl; sie sei $m^{\pi-2}$. Man erhält wie vorher $m^{\pi-2}$ Serien, welche zusammen den Factor N enthalten $m^{\pi-2} \frac{N^{p-2}-1}{N-1}$ mal u. s. f.

Man sei bis zu der Differenz $0 - m^{\pi} N^{p} - \ldots - m'' N^{2}$ gelangt. Bei der Division derselben durch N erhalte man die grösste ganze Zahl m' und den Rest m^{0}, so erhält man schliesslich m' Serien, deren letzte Zahl nur durch die erste Potenz von N theilbar sein wird. Die Differenz $0 - m^{0}$ zeigt die letzte aller durch N theilbaren Zahlen an.

Es folgt, dass das Product $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (0-1)\, 0$ den Factor N enthält:

$$m^{\pi} \frac{N^{p}-1}{N-1} + m^{\pi-1} \frac{N^{p-1}-1}{N-1} + m^{\pi-2} \frac{N^{p-2}-1}{N-1} + + + m'' \frac{N^{2}-1}{N-1} + m' \text{ mal.}$$

Die Anzahl der 0 Zahlen selbst ist:

$$m^{\pi} N^{p} + m^{\pi-1} N^{p-1} + m^{\pi-2} N^{p-2} + + m'' N^{2} + m' N + m^{0}.$$

Beispiel. Man soll untersuchen, wie oft der Factor 7 in dem Producte aller Zahlen von 1 bis 100000 enthalten ist. Es ist $p = 5$, $7^{5} = 16807$, $7^{4} = 2401$, $7^{3} = 343$, $7^{2} = 49$. Die Rechnung steht also:

$$\frac{100000}{16807} = 5 + \frac{15965}{16807};\ \frac{15965}{2401} = 6 + \frac{1559}{2401};\ \frac{1559}{343} = 4 + \frac{187}{343};\ \frac{187}{49} = 3 + \frac{40}{49};\ \frac{40}{7} = 5 + \frac{5}{7},$$

also $m^{V} = 5$, $m^{IV} = 6$, $m^{III} = 4$, $m^{II} = 3$, $m^{I} = 5$, $m^{0} = 5$; somit ist 7 in jenem Producte als Factor enthalten:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$5 \cdot \frac{7^5-1}{7-1} + 6 \cdot \frac{7^4-1}{7-1} + 4 \cdot \frac{7^3-1}{7-1} + 3 \cdot \frac{7^2-1}{7-1} + 5 = 16662 \text{ mal,}$$

und zwar in den Zahlen von $1 - 16807 \ldots \frac{7^5-1}{7-1} = 2801$ mal,

$$1 - 84035 \ldots 5 \cdot \frac{7^5-1}{7-1} = 14005 \text{ mal,}$$

$$84036 - 98441 \ldots 6 \cdot \frac{7^4-1}{7-1} = 2400 \text{ mal,}$$

$$98442 - 99813 \ldots 4 \cdot \frac{7^3-1}{7-1} = 228 \text{ mal,}$$

$$99814 - 99960 \ldots 3 \cdot \frac{7^2-1}{7-1} = 24 \text{ mal,}$$

$$99961 - 99995 \ldots 5 \text{ mal.}$$

Die Zahl 100000 selbst ist $= 5 \cdot 7^5 + 6 \cdot 7^4 + 4 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 5$.

II.

Ueber die Factoren der Formen $a^s - 1$ und $a^s + 1$.

Wir werden im Folgenden der Abkürzung wegen die Grösse $\frac{a^s-1}{a-1}$ durch (s) bezeichnen. Alle vorkommenden Buchstaben-Ausdrücke bedeuten positive ganze Zahlen.

1) Es sei $s = m\alpha$, α eine beliebige Zahl, so ist $(m\alpha)$ durch (α) theilbar. Denn man setze $a^\alpha = b$, so ist $a^{m\alpha} - 1 = b^m - 1$, welche Differenz durch $b - 1$, d. i. durch $a^\alpha - 1$ theilbar ist. Nach Beseitigung des gemeinschaftlichen Theilers $a - 1$ ergiebt sich, dass $(m\alpha)$ theilbar durch (α) ist.

2) Sind α_0 und β zwei relative Primzahlen, so sind es auch (α_0) und (β). Es sei $\beta > \alpha_0$. Man setze $\beta = m_0\alpha_0 + \alpha_1$, $\alpha_0 = m_1\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 = m_2\alpha_2 + \alpha_3$, ... $\alpha_{n-2} = m_{n-1}\alpha_{n-1} + \alpha_n$, $\alpha_{n-1} = m_n\alpha_n + 1$, wo $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 \ldots > \alpha_{n-1} > \alpha_n$; so sind bekanntlich $\beta, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n$ sämmtlich relative Primzahlen. Ferner ist allgemein für jeden Index ν: $(m_\nu\alpha_\nu + \alpha_{\nu+1}) = a^{\alpha_\nu+1}(m_\nu\alpha_\nu) + (\alpha_{\nu+1})$. Setzt man für den Index ν nach der Reihe die Werthe $0, 1, 2 \ldots n$, und berücksichtigt, dass $(m_\nu\alpha_\nu)$ theilbar durch (α_ν), so erhält man: $(\beta) \equiv (\alpha_1)$ mod. (α_0), $(\alpha_0) \equiv (\alpha_2)$ mod. (α_1), ... $(\alpha_{n-2}) \equiv (\alpha_n)$ mod. (α_{n-1}), $(\alpha_{n-1}) \equiv 1$ mod. (α_n). Hieraus erhellt, dass vorab

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(α_{n-1}) und (α_n), dann auch (α_{n-1}) und (α_{n-2}), und endlich auch alle übrigen Grössen (α_2) (α_1) (α_0) (β) relative Primzahlen unter einander sind. Es folgt hieraus, dass nicht etwa (α) und (β) gemeinschaftliche Primfactoren von der Form $m\alpha\beta + 1$ haben können.

3) Aus 1. folgt, dass $(\alpha\beta)$ und $(\beta\gamma)$ den gemeinschaftlichen Theiler (β) haben. Sind nun α und γ relative Primzahlen, so sind es auch, indem man $\alpha^\beta = b$ setzt, $\frac{b^\alpha - 1}{b-1}$ und $\frac{b^\gamma - 1}{b-1}$. Hieraus ergiebt sich, dass (β) der grösste gemeinschaftliche Theiler von $(\alpha\beta)$ und $(\beta\gamma)$ ist.

4) Es sei β der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$, so ist $(\alpha\beta\gamma)$ der kleinste Dividuus von $(\alpha\beta)$ und $(\beta\gamma)$. Denn die Function $(\alpha\beta\gamma)$ ist theilbar durch jede der Functionen $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$; aber dasselbe gilt von keiner kleineren Function, z. B. $(\alpha'\beta\gamma)$, in welcher $\alpha' < \alpha$.

Es wird nämlich α wenigstens einen Theiler haben, welchen α' nicht hat; derselbe sei δ^n. Da α und γ relative Primzahlen sind, so hat γ den Theiler δ nicht. Es habe nun noch β den Theiler δ^m, so hat also $(\alpha\beta)$ den Theiler (δ^{m+n}), welcher zugleich Theiler von $(\alpha'\beta\gamma)$ sein müsste. Diese Function hat aber nur den Theiler (δ^n). Folglich ist $(\alpha\beta\gamma)$ der kleinste Dividuus von $(\alpha\beta)$ und $(\beta\gamma)$.

In gleicher Weise lässt sich darthun, dass, wenn s der kleinste Dividuus der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ ist, auch (s) der kleinste Dividuus der Functionen (α), (β), $(\gamma), \ldots (\mu)$ ist. Man suche nämlich zuerst den kleinsten Dividuus von (α) und (β); er sei (s'), dann den von (s') und (γ); er sei (s'') u. s. f.

5) Nach dem Fermatschen Satze sind die Primfactoren der Function (s) von der Form $ms + 1$, oder, wenn s eine ungrade Zahl ist, von der Form $2ms + 1$. Indessen haben nicht alle Factoren die angegebene Form. Es sei α ein Factor von s, so ist (s) theilbar durch (α), und es sind die Primfactoren der letzten Function höchstens von der Form $m'\alpha + 1$. In gleicher Weise ist (s) theilbar durch $\left(\frac{s}{\alpha}\right)$, und die Primfactoren dieser Function sind höchstens von der Form $m''.\frac{s}{\alpha} + 1$.

Hat s die beiden Primfactoren α und β, so ist (s) theilbar durch (α) (β), und nur in dem Quotienten $(s) : (\alpha)$ (β) sind die Primfactoren von der specifischen Form $ms + 1$ zu suchen. Ich nenne diese Factoren die specifischen Primfactoren der Function (s).

Es ist klar, dass die specifischen Primfactoren zweier Functionen (s) und (s') sämmtlich verschieden sind. Sind s und s' relative Primzahlen, so haben jene

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Functionen gar keinen gemeinschaftlichen Theiler; haben aber s und s′ den grössten gemeinschaftlichen Theiler δ, so sind $\left(\frac{s}{\delta}\right)$ und $\left(\frac{s'}{\delta}\right)$ relative Primzahlen, und diese Functionen sind es eben, welche die specifischen Primfactoren der Functionen (s) und (s′) enthalten.

Es sei $s = \alpha\beta\gamma$, und α, β, γ seien einfache Primzahlen. Es ist (s) theilbar durch (α), (β), (γ), $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, $(\beta\gamma)$. Das Product $(\alpha\beta)\,(\alpha\gamma)\,(\beta\gamma)$ hat nun den quadratischen Factor $(\alpha)^2\,(\beta)^2\,(\gamma)^2$, während $(\alpha\beta\delta)$ allgemein nur den einfachen Theiler $(\alpha)\,(\beta)\,(\gamma)$ hat; somit ist $(\alpha\beta\gamma)$ theilbar durch $\frac{(\alpha\beta)\,(\alpha\gamma)\,(\beta\gamma)}{(\alpha)\,(\beta)\,(\gamma)}$, und nur die Factoren des hieraus entspringenden Quotienten können specifische Primfactoren der Function (s), d. h. von der Form $m(\alpha\beta\gamma) + 1 = ms + 1$ sein.

Es sei jetzt s das Product von n einfachen Primfactoren $= \alpha\beta\gamma \ldots \lambda\nu$. Man setze das Product $(\alpha)\,(\beta)\,(\gamma) \ldots (\lambda)\,(\nu) = [1]$. Man combinire die n Factoren zu Binionen ohne Wiederholungen, an Zahl $\frac{n\,(n-1)}{1.2}$, und setze das Product $(\alpha\beta)\,(\alpha\gamma)\,(\beta\gamma) \ldots (\lambda\nu) = [2]$. Im Allgemeinen verbinde man die n Elemente $\alpha\beta\gamma \ldots \lambda\nu$ zu Combinationen der pten Ordnung ohne Wiederholungen, an Zahl $n_p = \frac{n.(n-1)..(n-p+1)}{1.2..p}$, mache jede dieser Combinationen zum Exponenten der Function (—), und setze das Product aller dieser n_p Functionen $= [p]$. Es ist auch $[n] = (s)$. Wenn nun Q die ganze Zahl ist, welche die specifischen Primfactoren der Function (s) enthält, so ist:

$$[n] = \frac{[n-1]}{[n-2]} \times \frac{[n-3]}{[n-4]} \times \frac{[n-5]}{[n-6]} \times \ldots \times \frac{[n-2m-1]}{[n-2(m+1)]} \times Q.$$

Da [1] der letzte Factor des rechter Hand stehenden Productes sein soll, so ist, wenn n grade ist, $m = \frac{n-2}{2}$, wenn n ungrade ist, $m = \frac{n-3}{2}$; im ersten Falle steht [1] im Zähler, im zweiten im Nenner.

Es ist [n] durch jeden der Factoren von [n — 1] theilbar; ferner ist ersichtlich, dass [n — 1] jeden einzelnen Factor von [n — 2] wirklich enthält, denn es wird die (n — 1)te Combination aus der (n — 2)ten dadurch gebildet, dass man den (n — 2) Elementen der letzteren noch die zwei übrigen, in (n — 2) nicht enthaltenen Elemente, je einzeln hinzufügt. Es folgt umgekehrt, dass jeder Factor von [n — 2] in [n — 1] zweimal enthalten ist, d. h. dass [n — 1] theilbar ist durch $([n-2])^2$. Da aber jeder Factor von [n — 2] nur einfach in [n] enthalten ist, so muss er durch Division einmal aus [n — 1] entfernt werden. Also $[n] = \frac{[n-1]}{[n-2]} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

Es ist ferner jeder Factor [n — 3] in [n — 1] dreimal enthalten, denn um aus einer Combination der (n — 3)ten Ordnung die (n — i)te Combination zu bilden,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hat man die drei fehlenden Elemente zu Binionen zu combiniren und jede Binio zur $(n-3)$ten Combinationen hinzuzufügen. Die Anzahl dieser Binionen ist $\frac{3.2}{1.2} = 3$. Also ist umgekehrt jeder Factor $[n-3]$ in $[n-1]$ dreimal enthalten. In $[n-2]$ ist jeder Factor von $[n-3]$ ebenfalls dreimal enthalten, vermöge des Gesetzes, nach welchem aus der Combination der $(n-3)$ten Ordnung die Combination der $(n-2)$ten Ordnung gebildet wird. Es hat also $\frac{[n-1]}{[n-2]}$ keinen Theiler von $[n-3]$, da aber $[n]$ diese Theiler hat, so müssen sie den Theilern derselben hinzugefügt werden. Es ist somit:

$$[n] = \frac{[n-1]}{[n-2]} \times {}^{[n-3]} \times \ldots\ldots$$

Geht man zur allgemeinen Ordnung über, so fragt sich, wie oft jeder Factor von $[n-p]$ in den Producten $[n-1]$, $[n-2]$, $[n-3] \ldots [n-p+1]$ enthalten sei.

Die $(n-1)$ Combination wird aus der $(n-p)$ten gebildet, indem man die p fehlenden Elemente zu $(p-1)$tionen combinirt, und dieselben den $(n-p)$tionen hinzufügt. Die Anzahl dieser $(p-1)$tionen ist p, und eben so oft ist jeder Factor von $[n-p]$ in $[n-1]$ enthalten. Combinirt man p Elemente zu $(p-2)$tionen und fügt dieselben den $(n-p)$tionen hinzu, so erhält man die $(n-2)$tionen, und zwar aus jeder $(n-p)$tion erhält man $\frac{p.p-1}{1.2} = p_2$ Eben so oft ist jeder Factor von $[n-p]$ in $[n-2]$ enthalten.

Man combinire die p Elemente zu $(p-0)$tionen, man erhält deren $\frac{p.p-1\ldots.(+0+1)}{1.2\ldots.(p-0)} = p_{p-0}$. Fügt man dieselben den $(n-p)$tionen hinzu, so erhält man die $(n-0)$tionen, woraus folgt, dass in $[n-0]$ jeder Factor von $[n-p]$ enthalten ist p_{p-0} mal. Endlich ist in $[n-p+1]$ jeder Factor von $[n-p]$ enthalten p mal.

Setzt man für 0 alle Werthe von 1 bis $p-1$ und erwägt, dass beständig $p_{p-0} = p_0$, so ergiebt sich, dass jeder Factor von $[n-p]$, und also $[n-p]$ selbst in dem Producte der Brüche der $[-]$ Functionen enthalten ist:

$$p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + - \pm p_2 \mp p_1 \text{ mal.}$$

Diese Reihe ist $= 0$, wenn p ungerade, und $= 2$, wenn p gerade ist, wie sich aus der Entwickelung von $(1-1)^p$ ergiebt. Ist p ungerade, so steht $[n-p+1]$ im Nenner, und das Product $\frac{[n-1]}{[n-2]}\frac{[n-3]}{[n-4]} \times \times \frac{[n-p+2]}{[n-p+1]}$ hat keinen Factor $[n-p]$, da ihn aber $[n]$ hat, so muss er noch hinzugefügt werden, es findet somit $[n-p]$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

seinen Platz in dem Zähler. Ist p gerade, so erhält $[n-p]$ seinen Platz in dem Nenner; das Product $\frac{[n-1]}{[n-2]} \times \frac{[n-3]}{[n-4]} \times \times {}^{[n-p+1]}$ hat den Factor $[n-p]$ zweimal, da ihn aber $[n]$ nur einmal hat, so ist $[n-p+1]$ durch $[n-p]$ zu dividiren.

Da keine besonderen Bedingungen in Betreff der Grösse p gemacht worden sind, so gilt das eben entwickelte Gesetz für alle Werthe derselben bis $p = n-1$.

Es sei jetzt n gerade, also $[1]$ der letzte Zähler des Productes

$$\frac{[n-1]}{[n-2]} \times \frac{[n-3]}{[n-4]} \times \times \frac{[3]}{[2]} \times {}^{[1]} = \frac{[n]}{Q}.$$

Es enthält $[1]$ nur die specifischen Primfactoren der niedrigsten Formen (α), (β) etc., in welchen der Exponent nur einen Primfactor hat. In $[n]$ ist der Factor $[1]$ nur einmal enthalten, und das Product $\frac{[n-1]}{[n-2]} \times \ldots \times \frac{[3]}{[2]}$ enthält ihn gar nicht. Es bleiben also von $[2]$ nur die eigenen specifischen Primfactoren, welche von der Form $\frac{(\alpha\beta)}{(\alpha)(\beta)}$ sind, übrig. Diese Factoren sind in $\frac{[n-1]}{[n-2]} \times \ldots \times {}^{[3]}$ enthalten zweimal, also in $\frac{[n-1]}{[n-2]} \times \ldots \times \frac{[3]}{[2]}$ nur einmal. Nimmt man sie aus diesem Producte heraus, so bleiben von $[3]$ nur die eigenen specifischen Primfactoren, welche nur einmal in dem Producte enthalten sind, übrig. Dieses sind die Factoren der Form $(\alpha\beta\gamma) : \frac{(\alpha\beta)(\beta\gamma)\alpha\gamma)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$. In gleicher Weise ergiebt sich, dass von den Producten $[4]$, $[5] \ldots [n-1]$ nur immer die eigenen specifischen Primfactoren übrig bleiben. Ein gleiches Resultat ergiebt sich, wenn $[1]$ der letzte Nenner ist, in welchem Falle das von $[2]$ Gesagte auf $[1]$ anwendbar ist.

Es ist somit erwiesen, dass $\frac{[n-1]}{[n-2]} \times \frac{[n-3]}{[n-4]} \times \ldots \times \frac{[n-2m-1]}{[n-2(m+1)]}$ (wo $m = \frac{n-2}{2}$, wenn n gerade, und $m = \frac{n-3}{2}$, wenn n ungerade ist) die sämmtlichen specifischen Primfactoren von allen niedrigen Formen $[n-1]$, $[n-2]$, $\ldots [2]$, $[1]$ enthält. Sie enthält sie ferner nur in der ersten Potenz. Dasselbe ist aber auch mit $[n] = (s)$ der Fall. Sind aber aus $[n]$ alle specifischen Primfactoren niedrigerer Formen entnommen, so bleiben nur die specifischen Factoren der Form $[n]$, deren Product wir Q genannt haben, übrig.

Es ist indessen nicht zu übersehen, dass Q noch recht wohl Factoren enthalten kann, welche nicht zu den specifischen Primfactoren von (s) gehören. Es ist nämlich $a^{nm} - 1 = (a^n - 1)(a^{n(m-1)} + a^{n(m-2)} + + a^{2n} + a^n + 1)$. Ist nun für den kleinsten Exponenten n, $a^n - 1$ theilbar durch N, nicht durch N^2, so muss, wenn $a^{nm} - 1$ theilbar durch N^2 sein soll, $m = N$ sein. Die Reihe $a^{n(m-1)} + a^{n(m-2)} + + a^n + 1$ enthält m Glieder, und jedes ist $\equiv 1$ mod. N. Folglich ist der kleinste Werth von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$m = N$. Wenn aber nicht $a^\alpha \equiv 1$ mod. N, so ist $a^{\alpha N} - 1$ überhaupt durch N nicht theilbar. Denn es sei $a^\alpha = e + gN$, $e < N$, so ist $a^{\alpha N} = e^N + gN^2 + hN^3$ etc. Es müsste also $e^N \equiv 1$ mod. N sein, was aber überhaupt unmöglich ist, wenn nicht $e \equiv 1$ mod. N. Da nun (nN) theilbar durch N^2; aber nicht, wenn α ein Theiler von n, (αN) theilbar durch N; so kann der Factor N das zweite Mal nur in dem Quotienten Q enthalten sein.

Es sei z. B. $a = 10$, $s = 42$, $n = 7$, so ist $(42) : \frac{(6)\,(14)\,(21)}{(2)\,(3)\,(7)} = 1098900989011$ $= 7 \,.\, 156985855573$. Für die Zahl 7 ist $10^6 \equiv 1$.

Hat jedoch s noch andere Factoren, als n und N, z. B. δ, so ist (nN) ein Theiler von (δnN), und selbst theilbar durch N^2, somit hat Q den Theiler N nicht.

Ist $n = 1$, so ist N ein Theiler von $a - 1$. Es sei allgemein $a = zN^\nu + 1$, $s = \beta N^\mu$, so ist leicht zu sehen, dass $a^s = 1$ theilbar durch $N^{\nu+\mu}$ ist. Ist z. B. $a = 10$, $s = 3^\mu$, so ist $10^{3^\mu} - 1$ theilbar durch $3^{\mu+2}$, d. h. die Periode des Decimalbruches, welcher $= \frac{1}{3^{\mu+2}}$, enthält 3^μ Stellen.

Es sei jetzt s ein Produkt von Potenzen einfacher Primzahlen, zuerst $s = \alpha^\mu$. Die Function $(s) = (\alpha^\mu)$ hat nur Theiler von der Form $(\alpha^{\mu'})$ in welcher $\mu' < \mu$. Man setze $a^{\alpha^{\mu'}} = B$, so ist $a^{\alpha^{\mu'}\,\alpha^{\mu-\mu'}} = a^{\alpha^\mu} = B^{\alpha^{\mu-\mu'}}$, und $B^{\alpha^{\mu-\mu'}} - 1$ theilbar durch $B - 1 = a^{\alpha^{\mu'}} - 1$. Auch hat (α^μ) keinen Theiler von der Form $(\beta\alpha^{\mu'})$, wo β und α relative Primzahlen sind. Wenn B die vorige Bedeutung beibehält, so ist $a^{\beta\alpha^{\mu'}} = B^\beta$, und $B^{\alpha^{\mu-\mu'}} - 1$ und $B^\beta - 1$ haben nur den grössten gemeinschaftlichen Theiler $B - 1$, da α und β relative Primzahlen sind. Die sämmtlichen Theiler von (α^μ) sind also von der Form (α), (α^2), $(\alpha^3) \ldots (\alpha^{\mu-2})$, $(\alpha^{\mu-1})$, und da zugleich in $(\alpha^{\mu-1})$ die Theiler (α), (α^2), $(\alpha^3) \ldots (\alpha^{\mu-2})$ bereits enthalten sind, so sind die specifischen Primfactoren von (α^μ) nur in dem Quotienten $(\alpha^\mu) : (\alpha^{\mu-1})$ zu suchen. Es ist ersichtlich, dass (α^μ) ausser seinen eigenen Primfactoren noch diejenigen sämmtlicher Formen $(\alpha^{\mu-1})$, $(\alpha^{\mu-2}) \ldots (\alpha^2)$ und (α) enthält.

Es sei $s = \alpha^\mu \beta^\nu$, so ist $(\alpha^\mu \beta^\nu)$ theilbar durch $(\alpha^{\mu-1} \beta^\nu)$ und durch $(\alpha^\mu \beta^{\nu-1})$. Beide Factoren haben aber den gemeinschaftlichen Theiler $(\alpha^{\mu-1} \beta^{\nu-1})$. Setzt man $a^{\alpha^{\mu-1}\beta^{\nu-1}} = C$, so ist $\frac{C^{\alpha\beta}-1}{C-1}$ theilbar durch $\frac{C^\alpha-1}{C-1} \times \frac{C^\beta-1}{C-1}$.

Man sieht, dass die Frage auf den frühern Fall, in welchem s ein Product von lauter einfachen Primfactoren war, zurückkommt.

Es sei $s = \alpha^\mu \beta^\nu \ldots k^\pi$; man setze $a^{\alpha^{\mu-1}\,\beta^{\nu-1} \ldots k^{\pi-1}} = C$, so ist $a^{\alpha^\mu\beta^\nu \ldots k^\pi} - 1 = C^{\alpha\beta \cdots \varkappa} - 1$, und die Zerlegung dieses Productes erfolgt wie früher.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn $s = nN^\nu$, und n die kleinste Zahl ist, welche (n) theilbar durch N macht, so ist (nN^ν) theilbar durch $N^{\nu+1}$, und N^ν ein Theiler von Q. — Es sei $a^n = 1 + mN$, so ist $(1 + mN)^\lambda - 1 = \lambda mN + \lambda_2 m^2 N^2 + + \lambda_0 m^0 N^0 + +$. Es sei nun $\lambda = N^\nu$, so ist

$$\lambda^0 = \frac{N^\nu (N^\nu - 1)(N^\nu - 2) \ldots (N^\nu - 0 + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (0-1)0.}$$

Es lässt sich nachweisen, dass $\lambda_0 m^0 N^0$ immer theilbar durch $N^{\nu+1}$ ist. Man trenne von λ_0 den Theiler N^ν, und betrachte den Bruch:

$$\frac{N^\nu - 1}{1} \times \frac{N^\nu - 2}{2} \times \ldots \times \frac{N^\nu - q}{q} \times \ldots \times \frac{N^\nu - 0}{0}.$$

Ist $N^\nu - q = r$, so ist $r + q = N^\nu$; wenn also q nicht theilbar durch N ist, so ist es auch r nicht; ist aber q theilbar durch N^μ, $\mu < \nu$, so ist es auch r. Denn es sei $q = q' N^\mu$, so muss $r = N^\nu - q' N^\mu$ theilbar durch N^μ sein. Es haben somit q und r dieselben Potenzen von N zu Factoren. Ist nun 0 eine relative Primzahl gegen N, so hat λ_0 den Theiler N^ν, da in dem übrigen Bruche sich alle Factoren N heben; ist indessen 0 theilbar durch $N^{\nu'}$, so hat der Bruch $\lambda_0 : N^\nu$ den Theiler $N^{\nu'}$ im Nenner mehr, da der Zähler den Factor $N^\nu - 0$ nicht enthält. Im ersten Falle hat $\lambda_0 m^0 N^0$ den Factor $N^{\nu+0}$, im anderen Falle hat N den Exponenten $(\nu + N^{\nu'} - \nu')$. Beide Exponenten sind immer gleich oder grösser als $\nu + 1$.

Da das erste Glied der Reihe $a^{n N^\nu} - 1$ nur theilbar durch $N^{\nu+1}$ ist, so folgt, dass diese Differenz nur durch eben diese Potenz von N theilbar sein kann.

Hat n einen Theiler α, so lässt sich wie früher nachweisen, dass (αN^ν) überhaupt nicht theilbar durch N ist. Hieraus folgt, dass der Theiler N^ν nur in dem Quotienten der specifischen Primfactoren der Form (nN^ν) enthalten sein kann.

Wenn (n) theilbar durch N^μ, so ergiebt sich durch ein ganz ähnliches Raisonnement, dass (nN^ν) durch $N^{\nu+\mu}$ theilbar, und dass N^ν ein Theiler von Q ist.

---

6. Die Zerlegung von $a^s + 1$ unterliegt keinen eigenthümlichen Schwierigkeiten; sie erleidet nur dann Einschränkungen, wenn s grade ist. Bekanntlich ist $a^{2^\nu} + 1$ ein algebraischer Prim-Ausdruck, weder Theiler noch Dividuus von $a^{2^\mu} + 1$. Es folgt hieraus, dass $a^{2^\nu \alpha} + 1$, (wo α ungrade ist) den kleinsten Theiler $a^{2^\nu} + 1$ habe, und dass, wenn $a^z + 1$ ein Theiler von $a^{2^\nu \alpha} + 1$ sein soll, auch z den Theiler 2^ν haben müsse.

Man setze $\frac{a^s + 1}{a + 1} = (s)'$. Es ergeben sich folgende Sätze:

1. Wenn α ungrade ist, so ist $(m\alpha)'$ theilbar durch $(m)'$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Wenn α und β relative Primzahlen sind, so sind es auch $(\alpha)'$ und $(\beta)'$. Denn es haben (2α) und (2β) den grössten gemeinschaftlichen Theiler $(2) = a + 1$. Da nun $\frac{(2\alpha)}{a+1} = (\alpha)\,(\alpha)'$ und $\frac{(2\beta)}{a+1} = (\beta)\,(\beta)'$ relative Primzahlen sind, so sind es auch $(\alpha)'$ und $(\beta)'$.

3. Sind α und γ ungrade und relative Primzahlen, so ist $(\beta)'$ der grösste gemeinschaftliche Theiler und $(\alpha\beta\gamma)'$ der kleinste Dividuus von $(\alpha\beta)'$ und $(\beta\gamma)'$.

Behufs der Zerlegung der Function $(s)'$ hat man aus dem Exponenten s die Potenzen von 2 auszuscheiden. Es sei $s = 2^{\nu}z$, und z ungrade; man setze $a^{2\nu} = b$, so erfolgt die Ausscheidung der specifischen Primfactoren aus $\frac{b^z+1}{b+1}$ in ganz gleicher Weise wie sie bei der Function (z) gezeigt worden ist.

III.

Nach dem verallgemeinerten Fermatschen Lehrsatze ist, wenn P ein Product von Primzahlen oder deren Potenzen, auch relative Primzahl gegen a, ferner π die Anzahl aller derjenigen Zahlen ist, welche kleiner als P und relative Primzahlen gegen dieselbe sind, immer $a^{\pi} \equiv 1$ mod. P. Wenn ferner auch $a^z \equiv 1$ mod. P sein soll, wo $z < \pi$, so ist z ein Theiler von π.

Indessen ist der Lehrsatz in dieser Fassung noch nicht auf seinen wahren Ausdruck gebracht, und es kann der Exponent von a noch genauer bestimmt werden. Es sei $P = N^{\nu} \times M^{\mu} \times .. \times R^{\varrho}$; und N, M . . . R Primzahlen; ferner seien n, m . . . r die kleinsten Zahlen, welche $a^n \equiv 1$ mod. N, $a^m \equiv 1$ mod. M, $a^r \equiv 1$ mod. R machen. Ist s der kleinste Dividuus der Zahlen $nN^{\nu-1}$, $mM^{\mu-1}$, ... $rR^{\varrho-1}$, so ist $a^s \equiv 1$ mod. P. Es ist $\pi = N^{\nu-1}\,M^{\mu-1} \ldots . R^{\varrho-1} \times (N-1)\,(M-1) \ldots (R-1)$, und n ein Theiler von $N-1$, m ein Theiler von $M-1$, r ein Theiler von $R-1$, also offenbar s ein Theiler von π.

Da s theilbar ist durch $nN^{\nu-1}$, $mM^{\mu-1}$, . . . $rR^{\varrho-1}$, so ist auch (s) theilbar durch $(nN^{\nu-1})$, $(mM^{\mu-1})$, . . . $(rR^{\varrho-1})$, und durch alle Factoren dieser Functionen, also auch durch N^{ν}, M^{μ}, ... R^{ϱ}. Somit ist $a^s \equiv 1$ mod. P.

Wenn ferner (n), (m), . . . (r) nur durch die ersten Potenzen von N, M, . . . R theilbar sind, so wird es keinen kleineren Dividuus von P, welcher die Form (—) hat, geben, als (s).

Es fordern nämlich die Factoren N, M, . . . R die Formen (n), (m), . . . (r), und diese Formen haben, wenn z der kleinste Dividuus von n, m, . . . r ist, keinen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kleineren Dividuus als (z), wie dies früher bewiesen worden. Es ist also (z) die kleinste durch $N \times M \times \ldots \times R$ theilbare Form. Hat nun z den Factor N nicht, so enthält (z) diesen Factor nur in der ersten Potenz, und es erweist sich wie früher, dass wenn $(z\lambda)$ durch N^{ν} theilbar sein soll, der kleinste Werth für λ ist $N^{\nu-1}$. Hat jedoch eine der Zahlen m, ... r den Theiler $N^{\nu'}$, so wird auch z denselben Theiler, und (z) den Theiler $N^{\nu'+1}$ haben. Ist nun $\nu' < \nu - 1$, so ergiebt sich, dass, wenn $(z\lambda')$ durch N^{ν} theilbar sein soll, der kleinste Werth von λ' sein wird $N^{\nu-\nu'-1}$. Ist aber $\nu' > \nu - 1$, z. B. $= \nu + \chi$, so ist da z den Theiler n hat, (z) theilbar durch $N^{\nu+\chi+1}$, und es stellt sich das sonderbare Resultat heraus, dass wenn man $M^{\mu} \times \ldots \times R^{\varrho} = L$ setzt, die Producte $NL, N^2L, N^3L, \ldots N^{\nu+\chi}L, N^{\nu+\chi+1}L$ sämmtlich denselben kleinsten Dividuus der Form (—) haben.

Jeden Falls muss, wenn (s) durch P theilbar sein soll, s die höchste in den Zahlen $nN^{\nu-1}$, $mM^{\mu-1}, \ldots rR^{\varrho-1}$ vorkommende Potenz von N enthalten. Da nun von den übrigen Primzahlen M, ... R dasselbe gilt; so folgt, dass (s) die kleinste durch $N^{\nu} M^{\mu} \ldots R^{\varrho}$ theilbare Form ist.

Es sei jetzt (n) durch eine höhere Potenz von N theilbar, ohne dass n selbst den Factor N habe; so ergiebt sich, dass wenn $(n) \equiv 0$ mod. $N^{\nu'}$, auch sein muss $(nN^{\nu-\nu'}) \equiv o$ mod. N^{ν}, und es genügt für den kleinsten Dividuus s der Factor $N^{\nu-\nu'}$. Es ist z. B. $18^3 - 1$ theilbar durch 7^3, folglich $18^{3.7^{\nu-3}} - 1$ theilbar durch 7^{ν}.

In dem erwähnten Falle ist es nicht möglich, für die Basis a eine Form (n) zu finden, welche nur durch niedrige Potenzen als $N^{\nu'}$ theilbar wäre, und wenn wie früher $L = M^{\mu} \times \ldots \times R^{\varrho}$, so haben $NL, N^2L \ldots N^{\nu'}L$ sämmtlich denselben kleinsten Dividuus.

Wir stellen jetzt die Aufgabe, alle diejenigen kleinsten Zahlen zu suchen, für welche die Basis a zum Exponenten s gehört, d. h. für welche $a^s \equiv 1$, aber nicht $a^{s'} \equiv 1$, wenn $s' < s$.

Diese Zahlen zerfallen in Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen.

1. Für jeden einzelnen specifischen Primfactor der Form (s), und nur für diese Primzahlen allein ist $a^s \equiv 1$.

2. Es sei s der kleinste Dividuus von m, n, ... r; jedoch sei unter diesen Zahlen, m, n, ... r keine, welche entweder selbst als Factor in einer anderen enthalten ist, oder deren sämmtliche Factoren in mehreren andern enthalten sind, — welche also zur Bildung des kleinsten Dividuus s überflüssig wäre. Man bezeichne jetzt mit ((m)) der Reihe nach einen jeden einzelnen der specifischen Primfactoren

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Form (m), und dieselbe Bedeutung haben ((n)) . . . ((r)); so ist für jedes der Producte ((m)) ((n)) . . . ((r)) immer $a^s \equiv 1$.

Denn es fordern für die Basis a, die Factoren ((m)), ((n)), . . . ((r)) der Reihe nach die Exponenten m, n, . . . r; da nun keine dieser Zahlen zur Bildung von s, auch keine der Formen (m), (n) . . . (r) zur Bildung von (s) entbehrt werden kann, so ist einerseits $a^s \equiv 1$ mod. ((m)) ((n)) . . . ((r)), andererseits nicht, wenn $s' < s$, $a^{s'} \equiv 1$, nach denselben Modul.

Wäre unter den Zahlen m, n, . . r eine z. B. p, welche zur Bildung des kleinsten Dividuus nichts beträgt, so sind zwar die Factoren ((p)) verschieden von allen übrigen Factoren ((m)) etc., und es ist auch $a^s \equiv 1$ mod. ((m)) ((n)) . . . ((r)) ((p)); aber sie sind für das Product überflüssig, da schon dessen übrige Factoren den Exponenten s fordern.

Um keine der gesuchten Zahlen zu verfehlen, zerlege man s in seine Primfactoren, bilde aus diesen alle möglichen Theiler von s, combinire diese Theiler zu zweien, dreien u. s. f. dergestalt, dass jeder Theiler wenigstens einen Factor hat, den die übrigen Theiler nicht haben, dass also diese Verbindungen nur immer grade den kleinsten Dividuus s haben. Zu diesen Theilern als Exponenten, nehme man die specifischen Primfactoren der Formen (—) und bilde deren Producte, wie oben gezeigt worden.

3. Wenn n ein Theiler von $N - 1$, ferner $s = nN^{\nu - \nu'}$, und n die kleinste Zahl ist, welche $(n) \equiv o$ mod. $N^{\nu'}$ macht, so ist N^{ν} eine der gesuchten Zahlen. Denn es fordert $N^{\nu'}$ die Form (n), und $(nN^{\nu-\nu'}) \equiv 0$ mod. N^{ν}. Da nun $(n'N^{\nu-\nu'})$ überhaupt nicht theilbar durch N ist, wenn $n' < n$, und $(nN^{\nu-\nu'-\pi})$ nur theilbar durch $N^{\nu-\pi}$, so ist (s) die kleinste durch N^{ν} theilbare Form, und N^{ν} eine kleinste Zahl, insofern jede niedrigere Potenz von N sich mit einem kleinern Exponenten begnügt.

Die Zahl N^{ν} steht in der Mitte zwischen den specifischen Primfactoren und den zusammengesetzten Factoren der Form (s). Die ersteren sind lediglich in dem Quotienten Q, die letzteren ausschliesslich in $\frac{(s)}{Q}$ zu suchen. Aber von N^{ν} hält sich der eine Theil seiner Factoren, nämlich $N^{\nu-\nu'}$ in jenem, der andere Theil, nämlich $N^{\nu'}$ in diesem, und zwar in dem Theiler (n) von (s) fest.

Beispiele. 1. Es habe s die vier Primfactoren $\alpha\beta\gamma\delta$, so würde man 1) jeden specifischen Primfactor jedes Factors von [3] zu multipliciren haben mit denen von [1], also z. B. $((\alpha\beta\gamma))$ $((\delta))$; 2) eben so [3] mit [2], z. B. $((\alpha\beta\gamma))$ $((\alpha\delta))$; 3) [3] mit [3], z. B. $((\alpha\beta\gamma))$ $((\alpha\beta\delta))$; 4) [2] mit [2], z. B. $((\alpha\beta))$ $((\gamma\delta))$ und $((\alpha\beta))$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$((\alpha\gamma))\ ((\alpha\delta))$; 5) [2] mit [1] [1], z. B. $((\alpha\beta))\ ((\gamma))\ ((\delta))$ und [2] [2] mit [1] z. B. $((\alpha\beta))\ ((\alpha\gamma))\ ((\delta))$; 6) [1] mit [1] [1] [1], d. i. $((\alpha))\ ((\beta))\ ((\gamma))\ ((\delta))$. Aus der ersten Klasse erhält man 4 verschiedenartige Combinationen, aus der zweiten 12, aus der dritten 6, aus der vierten $3+4=7$, aus der fünften $6+12=18$, aus der sechsten 1. Diese sechs Klassen geben also in 48 verschiedenartigen Combinationen, von denen jede mehr oder weniger der gesuchten Zahlen enthalten wird, die sämmtlichen kleinsten zusammengesetzten Zahlen für welche $a^s \equiv 1$ ist.

2. Ist $s=\alpha^\nu$, so giebt es überhaupt keine zusammengesetzten kleinsten Zahlen, welche specifische Factoren von (α^ν) sind.

3. Es sei $s=\alpha^\nu\beta^\nu$. Alle brauchbaren Theiler von s haben die Formen $\alpha^\nu\beta^{\mu'}$, $\beta^\mu\alpha^{\nu'}$. Man hat also $((\alpha^\nu))$, $((\alpha^\nu\beta))\ ((\alpha^\nu\beta^2)), \ldots ((\alpha^\nu\beta^{\mu-1}))$ der Reihe nach zu multipliciren mit $((\beta^\mu))\ ((\beta^\mu\alpha))$, $((\beta^\mu\alpha^2)) \ldots ((\beta^\mu\alpha^{\nu-1}))$. Diess giebt $\nu\mu$ verschiedene Klassen von zusammengesetzten kleinsten Zahlen. —

4. Es sei $a=10$, $s=42$. Man sucht alle diejenigen kleinsten Zahlen, welche specifische Factoren von $10^{42}-1$ sind. Ist eine solche Zahl N, so wird $\frac{1}{N}$ in einen Decimalbruch verwandelt, eine 42stellige Per. geben. Es ist $42=2.3.7$ und $(42)=\frac{(6)\,(14)\,(21)}{(2)\,(3)\,(7)}\,Q$.

1) Es ist $Q=7\times127\times2689\times459691$. Die Zahlen 127, 2689, 459691 sind die einzigen Primzahlen, welche 42stellige Decimal-Perioden geben.

2) Da ferner $42=6.7$, und 10^6-1 theilbar durch 7, so ist (42) theilbar durch 49, d. h. diese Zahl giebt eine 42stellige Decimal-Periode.

3) Die zusammengesetzten Formen sind: (21) (14); (21) (6); (14) (6); (21) (2); (6) (7); (14) (3); (2) (3) (7).

Indem man die in der späterfolgenden Tabelle angegebenen specifischen Primfactoren dieser Formen benutzt, erhält man:

(21) (14) = 39090913, 1757272903, 9853354621699.
(21) (6) = 301, 559, 13531, 25129, 75870823, 140902957.
(14) (6) = 6363637, 11818183.
(21) (2) = 473, 21263, 119225579.
(6) (7) = 1673, 32543, 3107, 60437.
(14) (3) = 24545457, 33636367.
(2) (3) (7) = 70983, 97273, 1380753, 1892143.

Diese 28 Zahlen sind die einzigen kleinsten Zahlen, welche 42stellige Decimal-Perioden geben. Will man grössere Zahlen haben, so ist nur nöthig, eine kleinste Zahl mit irgend einem Factor von $10^{42}-1$, den sie noch nicht enthält, zu mul-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

tipliciren. Wir übergehen diese bedeutungslose Mannigfaltigkeit. — Man sieht, dass die vollständige Berechnung von dergleichen Zahlen mit ziemlichen Schwierigkeiten verbunden ist. Die nachstehende Tabelle giebt linker Hand die Anzahlen von Stellen der Decimal-Perioden, rechter Hand die dazu gehörigen Prim- und zusammengesetzten Zahlen, und zwar sind die ersten von den letzteren durch einen Strich getrennt. Es bedeutet also $6 = 7, 13 \mid 297, 407$; dass 7 und 13 die einzigen Primzahlen, und 297 und 407 die einzigen zusammengesetzten kleinsten Zahlen sind, welche 6stellige Decimal-Perioden geben. Bis zur Stellen-Anzahl 32 habe ich das Verzeichniss so vollständig, als ich es gekannt habe, gegeben; von 32 an bis 100 sind nur die Primzahlen beigefügt. Punkte bedeuten solche fehlende Zahlen, von denen ich nicht die Ueberzeugung habe, dass sie kleinste Zahlen sind; und zu den ausgelasseneu Stellen-Anzahlen habe ich keinen einzigen specifischen Primfactor gekannt. In der Regel wird man jedoch zu solchen noch zusammengesetzte Zahlen finden können. So giebt jede Zahl ((5)) ((8)), also z. B. 41×73 eine 40stellige Decimal-Periode, während man keine derartige Primzahl kennt. Uebrigens muss die Unvollständigkeit der Tabelle in der Kürze der Zeit, welche mir gelassen war, namentlich in der ungeheueren Ausdehnung der Arbeit ihre Entschuldigung finden.

$1 = 3. \mid 9.$
$2 = 11.$
$3 = 37. \mid 27.$
$4 = 101.$
$5 = 41, 271.$
$6 = 7, 13. \mid 297, 407.$
$7 = 239, 4649.$
$8 = 73, 137.$
$9 = 333667. \mid 81.$
$10 = 9091. \mid 451, 2981.$
$12 = 9901. \mid 2727, 3737; 707, 1313.$
$13 = 53{,}79 \ldots$
$14 = 909091. \mid 2629, 51139.$
$15 = 31, 2906161. \mid 1107, 7317, 1517, 10027.$
$16 = 17, 5882353.$
$18 = 19, 52579. \mid 3670337, 891; 2335669, 4337671, 567, 1053.$
$20 = 3541, 27961. \mid 4141, 27371; 918191.$
$21 = 43, 1933, 10838689. \mid 6453, 125523, 8843, 172013.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

22 = 23, 4093, 8779. | 121 . . .
24 = 99990001. | 1971, 2701, 3699, 5069; 511, 959, 949, 1781; 722773, 1356437.
26 = 859 . . . | 583, 869 . . .
27 = 757 . . . | 243 . . .
28 = 29, 281 . . . | 24139, 469549; 91818191.
29 = 3191 . . .
30 = 211, 241, 2161. | 281821, 26419909651; 217, 20343127, 403, 37780093; 63637, 118183; 341, 31967771; 287, 1897, 533, 3523; 245457, 336367; 12177, 80487, 16687, 110297.
31 = 2791 . . .
32 = 353, 449, 641, 1409, 69857.
33 = 67 . . .
34 = 103, 4013 . . .
35 = 71 . . .
41 = 83, 1231 . . .
42 = 127, 2689, 459691.
43 = 173 . . .
44 = 89 . . .
46 = 47, 139, 2531 . . .
50 = 251 . . .
51 = 613 . . .
52 = 521 . . .
53 = 107 . . .
55 = 1321 . . .
58 = 59, 5801 . . .
60 = 61 . . .
61 = 733.
69 = 277 . .
72 = 3169 . . .
75 = 151, 4201 . . .
78 = 157 . . .
79 = 317, 2687 . . .
81 = 163 . . .
87 = 4003 . . .
88 = 617 . . .
91 = 547.
92 = 1289 . . .
95 = 191 . . .
96 = 97 . . .
98 = 197 . .
99 = 199, 397 . . .

IV.

Nachstehend folgt eine Tafel der Primzahlen von 1—4000, nebst der Angabe der zu jeder dieser Zahlen gehörigen Stellen-Anzahl ihrer Decimal-Periode. Zum Gebrauche derselben bemerke man:

1. Der Zähler eines Primbruches verändert die Stellen-Anzahl der Periode durchaus nicht.

2. Alle zusammengesetzten Zahlen sind ausgelassen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

a) Die Factoren 2 und 5 zusammt ihren Potenzen geben vor der Periode so viel faule Stellen, als die höchste Potenz dieser beiden Zahlen Einheiten hat; die Stellen-Anzahl lassen sie unverändert.

b) Die Factoren 3 und 9 vermehren ebenfalls die Stellen-Anzahl nicht; denn da $10^n - 1$, theilbar durch 9, so ist die Periode jeder Zahl, welche jene Theiler nicht hat, ebenfalls durch 9 theilbar.

Die übrigen zusammengesetzten Zahlen werden aus ihren Factoren beurtheilt. Es gelten in Betreff derselben folgende früher erwiesenen Sätze:

c) Es habe eine Zahl die Factoren N, M, . . . R, die dazu gehörigen Stellen-Anzahlen seien n, m, . . . r; so ist der kleinste Dividuus von m, n, ... r, die gesuchte Stellen-Anzahl. Es sei z. B. $N = 13$, $M = 17$, $R = 19$, so ist $n = 6$, $m = 16$, $r = 18$, und die Zahl $13 . 17 . 19 = 4199$ hat die Stellen-Anzahl 144.

d) Wenn ferner n die Stellen-Anzahl von N ist, so ist $nN^{\nu-1}$ die Stellen-Anzahl von N^ν.

e) Die Stellen-Anzahl von $3^{\nu+2}$ ist 3^ν; z. B. die Periode des Bruches $\frac{1}{81}$ ist 9stellig. Sollten sich noch andere Zahlen finden, deren höhere Potenzen Theiler von $10^n - 1$, sind, (wo $n > 1$, und ein Theiler von $N - 1$ ist,) so müssten diese ebenfalls besonders berücksichtigt werden. Es sei $10^n - 1$ theilbar durch N^μ, so wäre $10^{nN^\nu} - 1$ theilbar durch $N^{\mu+\nu}$, d. h. die Stellen-Anzahl von $N^{\mu+\nu}$ ist nN^ν. Es ist dem Verfasser trotz aller Mühe nicht gelungen, einen derartigen Fall aufzufinden.

f) Es sei $P = N^\nu M^\mu \ldots R^\varrho$, ferner n, m, . . . r die Stellen-Anzahlen von N, M, . . . R, so giebt der kleinste Dividuus von $nN^{\nu-1}$, $mM^{\mu-1} \ldots . rR^{\varrho-1}$ die Stellen-Anzahl von P an. Ist eine der Primzahlen z. B. $N = 3$, und ist in m, . . . r keine Potenz von 3 enthalten, welche einen höheren Exponenten hat, als ν, so gebe man der Stellen-Anzahl den Factor $3^{\nu-2}$. Die Stellen-Anzahl von $41^2 . 31^3$ ist $15 . 41 . 31^2$, von $3^4 . 37 . 11^2$ ist sie $3^2 . 2 . 11$.

3. Ausser den zusammengesetzten Zahlen sind in nachstehender Tafel aber auch viele Primzahlen ausgelassen. Diese untersuche man auf der Modul 40. Ist nämlich eine der ausgelassenen Zahlen von der Form

$$40n + 1, 9, 31, 39; 3, 13, 27, 37, \qquad (1)$$

so ziehe man von dieser Zahl 1 ab, dividire den Rest durch 2 so wird $\frac{N-1}{2}$ die gesuchte Stellen-Anzahl zur Primzahl N sein. — Ist aber eine Primzahl von der Form

$$40n + 7, 11, 17, 19; 21, 23, 29, 33, \qquad (2)$$

so ist $N - 1$ die gesuchte Stellen-Anzahl zur Primzahl N.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist nämlich $+2$ quadratischer Rest von den Primzahlen $8p+1$, $8p+7$, ferner $+5$ quadratischer Rest von den Primzahlen $5q+1$, $5q+4$. Daraus folgt, dass $2.5=10$ quadratischer Rest von den Primzahlen $40n+1$, 9, 31, 39 ist.

Es ist ferner $+2$ quadratischer Nicht-Rest der Primzahlen $8p+3$, $8p+5$, und $+5$ quadratischer Nicht-Rest der Primzahlen $5q+2$, $5q+3$; daraus folgt, dass $2.5=10$ quadratischer Rest der Primzahlen $40n+3$, 13, 27, 37 ist. Combinirt man die Primzahlen $8p+1$, $8p+7$ mit denen $5q+2$, $5q+3$, so ergiebt sich, dass 10 quadratischer Nicht-Rest der Zahlen $40n+7$, 17, 23, 33 ist. Durch die Combination der Primzahlen $8p+3$, $8p+5$ mit denen $5q+1$, $5q+4$ erweist sich endlich, dass 10 quadratischer Nicht-Rest von $40n+11$, 19, 21, 29 ist.

Für die Zahlen (1) ist also $10^{\frac{N-1}{2}} \equiv 1$ mod. N, für die Zahlen (2) ist $10^{N-1} \equiv 1$ mod. N. Andere Reste aber, als die angegebenen, kann eine Primzahl nach dem Modul 40 nicht lassen. Vermittelst des Gesagten kann man also sogleich die Stellen-Anzahl der Periode vieler Primzahlen angeben. Ist eine Primzahl von der Form $2Q+1$, und Q selbst eine Primzahl, so ergiebt sich ihre Stellen-Anzahl unmittelbar aus den Formeln (1) und (2). Die Zahl 719 ist $=2.359+1=40.17+39$, also die Stellen-Anzahl ihrer Periode $=359$; die Zahl 1823 ist $=2.911+1=40.45+23$, somit hat ihre Periode 1822 Stellen. — Wenn die Primzahlen 2^n+1 nach dem Modul 40 die Reste (2) lassen, so ist ihre Stellen-Anzahl ohne Rechnung 2^n.

Hat die Differenz N—1 noch anderweitige Factoren, so bedarf es der besondern Rechnung, ob die Primzahl N sich dem Modul 40 füge oder nicht. So ist allerdings in der Tafel die Zahl 577 ausgelassen, aber die Berechtigung hierzu ergiebt sich erst a posteriori. Da $577=2^6 3^2+1=40.14+17$, so ist zwar so viel gewiss, dass der Factor $2^6=64$ in der Anzahl ihrer Stellen nicht fehlen kann, ob aber diese Anzahl 64,192 oder 576 sei, lässt sich ohne Rechnung nicht entscheiden. Da 577 in der Tafel ausgelassen ist und 17 zu den Resten (2) gehört, so ist die Stellen-Anzahl von $577=576$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel der Stellen-Anzahl der Decimal-Perioden der Primzahlen von 1—4000.

N = Primzahl, s = Stellen-Anzahl der Periode.

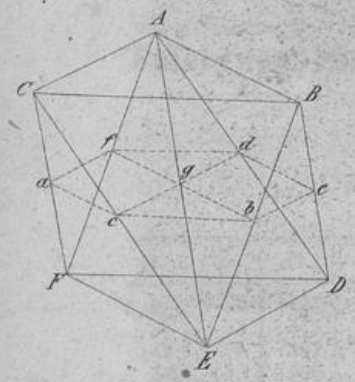
N	s	N	s	N	s	N	s	N	s	N	s	N	s
11	2	421	140	859	26	1597	133	2087	289	2683	447	3329	832
37	3	449	32	907	302	1601	200	2129	532	2687	79	3373	843
41	5	457	152	967	322	1609	201	2131	710	2689	42	3449	431
53	13	463	154	997	166	1613	403	2161	30	2729	682	3457	384
73	8	521	52	1009	252	1627	271	2213	553	2749	916	3499	318
79	13	547	182	1013	253	1637	409	2281	228	2791	31	3541	20
101	4	607	202	1031	103	1657	552	2287	762	2837	709	3557	254
103	34	613	51	1061	212	1669	556	2311	231	2857	408	3583	1194
127	42	617	88	1093	273	1693	423	2333	583	2953	984	3613	602
137	8	641	32	1201	200	1699	566	2377	264	2969	371	3671	367
139	46	643	107	1213	202	1721	430	2381	476	3037	253	3677	919
173	43	661	220	1231	41	1723	287	2393	184	3041	380	3691	1230
211	30	673	224	1237	206	1747	291	2441	305	3049	508	3697	1232
239	7	691	230	1249	208	1753	584	2467	137	3061	204	3733	933
241	30	733	183	1289	92	1831	305	2477	619	3109	148	3797	949
251	50	739	246	1321	55	1879	313	2503	278	3121	156	3823	1274
271	5	751	125	1409	32	1889	118	2521	630	3169	72	3851	770
277	69	757	27	1423	79	1901	380	2531	46	3181	636	3853	963
281	28	769	192	1451	290	1933	21	2551	425	3187	177	3877	969
317	79	773	193	1459	162	1951	390	2557	639	3191	29	3917	979
331	110	797	199	1483	247	1987	331	2591	259	3217	1072	3919	653
349	116	809	202	1489	248	1993	664	2647	882	3229	1076	3929	491
353	32	829	276	1493	373	2011	670	2659	886	3253	542	3931	1310
397	99	853	213	1499	214	2053	342	2677	223	3319	553		

Th. Bertram.

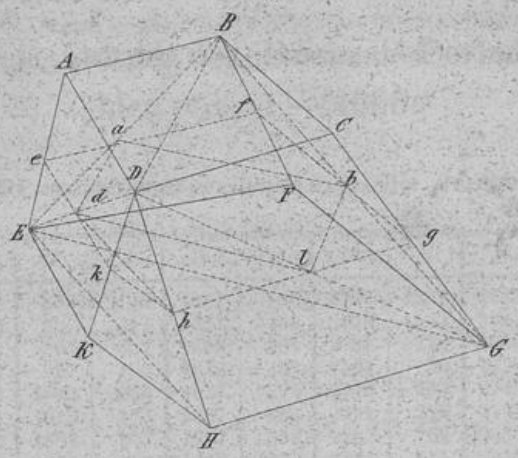
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

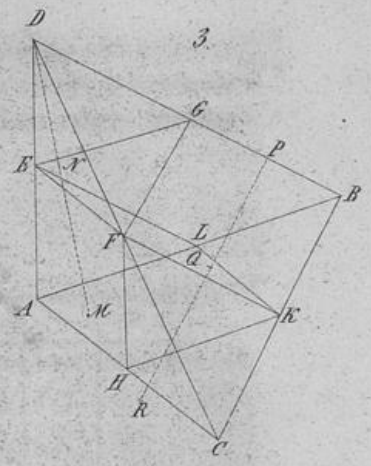
1.



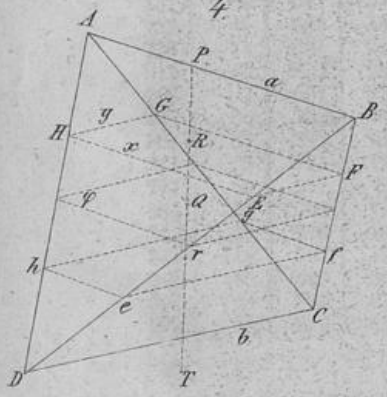
2.



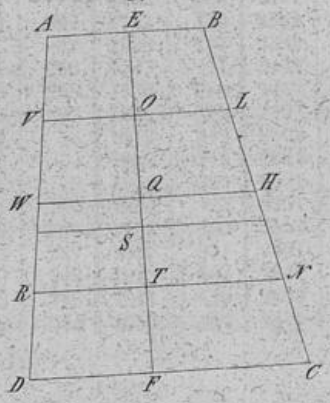
3.



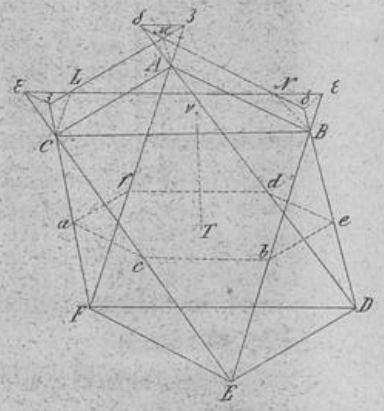
4.



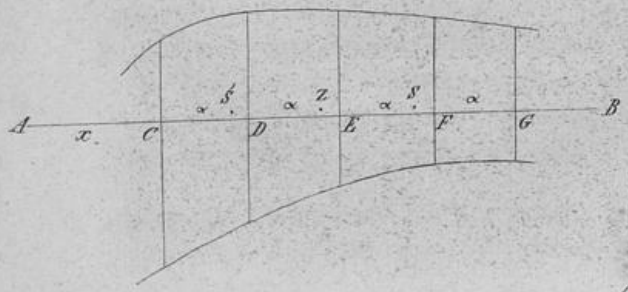
5.



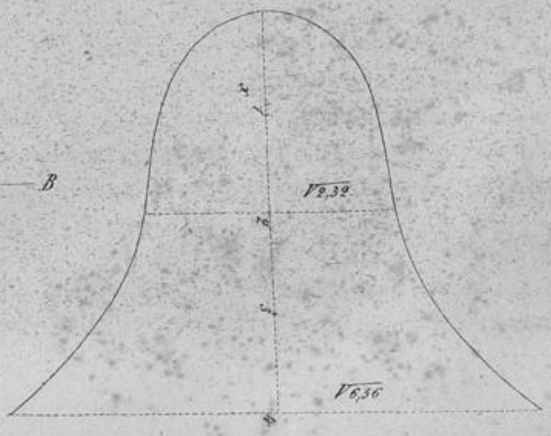
6.



7.



8.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ueber

die Ausmessung der Körperstumpfe oder Trapezoidalkörper.

§. 1.

Eine Raumfigur, die aus einem beliebigen Körper durch zwei Parallelebenen so herausgeschnitten ist, dass sich kein Eckpunkt des Körpers zwischen diesen Parallelebenen befindet, kann im Allgemeinen Körperstumpf genannt werden. Die Parallelebenen bilden die Grenzfiguren desselben, und die Seitenflächen ebener Körperstumpfe sind Dreiecke oder Trapeze oder Parallelogramme. Eine den Grenzfiguren parallele und von beiden gleich weit abstehende Ebene bildet mit den Seitenflächen einen Durchschnitt, den wir Mittelfigur nennen. Die Ebene der Mittelfigur halbirt alle Kanten.

Die Körperstumpfe selbst sind nach Beschaffenheit der Körper, deren Bestandtheile sie darstellen, Prismenstumpfe, Pyramidenstumpfe, Kegelstumpfe, Kugelstumpfe, Paraboloidstumpfe u. s. w.; Benennungen, die zum Theil schon üblich, übrigens leicht verständlich sind. Wenn die Seitenkanten ebenflächiger Stumpfe nicht sämmtlich parallel sind, oder sich nicht alle in demselben Punkte schneiden, so führen sie den Namen Obelisken.

Auch vollständige Kegel, Pyramiden, Kugeln und Halbkugeln können bei Verallgemeinerung des Begriffs als Körperstumpfe angesehen werden, in denen eine oder beide Grenzflächen verschwindend klein, die Seitenflächen aber krummflächig sind.

Für sich betrachtet bildet jeder Stumpf einen abgesonderten Körper, begränzt von zwei Parallelebenen ohne alle Eckpunkte zwischen denselben.

Da diese Körper den Trapezen in der Geometrie entsprechen, und auch vorzugsweise Trapeze zu Seitenflächen haben; so kann man sie auch Trapezoidalkörper nennen. Ihre Grundflächen sind dann die parallelen Grenzfiguren, ihre Höhe der Perpendikelabstand derselben.

Für die elementare Betrachtung muss die Kenntniss der Sätze über Prismen und Pyramiden vorausgesetzt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 2.

Wie jeder ebenflächige Körper überhaupt, so lässt sich auch jeder ebenflächige Trapezoidalkörper in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegen. Von diesen haben einige einen Eckpunkt in der einen Grenzfigur und die übrigen drei in der gegenüberliegenden; andere haben zwei ihrer Eckpunkte in jeder Grenzfigur. Wir können die ersteren als stehende, die letzteren als schwebende Pyramiden bezeichnen. Die Grenzfiguren bestehen aus den Grundflächen aller auf ihnen stehenden Pyramiden, die Mittelfiguren sind aus den Mittelfiguren sowohl der stehenden als auch der schwebenden Pyramiden zusammengesetzt.

Wenn (Fig. 1) ein Octaëder als Trapezoidalkörper betrachtet wird, das die parallelen Grenzflächen ABC, DEF hat; so lässt es sich in die beiden stehenden Pyramiden A — FED und E — ABC und in die beiden schwebenden ACFE und ABDE zerlegen. Die Mittelfigur, das Sechseck acbedf, enthält die Mittelfiguren sämmtlicher vier Pyramiden; dies sind der oben befolgten Reihe nach die Dreiecke fgd, cgb und die Parallelogramme afgc, dgbe.

Eben so enthält der Fig. 2 dargestellte Trapezoidalkörper in seiner oberen Grenzfläche die Grundflächen ADB, DBC der stehenden Pyramiden, die ihre Spitzen in E und G haben, und in seiner unteren Grenzfläche die Grundflächen EKH, EHG und EFG der stehenden Pyramiden, die ihre Spitzen in D, D und B haben. In der Mitte befindet sich noch die schwebende Pyramide DBEG. Von diesen sechs Pyramiden finden wir, der oben befolgten Reihe nach, die Mittelfiguren ead, blg, dkh, dhl, afb und adlb als Bestandtheile der Mittelfigur efghk.

Zur Erforschung der Raumgrösse solcher Körperstumpfe werden wir daher auf die dreiseitige stehende und die schwebende Pyramide geleitet, die als Elementarkörper zu betrachten sind. Da die schwebende Pyramide keinen Einfluss auf die Grösse der Grenzfiguren hat; so ist klar, dass für diese Betrachtungen die Mittelfigur von Bedeutung wird.

§. 3.

Die euklideische Theilung der Pyramide in zwei congruente Pyramiden (Fig. 3) DEFG, FHCK und in zwei raumgleiche Prismen, das liegende EFAKLH und das stehende EGFLBK, von denen jedes dreimal so gross als jede Pyramide ist, dient uns leicht zur Bestimmung der hier in Betracht kommenden Grössen.

Es kann diese Pyramide zunächst als eine stehende betrachtet werden, wenn ABC die Grundfläche ist; dann ist EFG die Mittelfigur und ein Perpendikel DM, das durch die Mittelfigur in N halbirt wird, ist die Höhe derselben. Es lässt sich sehr leicht erweisen, dass die Pyramide DEFG, die wir durch p bezeichnen wollen, dreimal in jedem Prisma, also überhaupt achtmal in der ganzen Pyramide enthalten ist; eben so einfach ergiebt sich, dass die Grundfläche ABC viermal so gross wie die Mittelfigur EFG ist. Vereinigt man nun das stehende Prisma EGFLBK mit der Pyramide FHCK, so bilden diese zusammen vier Pyramiden p, welche raumgleich sind mit einer Pyramide auf der ganzen Grundfläche mit der halben Höhe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vereinigt man das liegende Prisma EFHALK mit der Pyramide DEFG, so bilden diese auch zusammen so viel wie vier Pyramiden p auf der Grundfläche EFG mit der halben Höhe, oder so viel wie zwei Pyramiden auf der Mittelfigur EFG mit der ganzen Höhe.

Jede stehende Pyramide hat also gleichen Raum mit zwei Pyramiden auf der Mittelfigur mit der ganzen Höhe und einer Pyramide auf der Grundfläche mit der halben Höhe. Heisst daher m die Mittelfigur, h die Höhe, g die Grundfläche und r der Rauminhalt; so ist

$$r = \tfrac{1}{3} hg = \tfrac{1}{3} h \left(2m + \tfrac{g}{2}\right).$$

Betrachten wir dieselbe Pyramide als eine schwebende, d. h. denken wir uns die Kante DB in einer Ebene und AC in einer anderen ihr parallelen, deren Abstand $PR = h_1$ die Höhe der schwebenden Pyramide ist; so zeigt sich als Mittelfigur das Parallelogramm EFKL. Diese halbirt offenbar den Körper; denn es befindet sich zu jeder Seite ein Prisma und eine Pyramide. Das Prisma GBKLEF ist offenbar halb so gross wie ein Parallelepipedum auf der Mittelfigur ELKF und der Höhe $PQ = \tfrac{1}{2} h_1$. Ein solches Prisma würde drei halben Pyramiden derselben Grundfläche und Höhe gleich sein, es beträgt also drei Hälften einer Pyramide auf der Mittelfigur mit der halben Höhe h_1, und da die Pyramide p der dritte Theil des Prisma GBELFK ist; so beträgt sie eine Hälfte einer solchen Pyramide auf der Mittelfigur mit der halben Höhe h_1. Prisma und Pyramide vereinigt bilden also vier halbe oder zwei ganze Pyramiden auf der Mittelfigur mit der halben Höhe. Dasselbe gilt von dem Prisma und der Pyramide auf der andern Seite der Mittelfigur. Die ganze schwebende Pyramide ist also zwei Pyramiden auf der Mittelfigur mit der ganzen Höhe gleich. Ist also die ganze Höhe h_1, die Mittelfigur m_1, so ist

$$r = 8p = 2 \cdot 4p = 2\left[\tfrac{1}{4} h_1 m_1 + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{4} h_1 m_1\right)\right] = 2 \cdot \tfrac{1}{3} h_1 m_1.$$

§. 4.

Denkt man sich einen beliebigen ebenflächigen Trapezoidalkörper vollständig in dreiseitige Pyramiden zerlegt; so seien die auf der Grenzfläche G stehenden

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ etc. mit den Grundflächen
g, g_1, g_2, g_3, g_4 etc. und mit den Mittelfiguren
m, m_1, m_2, m_3, m_4 etc.

Ferner seien die auf der Grenzfläche K stehenden

$\beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ etc. mit den Grundflächen
k, k_1, k_2, k_3, k_4 etc. und mit den Mittelfiguren
n, n_1, n_2, n_3, n_4 etc.

Endlich seien die schwebenden Pyramiden

$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ etc. mit den Mittelfiguren
p, p_1, p_2, p_3, p_4 etc.

Die Höhe des Trapezoidalkörpers, also auch sämmtlicher Pyramiden sei h, der Rauminhalt R; dann ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\alpha = \tfrac{1}{3}h\,(2m + \tfrac{g}{2}) \qquad \beta = \tfrac{1}{3}h\,(2n + \tfrac{k}{2}) \qquad \gamma = \tfrac{1}{3}h\,2p$$

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{3}h\,(2m_1 + \tfrac{g_1}{2}) \qquad \beta_1 = \tfrac{1}{3}h\,(2n_1 + \tfrac{k_1}{2}) \qquad \gamma_1 = \tfrac{1}{3}h\,2p_1$$

$$\alpha_2 = \tfrac{1}{3}h\,(2m_2 + \tfrac{g_2}{2}) \qquad \beta_2 = \tfrac{1}{3}h\,(2n_2 + \tfrac{k_2}{2}) \qquad \gamma_2 = \tfrac{1}{3}h\,2p_2$$

etc. etc. etc.

Die Vereinigung dieser verschiedenen Grössen giebt

$$R = \tfrac{1}{3}h\,[2m + 2m_1 + 2m_2 + .. + 2n + 2n_1 + 2n_2 + .. + 2p + 2p_1 + 2p_2 + ..$$
$$+ \frac{g}{2} + \frac{g_1}{2} + \frac{g_2}{2} + .. + \frac{k}{2} + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} + ..]$$

Nennt man die Mittelfigur des Ganzen M, die obere Grenzfigur K, die untere G; so ist

$$M = m + m_1 + m_2 + .. + n + n_1 + n_2 + .. + p + p_1 + p_2 + ..$$
$$G = g + g_1 + g_2 + ..$$
$$K = k + k_1 + k_2 + ..$$

Daraus ergiebt sich

$$R = \tfrac{1}{3}h\,[2M + \frac{G + K}{2}]$$

Es ist also jeder ebenflächige Trapezoidalkörper so gross wie zwei Pyramiden auf der Mittelfigur mit der ganzen Höhe und zwei Pyramiden auf den Grenzfiguren mit der halben Höhe.

Auch die stehende und schwebende Pyramide ist offenbar diesem Gesetze unterworfen (§. 3.). In der ersteren ist $k = o$, in der letzteren sowohl $k = o$ als auch $g = o$.

§. 5.

Die Betrachtung der schwebenden Pyramiden führt uns auch zu einer einfachen Bestimmung derjenigen Durchschnittsflächen solcher Trapezoidalkörper, die durch Parallelebenen mit den Grenzfiguren entstehen. Es sei in der schwebenden Pyramide ABDC (Fig. 4) $AB = a$, $DC = b$ und ein beliebiger Durchschnitt parallel mit der Mittelfigur das Parallelogramm, dessen Seiten $HE = x$ und $HG = y$; der Parallelschnitt theile die Höhe der schwebenden Pyramide TP, also auch jede Seitenkante AD im Verhältniss $n : m$; der Winkel der ebenen Seitenflächen an der Kante AD sei φ; dann ist

$$HE : AB = TR : TP = m : m + n, \text{ also } x = \frac{ma}{m + n}$$

$$HG : DC = PR : TP = n : m + n, \text{ also } y = \frac{nb}{m + n}$$

Nun ist der Flächeninhalt des Parallelogramms HF

$$GH\,.\,HE\,.\,\text{Sin}\,GHE = yx\,\text{Sin}\,\varphi = \frac{mnab}{(m + n)^2}\,\sin\varphi$$

Für den Mittelschnitt μ ist $n = m$, also

$$\mu = \frac{ab}{4}\,\text{Sin}\,\varphi.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Schnitt ist also am grössesten und die mit ihm parallelen werden immer kleiner, je mehr sie sich von ihm entfernen, sind aber zu beiden Seiten in gleichen Abständen vom Mittelschnitt einander gleich. Ist nämlich $Tr : rP = n : m$, so ist auch

$$hefg = \frac{mnab}{(m+n)^2} \operatorname{Sin} \varphi.$$

Um nun nach dem Abstande x vom Mittelschnitte μ die Durchschnittsfigur zu bestimmen, setze man $QP = \frac{h}{2}$, $QR = x$, $PT = h$, dann ist der Durchschnitt

$$f = \frac{(\frac{h}{2}+x)(\frac{h}{2}-x)}{h^2} ab \operatorname{Sin} \varphi = 4 \frac{(\frac{h}{2}+x)(\frac{h}{2}-x)}{h^2} \mu$$

Ist nun in irgend einem Trapezoidalkörper, dessen Mittelfigur M und dessen Grenzfiguren G, K sind, im Abstande x von der Mittelfigur ein Durchschnitt; so besteht dieser aus einem Theile γ, der die Durchschnitte der auf G stehenden Pyramiden einschliesst, aus einem Theile k, der die Durchschnitte der auf K stehenden Pyramiden enthält, und aus einem Theile μ, der die Durchschnitte der schwebenden Pyramiden zusammenfasst.

Liegt die Durchschnittsfläche näher an G, so ist

$$\gamma : G = (\frac{h}{2}+x)^2 : h^2, \text{ also } \gamma = \frac{(\frac{h}{2}+x)^2}{h^2} G$$

$$k : K = (\frac{h}{2}-x)^2 : h^2, \text{ also } k = \frac{(\frac{h}{2}-x)^2}{h^2} K$$

$$\mu = 4 \frac{(\frac{h}{2}+x)(\frac{h}{2}-x)}{h^2} M_1$$

wenn M_1 den Antheil der Mittelfigur bezeichnet, der in ihr zu sämmtlichen schwebenden Pyramiden gehört; oder nach der Bezeichnung des vorigen Paragraphen, wenn $M_1 = p + p_1 + p_2$ etc.

Daher ist der ganze Durchschnitt f

$$f = \frac{4(\frac{h}{2}+x)(\frac{h}{2}-x)}{h^2} M_1 + \frac{(\frac{h}{2}+x)^2}{h^2} G + \frac{(\frac{h}{2}-x)^2}{h^2} K$$

Läge der Durchschnitt näher an K und der Abstand wäre auch x, so erhielte man

$$f_1 = \frac{4(\frac{h}{2}+x)(\frac{h}{2}-x)}{h^2} M_1 + \frac{(\frac{h}{2}+x)^2}{h^2} K + \frac{(\frac{h}{2}-x)^2}{h^2} G$$

Dasselbe erhielte man auch, wenn man in den ersten Ausdruck für f sofort $-x$ statt $+x$ setzte. Jener Ausdruck ist daher ganz allgemein.

Setzt man hierin $x = o$, so ist der gesammte Mittelschnitt $M = M_1 + \frac{G+K}{4}$, also $M_1 = M - \frac{G+K}{4}$, was auch eine unmittelbare Betrachtung lehrt.

Bringen wir diesen Werth von M_1 in den obigen Ausdruck, so finden wir

$$f = M + \frac{G-K}{h} x - \frac{4M-2G-2K}{h^2} x^2$$

wenn x vom Mittelschnitte aus nach der Grenzfläche G hin als positiv angesehen wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es geht hieraus hervor, dass zwei Trapezoidalkörper von gleicher Höhe, deren Grenzfiguren und Mittelfiguren flächengleich sind, überall in gleichen Abständen von den Grenzfiguren gleiche Durchschnitte haben.

§. 6.

Auch für die Auffindung desjenigen Parallelschnittes in einem Trapezoidalkörper, in welchem der Schwerpunkt desselben liegt, ist die Erwägung der schwebenden Pyramiden von Nutzen. Ihr gemeinsamer Schwerpunkt muss sich im Mittelschnitte befinden, weil die Parallelschnitte, die von ihm zu beiden Seiten gleich weit abstehen, flächengleich sind. Für die stehenden Pyramiden liegen die Schwerpunkte um den vierten Theil der Höhe von den zugehörigen Grundflächen entfernt. Daher ist die Bestimmung für den Schwerpunkt des Ganzen sehr einfach.

Es stelle Fig. 5 ABCD den Durchschnitt eines solchen Trapezoidalkörpers vor, EF sei ein Perpendikel auf den Grundflächen $AB = K$ und $DC = G$, also auch auf der Mittelfigur $WH = M$ und den durch die Viertelspunkte der Linie O und T gelegten Parallelebenen. Es ist demnach $EO = \frac{h}{4} = OQ = QT = TF$.

Ueberträgt man die statischen Momente an diese Linie, und denkt man sich den Schwerpunkt des ganzen Körpers in einer durch S gelegten Parallelebene, so sei in F das Hypomochlion, und FS die Entfernung x. Bedeutet nun P die Pyramide auf G, die ihren Schwerpunkt in T hat, p die Pyramide auf K, die ihren Schwerpunkt in O hat, und R den ganzen Körper, so ist

$$FS \,.\, R = FQ \,.\, Z + FT \,.\, P + FO \,.\, p$$

$$xR = \frac{h}{2} Z + \frac{h}{4} P + \frac{3h}{4} p$$

Es ist aber $Z = R - P - p$, also

$$xR = \frac{h}{2} R - \frac{h}{4} P + \frac{h}{4} p, \quad x = \frac{h}{2} - \frac{h}{4} \frac{P - p}{R} = \frac{h}{2} - \frac{h}{4} \frac{G - K}{2M + \frac{G}{2} + \frac{K}{2}}$$

und hieraus folgt $x = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{G - K}{4M + G + K}\right) = h \frac{2M + K}{4M + G + K}$

Für solche Trapezoidalkörper, die gerade Linien zu Schwerpunktsaxen haben (z. B. abgestumpfte Pyramiden), ist dann der Schwerpunkt im Durchschnitt dieser Axe und der so gefundenen Ebene.

§. 7.

Der in §. 5 gefundene Ausdruck beschränkt sich natürlich nicht auf den Durchschnitt des Trapezoidalkörpers innerhalb der Grenzflächen, die ihn uns als Körperstumpf darstellen. Denkt man sich die Seitenflächen über diese Gränzen hinaus erweitert, dass also x grösser als $\frac{h}{2}$ wird; so stellt die Formel überall die Grösse der Durchschnittsfläche dar, die dann in gewissen Fällen Null wird und darüber hinaus einen negativen Werth erhält.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es werden also überhaupt drei gleich weit von einander abstehende Parallelschnitte ausreichen, um in einer Trapezoidalröhre (so wollen wir den von den Seitenflächen nach beiden Richtungen hin unbegränzten innern Raum nennen) den Durchschnitt überall zu bestimmen.

Ist M der mittlere Schnitt, sind G und K die beiden anderen, und ist α der Abstand jedes der Schnitte G und K vom Mittelschnitt; so wird in der obigen Formel 2α für h zu setzen sein und wir erhalten für x nach G hin den Ausdruck der Durchschnittsfläche

$$f = M + \frac{G-K}{2}\frac{x}{\alpha} - \frac{2M-G-K}{2}\frac{x^2}{\alpha^2}$$

oder, wenn α als Einheit der Längenbestimmung dient,

$$f = M + \frac{G-K}{2}x - \frac{2M-G-K}{2}x^2$$

Diese Gleichung dient zur Erforschung der Verhältnisse aller Trapezoidalkörper.

Man ersieht leicht, dass, wenn $G = K$, die Gleichung übergeht in

$$f = M - (M - G)\,x^2$$

In diesem Falle sind also die Durchschnittsflächen zu beiden Seiten in gleichen Abständen ($+x$ oder $-x$) gleich. Ist nun auch $M = G$, so bleibt die Durchschnittsfläche constant $f = M$, wie bei Prismen.

Setzt man in der allgemeinen Gleichung $f = 0$, so findet man für x die Stelle, wo die Durchschnittsfläche Null wird. Ist der Trapezoidalkörper eine abgestumpfte Pyramide, so wird die Gleichung nur einen Werth haben, x ist dann der Abstand der Pyramidenspitze von der angenommenen Mittelfläche.

Bei anderen Trapezoidalkörpern kann die Durchschnittsfläche als ein Aggregat positiver und negativer Bestandtheile zu Null werden. Dies ist z. B. der Fall, wenn das Octaeder als Trapezoidalkörper behandelt wird.

Denkt man sich in einem solchen (Fig. 6.) das Sechseck acbedf als Mittelfigur, und die Dreiecke ABC, DFE als Grenzfiguren, die in einem regulairen Octaeder gleich sind, und die halbe Höhe d. h. das Perpendikel Tv von der Mittelfigur bis zur Grenzfigur als Maasseinheit; so gilt hier die Gleichung

$$f = M - (M - G)\,x^2 \quad \text{und für } f = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{M}{M-G}}$$

Bei dem regulairen Octaeder ist $M = \frac{3}{2}G$, also

$$x = \pm\sqrt{3}$$

In einem Abstande $Tv\sqrt{3}$ findet man zu beiden Seiten die Stelle, wo die Durchschnittsfläche Null ist. Man erkennt aber an der Zeichnung, dass es sich hier um den Unterschied positiver und negativer Flächen handelt, indem das Dreieck MLN als positiv, und die 3 Dreiecke $L\zeta\varepsilon$, $M\delta\zeta$, $N\delta\varepsilon$ als negativ zu betrachten sind. Die Figur ist aber in dieser Erweiterung, der oben gegebenen Erklärung zufolge, nicht als Trapezoidalkörper zu betrachten, da die Punkte ABC neue Eckpunkte werden, und im Innern neue Kanten AM, BN, CL entstehen. Wir lassen daher bei der elementaren Betrachtung diese Körper füglich ausser Acht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 8.

Verfolgen wir die §. 3. auf elementarem Wege erkannte Eigenschaft aller Trapezoidalkörper; so ergeben sich daraus unmittelbar folgende Sätze:

Zwei Trapezoidalkörper sind gleich, wenn sie bei gleicher Höhe und gleicher Mittelfigur auch gleiche Summe der Grenzfiguren haben.

Ueberhaupt kann man die Vereinigung der vierfachen Mittelfigur mit beiden Grenzfiguren als Bestimmungsfläche des Trapezoidalkörpers betrachten. Dann ist das Verhältniss zweier beliebigen Trapezoidalkörper aus dem Verhältniss der Bestimmungsflächen und der Höhen zusammengesetzt.

Der Rauminhalt des einen ist

$$R = \tfrac{1}{6}h\,(4m + g + k) = \tfrac{1}{6}hf$$

der des andern

$$R_1 = \tfrac{1}{6}h_1\,(4m_1 + g_1 + k_1) = \tfrac{1}{6}h_1f_1$$

mithin

$$R : R_1 = hf : h_1f_1.$$

Es ist daher in dieser Beziehung die Eigenschaft der Prismen und Pyramiden auf alle Trapezoidalkörper ausgedehnt. Bei den genannten Körpern sind die Bestimmungsflächen den Grundflächen proportional, daher nur die letzteren in Betracht kommen.

In die Elemente der Stereometrie bringt dieser Satz zugleich einen Beweis des so oft angewendeten Cavallerischen Satzes.

Wenn man durch zwei Körper eine Ebene gelegt hat, die in beiden gleiche Durchschnitte bildet, und nachweisen kann, dass dies bei jeder Ebene stattfindet, die der gegebenen parallel ist; so sind die Körper raumgleich. Man hat den Satz als Grundsatz aufgefasst; man hat ihn für prismatische und pyramidale Körper ganz strenge, für cylindrische und konische mit der in der Geometrie zulässigen Voraussetzung bewiesen, dass krumme Linien als gebrochene Geraden mit unendlich kleinen Theilen angesehen werden können. Für Obelisken und andere krummflächige Körper ergiebt sich ein theils strenger, theils eben so bedingter elementarer Beweis aus dem hier betrachteten Satze.

Stellt man sich zunächst zwei ebenflächige Körper vor, die diese Eigenschaft bei einer gewissen Lage der Parallelebenen besitzen; so kann man in der vorgeschriebenen Lage durch alle Eckpunkte beider Körper diese Parallelebenen legen. Die einzelnen dadurch gebildeten Körperstumpfe zwischen je zwei auf einanderfolgenden Parallelebenen sind dann gleich, weil sie gleiche Höhen, gleiche Grenzfiguren und gleiche Mittelschnitte haben. Es sind daher auch die Aggregate dieser Körperstumpfe d. h. die ganzen Körper gleich.

Da es zulässig ist, krummflächig begränzte Körper als von unendlich kleinen und unendlich vielen Ebenen begränzt anzusehen; so ist man auch berechtigt, diesen Satz auf dieselben anzuwenden und der Cavallerische Satz, der oft als Grundsatz betrachtet worden ist, wird dadurch zum elementaren Lehrsatze mit derselben Beweiskraft, welche überhaupt Schlüssen der Art beizulegen ist, die den Kreis als re-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gulaires Polygon von unendlich vielen Seiten, die Kugel als ein Aggregat abgestumpfter Kegel u. dgl. voraussetzen.

§. 9.

Dass die §. 4. entwickelte Bestimmung des Rauminhalts auch auf Cylinder, Kegel und Kegelstumpfe Anwendung finden müsse, ist ersichtlich, da diese Körper als Prismen, Pyramiden und Pyramidenstumpfe mit unendlicher Seitenzahl betrachtet werden können. Die genauere Betrachtung überführt uns leicht von der Richtigkeit der Voraussetzung.

Ist z. B. r der obere, R der untere Radius eines Kegelstumpfes mit der Höhe h; so ist $K = r^2\pi$ die obere Grenzfigur, $G = R^2\pi$ die untere und, wie sich leicht ergiebt $M = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2\pi$ die mittlere. Es soll der Rauminhalt demnach sein

$$\tfrac{1}{3}h\left(2M + \frac{G+K}{2}\right) = \tfrac{1}{3}h\left(\frac{(R+r)^2}{2} + \frac{R^2}{2} + \frac{r^2}{2}\right)\pi$$

Dies führt sich leicht zurück auf den bekannten Ausdruck

$$\tfrac{1}{3}h\,(R^2 + Rr + r^2)\pi.$$

Der Versuch drängt sich auf, die Anwendbarkeit des Gesetzes auch bei andern krummflächig begränzten Körpern zu prüfen. Man findet sie zunächst bestätigt bei Kugelsegmenten, Kugelzonen u. s. w. Um hier nicht überflüssige Rechnungen zu häufen, soll beispielsweise nur die ganze Kugel berücksichtiget werden. Denkt man sich diese von zwei Ebenen als Grenzflächen berührt, und den Mittelschnitt durch den Mittelpunkt parallel mit jenen Ebenen gelegt; so ist die Kugel als Trapezoidalkörper dargestellt, in welchem $G = 0$, $K = 0$, $h = 2r$, $M = r^2\pi$ ist. Demnach ist

$$\tfrac{1}{3}h\left(2M + \frac{G+K}{2}\right) = \tfrac{4}{3}r^3\pi.$$

Dies ist in der That die kürzeste Weise, den Rauminhalt der Kugel zu berechnen, vorausgesetzt, dass man berechtigt ist, das Gesetz anzuwenden. Fehlte aber auch der Nachweis dieser Berechtigung, so würde man in den Elementen dennoch jenen Satz aufstellen können, indem man ihn durch die anderweitig bekannte Ausmessung der Kugel und Kugelstumpfe bestätigte.

§. 10.

Verlässt man die elementaren Körper und geht zu solchen über, die durch Umdrehung eines Kegelschnittes um seine Hauptachse entstehen; so zeigt sich bei vielfältiger Prüfung auch hier noch der Satz anwendbar. Jeder Stumpf eines solchen Körpers, der durch parallele Ebenen vollständig begrenzt wird, ist raumgleich vier konischen Körpern. Zwei derselben haben die Mittelfigur zu ihrer Grundfläche und die ganze Höhe des Stumpfes; jeder der anderen hat eine Grenzfigur zur Grundfläche und die halbe Höhe des Stumpfes.

Die Uebereinstimmung, welche sich hier zeigt, fordert auf, dem Gesetze nachzuforschen, dem alle Körper unterworfen sind, auf welche diese durchgreifende Regel Anwendung findet. Dazu dient folgende Betrachtung:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es sei Fig. 7 der Durchschnitt eines Körpers, durch welchen in gleichen Abständen, jeder gleich α, parallele Ebenen C, D, E, F, G gelegt sind, hier nur durch Linien angedeutet. Die Flächengrösse der entstandenen Durchschnittsfiguren sei eine Funktion der senkrecht hindurch gehenden Linie AB, A sei der Anfangspunkt der Abscissen, $AC = x$.

Ist das in Rede stehende Gesetz für jeden Stumpf gültig, der in diesem Körper gebildet wird; so gilt es bei jedem Werthe von α: man mag E als Mittelschnitt zu den Grenzfiguren C und G, oder D als Mittelschnitt zu C und E, ferner F als Mittelschnitt zu E und G betrachten. Dann ist aber offenbar ein Stumpf aus zweien zusammengesetzt, und man hat

$$\frac{4\alpha}{3}\left(2E + \frac{C+G}{2}\right) = \frac{2\alpha}{3}\left(2D + \frac{C+E}{2}\right) + \frac{2\alpha}{3}\left(2F + \frac{E+G}{2}\right)$$

Hieraus folgt

$$6E + C + G = 4D + 4F$$

Die Bedingungen für diese Gleichungen müssen durch die Flächen als Funktionen von x erfüllt werden bei jedem Werthe von α. Es ist aber $C = fx$, $D = f(x+\alpha)$, $E = f(x+2\alpha)$, $F = f(x+3\alpha)$, $G = f(x+4\alpha)$.

Entwickelt man nun die linke Seite der Bedingungsgleichung nach dem Tailorschen Satze; so erhält man

$$6E = 6fx + 12\alpha f_{I}x + 12\alpha^2 f_{II}x + 8\alpha^3 f_{III}x + 4\alpha^4 f_{IV}x + \ldots$$

$$C = fx$$

$$G = fx + 4\alpha f_{I}x + 8\alpha^2 f_{II}x + \tfrac{32}{3}\alpha^3 f_{III}x + \tfrac{32}{3}\alpha^4 f_{IV}x + \ldots$$

oder vereinigt

$$6E + C + G = 8fx + 16\alpha f_{I}x + 20\alpha^2 f_{II}x + \tfrac{56}{3}\alpha^3 f_{III}x + \tfrac{44}{3}\alpha^4 f_{IV}x + \ldots$$

Die Entwicklung der rechten Seite ergiebt

$$4D = 4fx + 4\alpha f_{I}x + 2\alpha^2 f_{II}x + \tfrac{2}{3}\alpha^3 f_{III}x + \tfrac{1}{6}\alpha^4 f_{IV}x + \ldots$$

$$4F = 4fx + 12\alpha f_{I}x + 18\alpha^2 f_{II}x + 18\alpha^3 f_{III}x + \tfrac{27}{2}\alpha^4 f_{IV}x + \ldots$$

oder vereinigt

$$4D + 4F = 8fx + 16\alpha f_{I}x + 20\alpha^2 f_{II}x + \tfrac{56}{3}\alpha^3 f_{III}x + \tfrac{41}{3}\alpha^4 f_{IV}x + \ldots$$

Es stimmen die ersten vier Glieder zu beiden Seiten genau überein. Die Anwendung des Gesetzes ist dadurch für alle Funktionen der Form

$$Fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

erwiesen, da in diesen die vierte abgeleitete Funktion verschwindet, und also alle ferneren Glieder der Tailorschen Reihe mit den Factoren $f_{IV}x$, $f_{V}x$, $f_{VI}x$ etc. gleich Null werden; da nun, wie wir oben §. 7. entwickelt haben, die Durchschnittsflächen der Obelisken für den Abstand x von einer bestimmten Fläche einer Funktion des zweiten Grades $fx = A + Bx + Cx^2$ entsprechen; da dies auch bei der Kugel und allen Umdrehungskörpern, die durch Kegelschnitte entstehen, der Fall ist; so findet auf diese das ausgesprochene Gesetz seine Anwendung. Wir können dasselbe sogar noch auf Körper ausdehnen, in denen die Durchschnittsflächen Funktionen des dritten Grades von den auf einer sie durchneidenden Axe angenommenen Abscissen sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus der grossen Anzahl der Rotationskörper, die hieher gehören, genüge es als Beispiel einen herauszuheben, den Glockenkörper, welcher durch Umdrehung einer Curve um ihre Hauptaxe entsteht, deren Gleichung

$$y^2 = a + bx + cx^3$$

ist, und bei welcher die rechte Seite nur eine reelle Wurzel hat.

Die Fig. 8 dargestellte Kurve entspricht der Gleichung

$$y = \pm\sqrt{x + 0{,}04x^3}.$$

Ist $x = 0$, so wird $y^2 = 0$;
ist $x = 2$, so wird $y^2 = 2{,}32$;
ist $x = 4$, so wird $y^2 = 6{,}56$.

Nach der allgemeinen Formel ist demnach der Rauminhalt dieses Glockenkörpers, so weit die Zeichnung seinen Durchschnitt darstellt,

$$R = \tfrac{4}{3}[2 \cdot 2{,}32 + \tfrac{1}{2}6{,}56]\,\pi = 10{,}56\,\pi.$$

Andere Anwendungen dieses ergiebigen Satzes übergehe ich hier.

§. 11.

Um die Allgemeinheit der oben §. 7. für die Lage des Schwerpunktes gefundenen Formel zu prüfen, genügen die Betrachtungen, die im vorigen §. angestellt sind. Wir fanden für den Abstand des Schwerpunktes in Trapezoidalkörpern von der Fläche G durch Betrachtung der Pyramiden den Ausdruck (§. 6.)

$$x = h\,\frac{2M + K}{G + 4M + K}$$

Verbinden wir damit den Ausdruck für den Rauminhalt (§. 4.)

$$R = \frac{h}{3}\left(2M + \frac{G + K}{2}\right) = \frac{h}{6}(G + 4M + K)$$

so ist

$$x = \frac{h^2(2M + K)}{6R}$$

Es sei nun in Fig. 7. jede Bezeichnung wie im vorigen §. zu verstehen, ausserdem sei S der Schwerpunkt für denjenigen Theil des Körpers, der zwischen den Ebenen G und E liegt, dessen Rauminhalt wir mit r bezeichnen wollen, S^1 der Schwerpunkt des Theils zwischen E und C, dessen Rauminhalt r_1 sei; Z endlich der Schwerpunkt des ganzen Körpers, dessen Rauminhalt R ist. Die Abstände dieser Schwerpunkte von der Fläche G müssten bei der Allgemeingültigkeit des Gesetzes der hier befolgten Reihe nach sein

$$\frac{4a^2(2F + E)}{6r}, \quad 2\alpha + \frac{4a^2(2D + C)}{6r_1}, \quad \frac{16a^2(2E + C)}{6R}.$$

Bestimmen wir die Momente von der Fläche G aus; so gilt für diese die Gleichung

$$\frac{4a^2(2F + E)}{6r}\,r + \left(2\alpha + \frac{4a^2(2D + C)}{6r_1}\right)r_1 = \frac{16a^2(2E + C)}{6R}\,R$$

Die Entwicklung führt auf die Bedingungsgleichung

$$3D + F = C + 3E.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist aber

$$3D = 3f(x+\alpha) = 3fx + 3\alpha f_{I}x + \tfrac{3}{2}\alpha^2 f_{II}x + \tfrac{1}{2}\alpha^3 f_{III}x + \ldots$$

$$F = f(x+3\alpha) = fx + 3\alpha f_{I}x + \tfrac{9}{2}\alpha^2 f_{II}x + \tfrac{9}{2}\alpha^3 f_{III}x + \ldots$$

daher ist

$$3D + F = 4fx + 6\alpha f_{I}x + 6\alpha^2 f_{II}x + 5\alpha^3 f_{III}x + \ldots$$

Ferner ist

$$C = fx = fx$$

$$3E = 3f(x+2\alpha) = 3fx + 6\alpha f_{I}x + 6\alpha^2 f_{II}x + 4\alpha^3 f_{III}x + \ldots$$

daher auch

$$C + 3E = 4fx + 6\alpha f_{I}x + 6\alpha^2 f_{II}x + 4\alpha^3 f_{III}x + \ldots$$

Beide Seiten der Bedingungsgleichung stimmen daher für jeden Werth von α in den ersten drei Gliedern überein; das vierte weicht aber ab. Die angewendete Formel gilt also nur für Funktionen, die den zweiten Grad nicht überschreiten. Sie ist daher noch anwendbar auf die Kugel und die Umdrehungskörper der Kegelschnitte, reicht aber nicht mehr aus für Körper, wie der in Fig. 8. dargestellte.

§. 12.

Die beiden Bedingungsgleichungen

$$C - 4D + 6E - 4F + G = 0$$

$$C - 3D + 3E - F = 0$$

enthalten die Binomial-Coefficienten der vierten und der dritten Potenz mit abwechselnden Zeichen, und lassen sich daran leicht merken. Nimmt man von den Grössen C, D, E, F, G vier beliebig an und bestimmt die fünfte nach dieser Gleichung; so wird in einer für alle fünf Werthe berechneten Funktion

$$fx = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

der Werth des Coefficienten von $e = 0$. Denn es ist in diesem Falle

$$e = \frac{-C + 4D - 6E + 4F - G}{1.2.3.4}$$

Es entspricht daher eine Gleichung des dritten Grades den Bedingungen, welche die vier angenommenen Werthe vorschreiben. Eben so genügt für drei Werthe der zweiten Gleichung eine Gleichung des zweiten Grades.

In allen Fällen, wo diese Bedingungsgleichungen nicht zutreffen, kann auch die daran geknüpfte Regel für die Auffindung des Rauminhalts oder der Schwerpunktsebene nicht genaue Resultate geben. Es lässt sich z. B. leicht zeigen, dass ein Körper, der durch Umdrehung eines Kreisabschnitts um seine Sehne entstanden ist, nicht auf die angegebene Weise berechnet werden kann. Für den ganzen Körper ist $C = 0$, $G = 0$, $D = F$; die Bedingungsgleichung wird also $E = \frac{4}{3}D$. Stellt man sich vor, dass die Sehne in vier gleiche Theile getheilt ist und nennt das Perpendikel auf der Mitte der Sehne y, das auf der Mitte jeder Hälfte y_1; so müsste $y_1^2 = \frac{3}{4}y^2$, also $y_1 = \frac{1}{2}y\sqrt{3}$ sein. Dies ist aber nur richtig, wenn der Abschnitt ein Halbkreis ist. In ähnlicher Weise ergiebt sich, dass der Rauminhalt aller Körper, die durch Umdrehung eines Kegelschnittsegments um seine Sehne hervorgebracht sind, nicht nach dieser Formel berechnet werden könne.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für einen Körper, in welchem C und G Null sind, ist die erste Bedingungsgleichung $4D + 4F = 6E$, die zweite $3D + F = 3E$, die Differenz beider ist $D + 3F = 3E$. Es muss also in solchen Körpern $F = D$ sein, wenn die Regel für den Schwerpunkt §. 6. Anwendung finden soll. Beide durch E getrennte Theile des Körpers sind also raumgleich (§. 5.) und haben gleichen Abstand ihrer Schwerpunkte von den Enden der Axe (§. 6.). Der Schwerpunkt des Ganzen liegt also in der Mitte der Axe. Hieraus folgt z. B., dass die Lage des Schwerpunkts für eiförmige Körper in Bezug auf die Längenachse nicht nach dieser Formel berechnet werden kann.

Für alle in der Geometrie gewöhnlich behandelten und in der Anwendung auch am häufigsten vorkommende Körper ist jedoch die Regel anwendbar und verdient daher ihrer leichten Begründung wegen eine Stelle in den Elementen der Geometrie.

Da der schon im vorigen Jahr gedruckte wissenschaftliche Theil dieser Einladungsschrift, welcher die Abhandlung des Herrn Bertram enthält, vorzugsweise von mathematischen Lesern beachtet wird; so schien es mir angemessen, die allgemeine Cubaturformel, auf welche ich vor ganz kurzer Zeit gekommen war, und die mich durch ihre Einfachheit und Allgemeinheit überraschte, hier anzuschliessen. Es war mir und einigen mathematischen Freunden, die ich darüber befragte, nicht bekannt, dass dieser einfache Ausdruck schon auf andrem Wege gefunden sei. Ich machte daher durch öffentliche Blätter auf ihn aufmerksam. Durch diese erfuhr ich eben so bald, dass derselbe nicht neu, sondern in gewissen Anfängen schon längere Zeit, in mehr ausgeprägter Form schon über zwei Jahre bekannt sei. Es verdient indessen dieser Satz gewiss grössere Verbreitung, als er bis jetzt erhalten hat, und es mag in dieser Hinsicht nicht überflüssig sein, die Aufmerksamkeit wiederholentlich auf ihn zu lenken; besonders da, was bis jetzt noch nicht in genügender Weise geschehen war, der Umfang seiner Anwendbarkeit hier vollständiger als bisher bezeichnet werden konnte.

Als historische Notiz über den Gegenstand füge ich noch Folgendes hinzu: Für die Berechnung des Flächeninhalts beliebiger krummliniger ebener Figuren hat Thomas Simpson eine Annäherungsformel angegeben, indem er dieselbe in möglichst viele Trapeze von gleicher Höhe zerlegte, deren Parallelseiten die in gleichen Abständen hindurch gelegten Ordinaten sind. Die Entwicklung dieser Formel ist zuerst von dem schwedischen Admiral Chapmann, später durch Prony, Eitelwein und Poncelet vervollkommnet worden, und findet sich unter anderen in Brix Elementar-Lehrbuch der dynamischen Wissenschaften (Berlin 1831.) I. S. 108.

Die bei dieser Formel befolgte Methode, welche für die Ausmessung krummer Flächen ein absolut genaues Resultat nicht geben kann, bot, auf die Ausmessung der Umdrehungskörper übertragen, in vielen Fällen vollkommen richtige Resultate. Während man eine krummlinig begränzte Fläche nur angenähert, dann aber allerdings immer genauer findet, je mehr Ordinaten der Curve man in Rechnung zieht; genügen für die Ausmessung sehr vieler Körperstumpfe schon drei parallele Durchschnittsflächen in gleichem Abstande. Diese Bemerkung findet sich am Schlusse des genannten Werkes pag. 109. Die dort gegebene Formel für drei Durchschnittsflächen der Umdrehungskörper des Kreises, der Parabel, der Ellipse, der Hyperbel, ist im Wesentlichen die im §. 6. entwickelte, wird aber nur als Annäherungsformel bezeichnet; wie sie es denn für viele Körper auch nur sein kann. Von ihrer Anwendung auf Obelisken ist noch nicht die Rede.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die letztgenannten Körper behandelte Herr Professor Steiner mit dem ihm eigenthümlichen raumerforschenden Scharfsinn (Crelle Journ. XXIII. S. 275.). Durch elementare, von den hier gegebenen verschiedene Betrachtungen, indem er den Obelisken in Pyramiden zerlegt, deren gemeinsame Spitze in der Mittelfigur liegt, gelan er zu dem hier §. 6. angegebenen Resultat, und dehnt dasselbe im Verfolge seine Untersuchung auf alle Körper aus, deren Seitenflächen gerade, oder so gekrümmt sind, dass sie gerade Linien aufnehmen. Sehr interessant sind die elementaren Betrachtungen der windschiefen Flächen. Sie schliessen sich auch an die hier gegebene Darstellung sehr leicht an; wenn man die Diagonalen HF, hf oder EG, eg der Durchschnittsfigur einer schwebenden dreiseitigen Pyramide (§ 4.) verfolgt, während sich diese Figur von einer Grenzkante zur andern stätig fortbewegt. Man sieht leicht ein, dass die Pyramide durch die so entstandene Fläche in zwei gleiche Raumtheile zerlegt wird, dass also auch für jede Hälfte der allgemeine Satz gilt. Es kann nun jeder Körperstumpf mit windschiefen Seitenflächen, durch Anlegung solcher halben schwebenden Pyramiden, welche anpassende Flächen haben, in einen Obelisk verwandelt werden, woraus sich ergiebt, dass auch für solche Körperstumpfe das allgemeine Gesetz gilt. Die Schwerpunktsformel, welche sich aus der hier gegebenen Betrachtung (§. 6.) sehr einfach ableiten lässt, ist in der Steinerschen Abhandlung nicht erwähnt.

So ist denn ein Theil der hier durchgeführten Sätze schon ein Gegenstand bewährter Forschung gewesen. Dass auch Herr Koppe (Crelle Journ. XVIII. S. 275.) und Herr Schweins bereits schon im Jahre 1835 einschlagende, aber noch nicht erschöpfende Untersuchungen angestellt haben, wird a. a. O. S. 278 erwähnt. Herr Commissionsrath Brix, der die Formel, wie oben bemerkt ist, schon in seinem Lehrbuch der Dynamik angedeutet, widmete ihr später eine gründliche Untersuchung, die im XXV. Bande des Crelleschen Journals niedergelegt ist. Er dehnte sie auch auf den Schwerpunkt der Obelisken und der Umdrehungskörper aus, und wies die Richtigkeit der in §. 6. gegebenen Formeln für alle Umdrehungskörper solcher Curven nach, für welche die Gleichung $y = \sqrt{a + bx + cx^2}$ gültig ist.

In einem besondern kleinen, für die Praxis bestimmten und mit nützlichen Tafeln versehenen Büchlein (Inhaltsberechnung der Körper nach einer einzigen Formel. Berlin 1847.) hat Herr Ligowsky auch eine Ableitung dieser Formel gegeben und ihre Anwendbarkeit nachgewiesen. Seine mit höherem Calcul unterstützten Untersuchungen führen ihn S. 48 auf den Schluss, dass dieselbe auf alle Körper passe, deren Durchschnittsfläche in Bezug auf eine sie durchschneidende Abscissenaxe sich durch $\frac{x^2}{p}$ ausdrücken lasse.

Das erweiterte Gesetz, welches in der vorstehenden Abhandlung §. 10. dargestellt ist, wurde meines Wissens noch nirgend ausgesprochen*). Die Einfachheit der von mir gegebenen Ableitung, aus welcher sich noch manches für die Auffindung von Annäherungsformeln ergiebt, dürfte sich empfehlen und dem wichtigen Satze einen Platz in den Elementarbüchern der Stereometrie sichern, wohin derselbe wegen seiner durchgreifenden Anwendbarkeit nothwendig gehört.

*) Einer brieflichen Mittheilung des Herrn Commissionsrath Brix vom 24. Februar zufolge ist derselbe ebenfalls auf dieses Resultat gekommen und hat über diese Erweiterung der Cubaturformel einen Aufsatz für die Veröffentlichung bereit.

E. F. August.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf