Konstante k_1 eine besondere Spielart der z-Kurvenfigur entsprechen. Alle Spielarten aber stimmen in der Reihenfolge der Intervalle überein. Im Mittelintervall, zu beiden Seiten des Hauptstrahls von dem Ausnahmepunkt bis zu den ersten Blattspitzen gehört zu jedem Winkel φ nur ein z-Wert. Daran schliefsen sich auf beiden Seiten Intervalle mit 3, dann mit 5, 7 . . . z-Werten für jeden Winkel φ.

IX.

Über die Lösbarkeit der parabolischen Form.

Die parabolische Form des linearen Dreikörperproblems ist auf die Auflösung einer der Differentialgleichungen (54) bis (57) zurückgeführt. Wir halten Umschau unter der mathematischen Verwandtschaft der Gleichungen, um zu ermitteln, welche Hilfe die reine Mathematik unserem Problem gewährt, und welche Rückwirkungen eine etwaige Lösung auf rein mathematische Untersuchungen ausüben würde. Es ist bekannt, dafs in der heutigen Wissenschaft nicht mehr die Auflösung, sondern die Theorie der Differentialgleichungen gepflegt wird. Die Wissenschaft sieht ihre Hauptaufgabe nicht mehr in der Gewinnung von Resultaten, wie es noch Euler in jener glücklichen Zeit tat, als auf dem neuerschlossenen Gebiet der Infinitesimalrechnung die erste, reiche Ernte gehalten wurde, sie erforscht vielmehr die Eigenschaften der Differentialgleichungen, die Bedingungen für das Vorhandensein allgemeiner Integrale, die Beziehungen der partikularen Lösungen unter sich und zur Hauptlösung, selbst da, wo man die Lösungen nicht genau kennt. Selbstverständlich steht die Theorie auf arithmetischem Boden, sie betrachtet ebenso selbstverständlich und unvermeidlich ihre Variablen als komplexe Zahlen und schreibt der Ebene, in welcher diese Variablen untergebracht werden, Eigenschaften zu, die mit den Eigenschaften natürlicher Flächen in krassem Widerspruch stehen. Das ist ihr gutes Recht, denn die reine Gröfsenlehre mufs, unabhängig von Raum und Zeit, sich selbst das Gesetz geben; es liegt aber auch nichts Wunderbares darin, dafs die bei solchem Vorgehen gewonnenen Sätze rein theoretisch bleiben und auf natürliche Vorgänge nicht recht passen wollen.

Die Auffindung allgemeiner Lösungen behält freilich, wenn sie gelingt, ihren grofsen Wert; aber eben hier, wo wir Hilfe suchen, sind die Ergebnisse der mathematischen Forschung, ehrlich gestanden, recht dürftig. In der Tat kann man, von zahlreichen oft stark gekünstelten Sonderfällen abgesehen und in voller Allgemeinheit, nur die lineare Gleichung erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} + Ay + B = 0 \tag{58}$$

auflösen (Bernouilli), in der A und B bekannte aber unbestimmte Funktionen der Unabhängigen x sind.

Ist $A = 0$, so stellt (58) die Gesamtheit aller Differentialgleichungen erster Ordnung vor, bei denen von vorn herein die Trennung der Variablen möglich ist, nötigenfalls nach Einführung einer neuen Abhängigen für die von x freie Gruppe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist A von Null verschieden, so empfiehlt es sich, auch eine neue unabhängige Variable φ durch die Beziehung $\mu\,dx = d\varphi$ einzuführen. Wünscht man z. B., dafs in (58) der Koeffizient von y den Wert 1 erhält, so setzt man, nach Division durch μ,

$$\frac{A}{\mu} = 1;\quad d\varphi = A \cdot dx;\quad \varphi - \varphi_0 = \int A\,dx.$$

Durch Umkehrung erhält man x als Funktion von φ, so dafs auch $\frac{B}{\mu} = \frac{B}{A} = F$ als Funktion der neuen Unabhängigen bekannt wird. Aus (58) entsteht dann $y' + y + F = 0$. Diese Gleichung wird aufgelöst durch eine lineare Substitution $y = uz + v$ und Spaltung der entstehenden Gleichung $uz' + u'z + v' + ux + v + F = 0$ in zwei Teile:

$$u' + u = 0;\quad u = k_1 e^{-\varphi} \text{ und } uz' + v' + v + F = 0.$$

Kennt man ein partikulares Integral $v = y_0$, so wird $z' = 0$; $z = k_2$ und $y = k_2 \cdot k_1 e^{-\varphi} + y_0$.

Ist eine partielle Lösung nicht bekannt, so folgt:

$$z' = \frac{e^{\varphi}}{k_1}(-v' - v - F);\quad z = k_2 - \frac{1}{k_1}\int e^{\varphi}(v' + v + F)\,d\varphi,$$

daher:

$$y = e^{-\varphi}(k_2 k_1 - \int F e^{\varphi} \cdot d\varphi) - e^{-\varphi}\int e^{\varphi}(v' + v)\,d\varphi + v.$$

In dieser allgemeinen Lösung, deren Richtigkeit leicht zu verifizieren ist, tritt eine völlig unbekannte Gröfse v auf. Setzt man zur Aufklärung für einen Augenblick $-e^{-\varphi} \cdot \int e^{\varphi}(v' + v)\,d\varphi + v = Z$ so folgt:

$$Z' = e^{-\varphi} \cdot \int e^{\varphi}(v' + v)\,d\varphi - v' - v + v' = -Z;\quad Z = k_3 e^{-\varphi}.$$

Der mit Z bezeichnete Ausdruck hat daher für jedes beliebige v den Wert $k_3 e^{-\varphi}$, wo auch $k_3 = 0$ zulässig ist. Die vorläufigen Konstanten k_1, k_2 und k_3 treten zu einer einzigen Schlufskonstante $K = k_1 k_2 + k_3$ zusammen, und man bekommt das bekannte Resultat: $y = e^{-\varphi}(K - \int F e^{\varphi}\,d\varphi)$.

Bemerkenswert ist, dafs die Unabhängige φ aufser in der gegebenen Funktion F noch einmal in einer besonderen Nebenfunktion, hier als einfache Exponentialgröfse, auftritt, die mit der Funktion F garnichts gemein hat, also nur durch die Form der Differentialgleichung bedingt sein kann, ferner dafs die Konstantengleichung dieselbe Struktur zeigt wie die benutzte lineare Substitution, endlich dafs eine etwaige Überladung der Substitution harmlos verläuft, da die überschüssigen Gröfsen aus dem Endresultat von selbst herausfallen.

Quadratische Differentialgleichung erster Ordnung. Die Gleichungen (55) und (56) sind als besondere Fälle in der allgemeineren:

$$\mathfrak{A}z'^2 + \mathfrak{B}z'z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z' + \mathfrak{E}z + \mathfrak{F} = 0 \tag{59}$$

enthalten, wo die Differentialkoeffizienten $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{F}$ Funktionen der unabhängigen Variablen φ sind. Der Versuch, die linke Seite in zwei lineare Faktoren zu zerlegen:

$$(az' + bz + c) \cdot (\alpha z' + \beta z + \gamma) = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

entspricht der analogen Behandlung der allgemeinen Kegelschnittsgleichung. Die sechs Bedingungen:

$$a \cdot \alpha = \mathfrak{A},\ b\beta = \mathfrak{C},\ c \cdot \gamma = \mathfrak{F};\ \ a\beta + b\alpha = \mathfrak{B},\ b\gamma + c\beta = \mathfrak{E},\ c\alpha + a\gamma = \mathfrak{D}$$

reichen zur Bestimmung der Gröfsen a, b, c; α, β, γ nicht aus. Multipliziert man nämlich die Gleichungen der zweiten Gruppe miteinander und setzt die erste Gruppe ein, so entsteht zunächst:

$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E} = 2\,\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{F} + \mathfrak{A}\,(b^2\gamma^2 + c^2\beta^2) + \mathfrak{C}\,(c^2\alpha^2 + a^2\gamma^2) + \mathfrak{F}\,(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2).$$

Werden dann die Gleichungen der zweiten Gruppe quadriert und die Quadratsummen mit Beachtung der ersten Gruppe eingesetzt, so ergibt sich, wie bei der Kegelschnittsgleichung, als Diskriminante der Zerlegbarkeit:

$$\Delta_z = \mathfrak{A}\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{F}\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{E} - 4\,\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{F}$$

oder in Determinantenform:

$$\Delta_z = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2\mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{B} & 2\mathfrak{C} & \mathfrak{E} \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{E} & 2\mathfrak{F} \end{vmatrix}$$

Für (55) wird $\Delta = 16\,f$; für (56) $\Delta = f^2$; die Gleichungen sind daher nur zerlegbar, wenn $f = 0$ ist.

Wir führen in (59) eine lineare Substitution ein:

$$z = sy + t;\ \ z' = sy' + s'y + t';\ \ s \gtrless 0,$$

wodurch Grad und Ordnung nicht geändert werden, und erhalten mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} A &= \mathfrak{A} \cdot s^2 & D &= 2\,\mathfrak{A}st' + \mathfrak{B}st + \mathfrak{D}s \\ B &= 2\,\mathfrak{A}ss' + \mathfrak{B} \cdot s^2 & E &= 2\,\mathfrak{A}s't' + \mathfrak{B}\,(s't + st') + 2\,\mathfrak{C}st + \mathfrak{D}s' + \mathfrak{E}s \qquad (60) \\ C &= \mathfrak{A}s'^2 + \mathfrak{B}ss' + \mathfrak{C}s^2 & F &= \mathfrak{A}t'^2 + \mathfrak{B}t't + \mathfrak{C}t^2 + \mathfrak{D}t' + \mathfrak{E}t + \mathfrak{F} \end{aligned}$$

als Gleichung für y:

$$Ay'^2 + By'y + Cy^2 + Dy' + Ey + F = 0 \qquad (61)$$

mit der Diskriminante

$$\Delta_y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$$

Will man Δ_y und Δ_z vergleichen, so drückt man zweckmäfsig zuerst die Unterdeterminanten:

$$U_1 = B^2 - 4\,AC;\ \ U_2 = B \cdot D - 2\,AE;\ \ U_3 = D^2 - 4\,A \cdot F$$

durch die entsprechenden Unterdeterminanten: $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_3$ von Δ_z aus:

$$U_1 = s^4\,\mathfrak{U}_1;\ \ U_2 = s^3\,(t\,\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2);\ \ U_3 = s^2\,(t^2\,\mathfrak{U}_1 + 2\,t\,\mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3)$$

und macht Gebrauch von den Beziehungen:

$$4\,A\,\Delta_y = U_2^2 - U_1U_3 \text{ und } 4\,\mathfrak{A}\,\Delta_z = \mathfrak{U}_2^2 - \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_3.$$

Dann folgt $\Delta_y = s^4\,\Delta_z$, d. h. die lineare Substitution ist ohne Einflufs auf die Zerlegbarkeit der zu untersuchenden Gleichung. —

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus (60) erkennt man Folgendes:

1. Ist in (59) der Koeffizient von z'^2 von Null verschieden, $\mathfrak{A} \gtrless 0$, so ist auch $A \gtrless 0$. Über s und t kann in der Weise verfügt werden, dafs $B = 0$ und $D = 0$ wird (lineare Gleichungen). Die Gleichung (61) kann durch A dividiert werden, oder, um neue Bezeichnungen zu sparen, man kann $A = 1$ rechnen. Damit ergibt sich als Stammform I:

$$y'^2 + Cy^2 + Ey + F = 0$$

mit drei Unterformen für die besonderen Möglichkeiten, dafs entweder $C = 0$ oder $E = 0$ oder $F = 0$ ausfällt:

$$\text{Ia) } y'^2 + Ey + F = 0; \quad \text{Ib) } y'^2 + Cy^2 + F = 0; \quad \text{Ic) } y'^2 + Cy^2 + Ey = 0.$$

2. Ist in (59) der Koeffizient von z'^2 gleich Null, dagegen $\mathfrak{B} \gtrless 0$, so wird auch $A = 0$; $B \gtrless 0$. Die Gröfsen s und t können so gewählt werden, dafs $C = 0$ und $D = 0$ wird. Rechnet man $B = 1$, so entsteht als Stammform II:

$$y'y + Ey + F = 0.$$

3. Sind in (59) die Koeffizienten $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$, dagegen $C \gtrless 0$, so werden $A = 0$, $B = 0$, $C \gtrless 0$. Dann kann D nicht $= 0$ sein, es sei denn $\mathfrak{D} = 0$, womit (59) aufhört, eine Differentialgleichung zu sein. Es kann aber $D = C$ und $E = 0$ gemacht werden. Setzt man wieder, wie es erlaubt ist, $C = 1$, so erhält man als Stammform III:

$$y' + y^2 + F = 0.$$

4. Sind endlich $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{C} = 0$, so wird, wie für alle übrigen Annahmen, die zu lösende Differentialgleichung linear.

Zu 3. Die Stammform III stellt den einfachsten Sonderfall von (59) vor, der nicht direkt linear ist. Sie ist in der Wissenschaft als Riccati'sche Gleichung bekannt und wird in den Lehrbüchern als erste Überschreitung der linearen Form behandelt. Ihre Auflösung gelingt ohne Schwierigkeit, wenn eine partikulare Lösung vorhanden ist. Das ist schon aus (60) erkennbar. Nehmen wir, der Einfachheit wegen, eine neue lineare Substitution $y = \sigma x + \tau$, $\sigma \gtrless 0$, so wird:

$$x' + \sigma x^2 + x\left(\frac{\sigma'}{\sigma} + 2\tau\right) + \frac{1}{\sigma}(\tau' + \tau^2 + F) = 0.$$

Ist τ der bekannnte partikulare Wert von y, und wird $\frac{\sigma'}{\sigma} + 2\tau = 0$ gesetzt, so bleibt nur $x' + \sigma x^2 = 0$ zu integrieren. Wenn dagegen die Funktion F so aufgebaut ist, dafs auch durch Anwendung unendlicher Reihen eine partikulare Lösung nicht zu beschaffen ist, so gilt die Gleichung als unlösbar.

Zu 2. Die Stammform II, die durch Einführung einer neuen Unabhängigen auf $y'y + y + F = 0$ vereinfacht werden kann, ist von grofsen Mathematikern, Euler, Jacobi und Anderen, untersucht worden (Enzyklopädie der Math. Wiss. Bd. II, S. 238). Die Methode besteht, nach Euler's Vorgang, im wesentlichen darin, dafs man von einer wahrscheinlichen Lösung ausgeht und nachträglich der Funktion F eine solche Gestalt gibt, dafs die wahrscheinliche Lösung zu einer richtigen Lösung wird. Z. B. ist, um nur das einfachste Resultat anzuführen, für konstante m- und n-Werte

$$\left(y + \frac{m\varphi}{m-n}\right)^m \cdot \left(y - \frac{m\varphi}{m-n}\right)^n = K; \quad m \gtrless n$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die allgemeine Lösung, wenn $F = -\frac{m \cdot n \cdot \varphi}{(m-n)^2}$ gesetzt wird. (Korkine, Math. Ann. Bd. 48. (1897). S. 317). Die Gleichung ist demnach lösbar, wenn F eine lineare Funktion der Unabhängigen ist, etwa $F = k \cdot \varphi$. Fatal ist nur, dafs schon für einfache, ganzzahlige Werte $k = 1, 2, \ldots$ der Grad der auflösenden Substitution eine bedenkliche Höhe erreicht. Bei beliebiger Struktur von F ist eine allgemeine Lösung nicht bekannt, selbst wenn partikulare Integrale vorliegen. Die Stammform II steht daher in Bezug auf ihre Lösbarkeit noch hinter der Riccati'schen Gleichung zurück.

Zu 1. Die Stammform I enthält in ihren Unterformen die Differentialgleichungen für die parabolisch lineare Bewegung (55) und (56). Es soll gezeigt werden, dafs die drei Unterformen sich auf die Stammform II zurückführen lassen. Gibt man der Gleichung die Form:

$$(y' + y\sqrt{-C}) \cdot (y' - y\sqrt{-C}) + Ey + F = 0$$

und führt $y' - y\sqrt{-C} = z$ ein, so wird

$$z \cdot (z + 2y\sqrt{-C}) + Ey + F = 0; \quad y = \frac{-z^2 - F}{2z\sqrt{-C} + E}; \quad y' = \frac{z^2\sqrt{-C} + zE - F\sqrt{-C}}{2z\sqrt{-C} + E}$$

Durch Differentiation von y und Elimination von y' ergibt sich:

$$0 = z'(-2z^2\sqrt{-C} - 2zE + 2F\sqrt{-C}) + z^3\left(-\frac{C'}{\sqrt{-C}} + 2C\right) + z^2(E' - 3E\sqrt{-C})$$
$$+ z\left(-2F'\sqrt{-C} - F\frac{C'}{\sqrt{-C}} - E^2 - 2CF\right) + E'F - F'E + EF\sqrt{-C}.$$

Für $C = 0$, wobei auch $\frac{C'}{\sqrt{-C}} = 0$ wird, kann diese Gleichung wie (59) für $\mathfrak{A} = 0$ behandelt, d. h. durch lineare Substitution auf die Stammform II gebracht werden. Ist $E = 0$, so erhält man, nach Multiplikation mit z, eine Gleichung derselben Art für z^2. Für $F = 0$ endlich ergibt sich dasselbe Resultat nach Division durch z. Nennt man die neue abhängige Variable in jedem Falle x, so erhält man unter Hinzufügung der aus der Substitution hervorgehenden partikularen Lösungen folgende Zusammenstellung, wo $N = e^{-\int\sqrt{-C}\,d\varphi}$ ist:

Unterform.	Substitution.	Stammform II.	Part. Lösung
Ia) $y'^2 + Ey + F = 0$	$y = -x^2 - \frac{F}{E}$	$x'x + x\frac{\sqrt{E}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{F}{E}\right)^{I} = 0$	fehlt
Ib) $y'^2 + Cy^2 + F = 0$	$y^2 = \frac{\left(xN^2 - 2\frac{F}{C}\right)^2}{4\left(xN^2 - \frac{F}{C}\right)}$	$x'x - x \cdot \frac{3\left(\frac{F}{C}\right)^{I} - 2\frac{F}{\sqrt{-C}}}{N^2} + \frac{2\frac{F}{C}\left(\frac{F}{C}\right)^{I}}{N^4} = 0$	$x = \frac{F}{C}N^{-2}$
Ic) $y'^2 + Cy^2 + Ey = 0$	$y = -\frac{\left(xN + \frac{E}{C}\right)^2}{2xN^2 + \frac{E}{C}}$	$x'x + x \cdot \frac{3\left(\frac{E}{C}\right)^{I} - \frac{E}{\sqrt{-C}}}{2N} + \frac{\frac{E}{C}\left(\frac{E}{C}\right)^{I}}{2N^2} = 0$	$x = -\frac{E}{2C}N^{-2}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Folgerungen. Die nächste Verwandtschaft besteht zwischen der Stammform II und der Unterform Ia. Das erkennt man an der Einfachheit der Substitution und aus dem Umstand, dafs keine partikulare Lösung vorhanden ist. Daher kann auch jede Gleichung von der Stammform II durch Umkehrung der Substitution auf die Unterform Ia gebracht werden, und wenn die Stammform II trotz der Bemühungen Euler's und Jacobi's sich als unlösbar behauptet hat, so kann wenig Zweifel bestehen, dafs der Unterform Ia dieselbe unangenehme Eigenschaft zukommt.

Die beiden anderen Unterformen für $E = 0$ und $F = 0$, die für die parabolische Form des linearen Dreikörperproblems in Frage kommen, zeigen ein abweichendes Verhalten. Sie können auch auf die Stammform II gebracht werden, liefern aber dabei ein partikulares Integral für die neue Form. Eine Gleichung der Stammform II, z. B. $y'y + y + F = 0$ kann daher nur dann auf eine der unter sich nahverwandten Formen Ib oder Ic gebracht werden, wenn ein partikulares Integral bekannt ist. Wir kommen zu dem Schlufs, dafs durch die Unlösbarkeit der Stammform II die Lösbarkeit der Formen Ib und Ic nicht widerlegt wird, und dafs ein direkter Angriff auf Ib oder Ic mehr Erfolg verspricht als die mühsamen auf II gerichteten Anstrengungen so vieler Mathematiker. Die Hoffnung, Ib oder Ic lösen zu können, wird aufserdem dadurch verstärkt, dafs diese Gleichungen einen in der Natur ausführbaren Bewegungsvorgang ausdrücken. Die Stammform II würde dann, wie die Riccati'sche Gleichung, in die Klasse der Differentialgleichungen zu verweisen sein, deren allgemeine Lösung erst erwartet werden darf, wenn durch Reihenentwickelung ein partikulares Integral aufgefunden ist.

Will man das Lösbare vom Unlösbaren trennen, so kommt es auf den Einteilungsgrund an. Sagt man z. B.: auf die Gleichungen erster Ordnung folgen die Gleichungen zweiter Ordnung, oder auf lineare Substitutionen folgen quadratische, so verfährt man nach arithmetischer Analogie, die nach dem ersten Schritt, der hier und da gelingt, fast immer auf die Notwendigkeit verwickelter Spezialisierungen führt. Geht man dagegen von dem Grundsatz aus, dafs, was in der Natur gelöst wird, auch lösbar sein mufs, so gelangt man zu einer Stufenfolge der Probleme, der eine berechtigte Zuversicht auf erfolgreiche Arbeit nicht abgesprochen werden kann.

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf