VIII.

Quadratische Fernwirkung.

1. Die Differentialgleichungen. Bewegen sich die drei Körper in einer geraden Linie unter dem Einflusse von Kräften, die nach der Newton'schen Hypothese dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional sind ($n = 2$), so heifsen die Differentialgleichungen für die Bewegung des Punktes P nach (29 a):

$$\frac{d^2(\varrho^2)}{dt^2} - \frac{f}{\varrho} - 2L = 0; \quad \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \varrho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{f}{\varrho} - L = 0. \tag{51}$$

In dem Sektor S_ζ, $-S_\xi$, d. h. für die Reihenfolge m_1, m_2, m_3, haben die Funktion f und ihre erste Abgeleitete f′ nach (40a) und (41) die Form:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\mu_1}{\sin(\delta_\xi - \varphi)} - \frac{\mu_2}{\sin(\delta_\eta - \varphi)} + \frac{\mu_3}{\sin(\delta_\zeta - \varphi)}; \\ f' &= \frac{\mu_1 \cos(\delta_\xi - \varphi)}{\sin^2(\delta_\xi - \varphi)} - \frac{\mu_2 \cos(\delta_\eta - \varphi)}{\sin^2(\delta_\eta - \varphi)} + \frac{\mu_3 \cos(\delta_\zeta - \varphi)}{\sin^2(\delta_\zeta - \varphi)}. \end{aligned} \tag{52}$$

Aus der Struktur dieser Gleichungen und aus der Konstruktion der f-Kurve (IV, 6) geht auch ohne nähere Untersuchung hervor, dafs f stets positiv ist und von einem Minimum im Inneren des Sektors nach beiden Seiten ins Unendliche wächst, dafs f′, wenn der Winkel φ in positiver Richtung den Sektor durchläuft, alle reellen Werte von $-\infty$ durch 0 nach $+\infty$ annimmt, und dafs in der Nähe der Spuren der Quotient $\frac{f}{f'} = 0$ wird.

Als Gleichung der Bahnlinie kann eine der Formen (32), (33), (35), (36) für $n = 2$ genommen werden:

$$\begin{gathered} \varrho''(2f + 2L\varrho) + \frac{\varrho'^3 f'}{\varrho^2} - \varrho'^2\left(3\frac{f}{\varrho} + 4L\right) + \varrho' f' - \varrho f - 2L\varrho^2 = 0 \\ f(1 + 2\psi') + 2L\varrho(1 + \psi') = f' \operatorname{ctg}\psi \\ -\xi''(f'\xi + f) + 3\xi'^2 f' + \xi'\left(f''\xi - f'(2\xi^2 + 4) + 3f\xi\right) + (1 + \xi^2)\left(-f''\xi + f'(1 + \xi^2) - f\xi\right) = 0 \\ 2\varrho(f + L\varrho) - R(f'\cos\psi + f\sin\psi) = 0. \end{gathered} \tag{53}$$

Unter ψ ist, wie immer, der Fluxionswinkel zwischen dem Fahrstrahl ϱ und der resultierenden Geschwindigkeit des Punktes P verstanden; ξ ist durch $\xi = \operatorname{ctg}\psi$ definiert; R ist der Krümmungsradius. Die ξ-Gleichung läfst sich noch etwas zusammenziehen. Setzt man zunächst $\frac{f'}{f} = g$, so ergibt sich:

$$(\xi'' - 2\xi'\xi)(1 + g\xi) + (\xi' - 1 - \xi^2)\cdot\left(-3g\xi' + \xi^2 g - \xi(g' + g^2 + 1) + g\right) = 0.$$

Wird dann durch $\frac{\xi' - 1 - \xi^2}{1 + g\xi} = \frac{f}{\eta - 2f}$ eine neue Variable η eingeführt, so

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

findet man durch Differentiation der letzten Gleichung und Elimination von ξ'' und ξ' die Beziehung $\xi = -\frac{\eta'}{\eta - 2f}$ und darauf:

$$\eta''(\eta - 2f) + \eta' f' + (\eta - f) \cdot (\eta - 2f) = 0.$$

Dies dürfte die einfachste Form der Differentialgleichung für das lineare Dreikörperproblem sein, ihre Auflösung ist bisher nicht gelungen und wird auch wohl noch eine Zeit lang auf sich warten lassen. Bis dahin wird man sich, um Aufschlüsse über den Verlauf des Prozesses zu erhalten, damit begnügen müssen, Fragen an die Gleichungen (53) zu stellen, die mehr oder weniger ausgiebig beantwortet werden.

2. Verhalten der ϱ-Kurven an den Spuren. Der Punkt P kann im Anfangszustand jede beliebige Stelle im Sektor einnehmen und sich nach jeder beliebigen Richtung bewegen. Gibt man nämlich den Gröfsen ϱ, φ; $\frac{d\varrho}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ irgend welche bestimmten Werte, so folgen aus (27) und ihren Ableitungen eindeutige, zulässige Angaben über die Anordnung der Massen und die Gröfse der Geschwindigkeiten. Den ganzen Sektor und, wenn man Durchdringung der Massen zuläfst, die ganze Spurenebene hat man sich daher durch eine unendliche Schar von ϱ-Kurven (möglichen Bahnlinien des Punktes P) ausgefüllt zu denken.

Wir betrachten zuerst den Verlauf der ϱ-Kurven in unmittelbarer Nähe der Spuren, also beim Zusammenstofs zweier Massen. In der zweiten Gleichung (53) können die endlichen Gröfsen L und ϱ gegen die ins Unendliche wachsenden f und f' vernachlässigt werden, die Gleichung strebt der Schlufsform $\frac{f}{f'} \operatorname{tg} \psi \cdot (1 + 2\psi') = 1$ zu, worin $\frac{f}{f'} = 0$ wird. Nach (35a) mufs daher $\operatorname{tg} \psi (1 + 2\psi') = \operatorname{tg} \psi \left(-1 + \frac{2\varrho}{R \cdot \sin \psi}\right) = \infty$ werden. Der Krümmungsradius R kann wohl an einer vereinzelten Stelle $= 0$ sein, was einen Knick in der ϱ-Kurve anzeigen würde, er kann aber bei der stetigen Annäherung des Punktes P an die Spur nicht dauernd verschwinden. Somit ergibt sich als einzige Möglichkeit $\operatorname{tg} \psi = \infty$, d. h. die ϱ-Kurven stofsen senkrecht gegen die Spuren. In der Spur selbst kann $R = 0$; $\psi' = \infty$ sein, ob aber eine Rückkehr oder ein Übertritt in den Nachbarsektor stattfindet, ist eine Frage, deren Beantwortung durch die Gleichungen aus früher angegebenen Gründen nicht zu erwarten ist.

Liegt P in der Nähe der Spur S_ζ, aber in unendlicher Entfernung: $\varrho = \infty$, $\delta_\zeta = \varphi$, so ändert sich die Sache (V, 3). Zwar wird auch hier die Spur von der ϱ-Kurve senkrecht getroffen werden, zu einem abweichenden Verhalten liegt kein Grund vor; aber $\psi' = \frac{d\psi}{d\varphi}$ kann dauernd unendlich grofs werden. Der Punkt P kann in der Nähe der Spur Kurven beschreiben, die bei der grofsen Entfernung keinen merklichen Einflufs auf den Winkel φ ausüben. Man vergegenwärtige sich, dafs in solchem Falle der Abstand der Massen m_1 und m_2 endlich und nur die dritte Masse unendlich weit entfernt ist. Die beiden ersten Massen werden sich genau so bewegen, wie es für ein freies System zweier Körper vorgeschrieben ist, und entsprechende Bewegungen des Punktes P veranlassen. Der Einflufs der dritten Masse, die sich noch im Unendlichen nach dem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gesetz der Trägheit bewegt, wird vorläufig darin bestehen, dafs sie vom Schwerpunkt der beiden ersten eine Geschwindigkeit verlangt, die ihrer eigenen Geschwindigkeit im richtigen Massenverhältnis $m_3 : m_{12}$ entgegengesetzt ist. Deshalb wird der Punkt P entweder immer weiter ins Unendliche zurückweichen, oder allmählich in die Sphäre des Endlichen hineingezogen, wo dann die störende Arbeit der dritten Masse beginnen kann. Es ist auch zu beachten, dafs der Bewegungsprozefs zweier Massen stets der Gefahr ausgesetzt ist, von einer dritten Masse, die bislang im Unendlichen lauerte, unterbrochen zu werden.

Die nächste Frage, ob die ϱ-Kurven in den Spuren ein Maximum oder ein Minimum haben, ist etwas schwieriger zu beantworten, da die kinematischen Verhältnisse an diesen Stellen die Gültigkeit der mathematischen Schlüsse beeinträchtigen. Werden in der ersten Gleichung (53) die endlichen Gröfsen, die neben den unendlichen additive Stellung haben, fortgelassen, so erkennt man, dafs das Vorzeichen von ϱ'' für $\varrho' = 0$ bestimmt wird durch $\varrho'' = \frac{-\varrho' f' + \varrho f}{2 f} = \frac{\varrho}{2} - x$, wo $x = \frac{\varrho'}{2} : \frac{f}{f'}$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auftritt. An der Spur S_ζ, wo $\delta_\zeta - \varphi = 0$ ist, können wir f und f' auf die Teile $\frac{\mu_3}{\sin(\delta_\zeta - \varphi)}$ und $\frac{\mu_3 \cos(\delta_\zeta - \varphi)}{\sin^2(\delta_\zeta - \varphi)}$ beschränken (52), weil die andern Teile endlich sind, sodafs $\frac{f}{f'} = \operatorname{tg}(\delta_\zeta - \varphi)$ wird. Nach mathematischer Vorschrift folgt:

$$x = \frac{\varrho''}{2\,[\operatorname{tg}(\delta_\zeta - \varphi)]^1} = -\frac{\cos^2(\delta_\zeta - \varphi)}{2} \cdot \left(\frac{\varrho}{2} - x\right) \text{ oder } x = -\frac{\varrho}{2};\ \varrho'' = \varrho.$$

Die zweite Gleichung (53) ergibt für $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\delta_\zeta - \varphi = 0$ bei gleicher Behandlung:

$$\psi' = \frac{f' \operatorname{ctg}\psi - f}{2 f} = -\frac{1}{2} + y, \text{ wo } y = \frac{\operatorname{ctg}\psi}{2} : \frac{f}{f'} = \frac{0}{0}, \text{ daher:}$$

$$y = \frac{\psi' \cdot \cos^2(\delta_\zeta - \varphi)}{2 \cdot \sin^2\psi} = -\frac{1}{4} + \frac{y}{2} \text{ und } y = -\frac{1}{2};\ \psi' = -1;\ \psi' + 1 = 0;\ R = \infty.$$

Beide Gleichungen ergeben in Übereinstimmung für ϱ in der Spur ein Minimum. Die Resultate sind aber verbesserungsbedürftig, weil die Differentialgleichungen (53) nur für das Innere des Sektors gelten, in der Spur selbst aber ungültig werden. Der Aufenthalt des Punktes P in der Spur S_ζ und in ihrer unmittelbaren Nähe stellt eine Episode von unendlich kurzer Zeitdauer vor, denn nach (51) wird $\frac{d\varphi}{dt} = \infty$. Der Bewegungsprozefs, Zusammensturz der Massen m_1 und m_2 nebst Durchdringung oder Umkehr, hat hier eine Unstetigkeit zu überwinden, wie schon daraus ersichtlich ist, dafs die Asymptoten der f-Kurve in endlichen Abständen von den Spuren liegen, dafs mithin in der Spur selbst strenggenommen gar kein reeller Wert für f besteht. Fordert man, rein theoretisch, eine Durchdringung der Massen m_1 und m_2, so mufs man für den nächsten Sektor in eine neue Konstituierung der Funktion $f(\varphi)$ willigen und für $\sin(\delta_\zeta - \varphi)$ setzen $-\sin(\delta_\zeta - \varphi)$, damit der absolute Wert, wie es sein soll, gewahrt wird. In den vorstehenden Berechnungen der Form $\frac{0}{0}$ ist das nicht geschehen; es ist so gerechnet

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

worden, als könnte f von $+\infty$ nach $-\infty$ springen, ein Verfahren, bei dem man im nächsten Sektor keinen Gravitationsprozefs der vorausgesetzten Art vor sich hätte. In der Natur fällt der Eintritt des Punktes P in die Spur mit der Zertrümmerung der beteiligten Massen zusammen. Soll aber der lineare Prozefs als Grenzfall einer ausführbaren zweidimensionalen Bewegung gelten, was im folgenden beabsichtigt wird, so ist Fortführung der Rechnung ohne Vorzeichenwechsel geboten, und der Einflufs der Sprungstelle ist durch eine besondere Überlegung festzustellen gerade so, wie es in der Mechanik beim Stofs elastischer Körper geschieht. — Der Fahrstrahl ϱ ist durch die Gleichung $\varrho^2 = \frac{x_{32}^2}{m_1} + \frac{x_{13}^2}{m_2} + \frac{x_{21}^2}{m_3}$ definiert. Stellt man sich vor, die Umkehr der Massen m_1 und m_2 werde dadurch bewerkstelligt, dafs beide um ihren Schwerpunkt in sehr langgestreckten Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln herumschwingen, so sieht man, dafs dieser Vorgang nicht nur unendlich kurze Zeit erfordert, sondern sich auf unendlich kleine Teile von ϱ erstreckt. Am Schlufs der Episode, die sich gewissermafsen in einer anderen Gröfsensphäre abspielt, haben m_1 und m_2 ihre früheren Stellungen wieder eingenommen, ihre Geschwindigkeiten haben die Richtung geändert, die Gröfse von ϱ ist genau dieselbe geblieben. Soll aber beim Stofs des Punktes P gegen die Spur der Fahrstrahl ϱ absolut unverändert bleiben, beziehungsweise nur Änderungen höherer Ordnung erleiden, so mufs sich P in einem Kreisbogen bewegen, dessen Mittelpunkt der Spurenanfang ist. Das führt auf $\varrho'' = 0$ und $R = \varrho$; $\psi' = 0$ als verbesserte Resultate der Maximalberechnungen. Der Einflufs der Unstetigkeit läfst sich demnach zahlenmäfsig dahin ausdrücken, dafs die Gröfsen x und y oder der Quotient $\frac{f'}{f}$, die in der Berechnung vorkommen, infolge der eingeschalteten Episode ihr Vorzeichen ändern. Resultat: Die ϱ-Kurven stofsen senkrecht gegen die Spuren und haben in den Spuren im allgemeinen weder Maximum noch Minimum.

3. Maxima und Minima im Inneren des Sektors. Um über den Verlauf der ϱ-Kurven im Inneren des Sektors Auskunft zu erhalten, gehen wir von der Annahme aus, der anfängliche Abstand zweier Massen m_1 und m_2 sei endlich, während die dritte m_3 vorläufig noch in unschädlicher Ferne weilt. Die beiden ersten Massen können dann unter sich elliptische, parabolische oder hyperbolische Bewegungsformen aufweisen. Ist der Partialprozefs parabolisch oder hyperbolisch, so wird es für m_1 und m_2 nur einen einzigen Zusammenstofs geben, den sie entweder vor sich oder hinter sich haben. Der Punkt P wird nach dem Zusammenstofs die Spur S_ζ endgültig verlassen, um sich in das Innere des Sektors zu begeben. Die Potentialfunktion in (22) wird allmählich den Wert 0 annehmen, und die Gesamtform des Prozesses, die durch das Vorzeichen von L bedingt wird, kann nur parabolisch ($L = 0$) oder hyperbolisch ($L > 0$) sein. Bei anfangs elliptischer Partialbewegung der Massen m_1 und m_2 kann die dritte Masse, schon im Unendlichen, durch ihre Geschwindigkeit die Gröfse der Konstanten L so stark beeinflussen (22), dafs die Gesamtform nicht elliptisch ($L < 0$) bleibt, sondern wieder parabolisch oder hyperbolisch wird. Der Punkt P aber wird nach Verlassen der Spur und mehr oder minder tiefem Eindringen in den Sektor nach derselben Spur zurückkehren und diese Oscillation unter Umständen recht häufig wiederholen müssen, ehe m_3 so nahe gekommen ist, dafs ihr Einflufs sich kräftiger geltend macht.

Wir begleiten den Punkt P auf einer solchen Exkursion ins Innere und beob-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

achten vor allem die Art seiner Rückkehr zur Spur. Soll die Bewegung in völlig stetiger Weise sich vollziehen, so mufs sie im Augenblick des Umkehrens mit der Richtung des Fahrstrahles zusammenfallen. In der zweiten Gleichung (53) wird dann $\psi = 0$ oder $\psi = \pi$ und $\operatorname{ctg} \psi = \infty$; auch ψ' wird wegen $\sin \psi = 0$ unendlich grofs (35a). Dem Zustandekommen einer solchen stetigen Bewegung steht im allgemeinen nichts entgegen. Der Punkt P kann aber auch auf andere Art zur Spur zurückkehren, wenn nämlich ψ' schon unendlich wird, ehe ψ den Wert 0 oder π erreicht. Dann wird $R = 0$, der Fluxionswinkel ψ erleidet einen Sprung und die ϱ-Kurve einen Knick, so dafs sie bei Wiederholung desselben Vorgangs einer Reihe von zugespitzten, der Spur angewachsenen Blättern gleicht. Für die Spitzen der Blätter kann man aus der zweiten oder vierten Gleichung (53) einen geometrischen Ort finden. Ist $\psi' = \infty$ oder $R = 0$, so folgt $f + L \cdot \varrho = 0$; $\varrho = -\frac{f}{L}$. Diese Gleichung ist nur zulässig für die elliptische Form ($L < 0$) und stellt eine leicht konstruierbare Grenzkurve dar, welche die Blattspitzen aufnimmt. Für $L = -1$ fällt sie mit der f-Kurve zusammen, für andere Werte von $L < 0$ ist sie der f-Kurve im vergröfserten oder verkleinerten Mafsstabe und bei proportionaler Verschiebung der Asymptoten ähnlich. Wird L, absolut genommen, immer kleiner, so zieht sich die Grenzkurve immer mehr aus dem Gebiet endlicher Gröfsen zurück, für $L \gtreqless 0$ verschwindet sie vollständig. Aus der vierten Gleichung (53) kann man noch etwas mehr erfahren. Die Unstetigkeit $\psi' = \infty$; $R = 0$ bezieht sich jedesmal nur auf einen einzigen Punkt, die Blattspitze; kurz vorher und nachher haben ψ' und R endliche Werte. Der Ausdruck $f + L\varrho$ kann sich aber nur stetig der Null nähern oder sich davon entfernen. Es mufs daher in unmittelbarer Nähe der Blattspitze auch der Faktor von R verschwinden, d. h. $\operatorname{tg} \psi = -\frac{f'}{f}$ sein. Das gibt für ψ zwei Werte, die sich um eine halbe Umdrehung unterscheiden und den beiden Kurventeilen angehören, welche in der Blattspitze unter einem Winkel von 0° zusammenlaufen wie zwei sich berührende Kreise. Führt man auch für die Grenzkurve einen Fluxionswinkel ψ_1 ein, so wird $\operatorname{ctg} \psi' = \frac{f'}{f}$ und $\operatorname{tg} \psi \cdot \operatorname{tg} \psi_1 = -1$, in Worten: die ϱ-Kurven stofsen auch senkrecht gegen die Grenzkurve.

Dafs der Punkt P im Inneren des Sektors Halt und Kehrt macht, darf nicht überraschen. Nach der zweiten Gleichung (51) hat das Quadrat der resultierenden Geschwindigkeit den Wert $\frac{f + L\varrho}{\varrho}$. Die Geschwindigkeit wird daher in der Blattspitze Null und würde beim Überschreiten der Grenze imaginär werden. Man sieht, dafs der von der Grenzkurve umschlossene Flächenraum für den Punkt P verbotenes Gebiet ist. Der Punkt ist in seiner Bewegungsfreiheit auf die zwischen Grenze und Spuren liegenden Zwickel angewiesen, die im Unendlichen zu dem zwischen den Asymptoten liegenden Flächenstreifen zusammenschrumpfen.

Die Bedingung für ein Maximum oder Minimum des Fahrstrahls ist $\varrho' = 0$. Die erste Gleichung (53) zeigt, dafs $\varrho'' = \frac{f\varrho + 2L\varrho^2}{2f + 2L\varrho}$ positiv oder negativ ausfällt, je nachdem $f + 2L\varrho \gtrless 0$ ist. Zieht man demnach die Grenzkurve auf die Hälfte zusammen, $\varrho = -\frac{f}{2L}$, so erhält man eine neue Kurve, welche die Gebiete der Maxima und Minima

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von einander trennt. Zwischen beiden Kurven kommen nur Maxima von ϱ vor, zwischen der neuen Kurve und den Spuren nur Minima. Bei dieser Scheidung werden die erwähnten Blattspitzen in das Reich der Maxima verwiesen, wie es sein mufs. Die Spuren mit ihren unentschiedenen Umkehrpunkten erscheinen als zweite Grenze des Minimumgebietes. Für $L = 0$ und $L > 0$ zieht sich mit der Grenzkurve auch das ganze Gebiet, in dem Maximalwerte von ϱ auftreten können, aus der Endlichkeit zurück; bei der parabolischen und der hyperbolischen Gesamtform des Prozesses sind daher im Endlichen nur Fahrstrahlminima zu erwarten.

4. Die elliptische Form, $L < 0$. Bei zugelassener Durchdringung der Massen steht dem Punkt P der zwischen den sechs Grenzkurven liegende Flächenraum zur Verfügung. Wie ersichtlich, können die drei Massen niemals völlig auseinander getrieben werden. Nur eine Masse kann zu Anfang oder am Ende des Prozesses im Unendlichen liegen, die beiden anderen müssen endlichen Abstand von einander haben und auch in ihrem partiellen Verhalten elliptische Form zeigen. Wir betrachten den mutmafslichen Verlauf der Bewegung unter Annahme umkehrender Massen; für durchdringbare Massen würde sich in den Hauptzügen dasselbe Bild ergeben. Das allmähliche Eingreifen der herannahenden störenden Masse in den Partialprozefs der beiden ersten vollzieht sich in anderer Weise als bei der kubischen Gravitation. Dort zeigte sich die Störung im wesentlichen als eine Zusammendrückung des Partialprozesses unter beständiger Verkürzung der Umlaufszeit oder der Schwingungsdauer. Hier, wo beim Näherkommen des Punktes P der Abstand zwischen Spur und Grenzkurve zunimmt, wird die Amplitude durch die Störung vergröfsert. Bei jedem senkrechten Stofs gegen die Grenzkurve (in der Blattspitze) hat der Fahrstrahl ein Maximum, beim Zurückschwingen zur Spur nimmt er beständig ab, auch nach dem Stofs gegen die Spur, wo kein Minimum liegt, dauert die Abnahme noch an, jedoch wird dann bald ein Minimum eintreten müssen, ehe P das Gebiet möglicher Minima wieder verläfst, um unter erneutem Anwachsen in die nächste Spitze zu gelangen. Die konvexen Schwingungen rücken immer näher an die Mitte des Spurensterns heran, bis sie einmal die untere Rundung der Grenzkurve umgehen können. Jetzt gibt die mittlere Masse die Rolle des Trabanten auf und wird zum Zentralkörper, der dem Friedenstörer entgegengeht, um einen Zusammenstofs beider Aufsenmassen, bei dem er selbst in Mitleidenschaft geriete, zu verhüten. Die Frage, ob dies gelingen wird, st nach der Verteilung der Maxima und Minima zu bejahen. Der Punkt P wird schliefslich in den Teil des Sektors gezogen werden, der nur Minima von ϱ zuläfst. Dann genügt ein einziges Minimum, dem weiteren Herandrängen der äufseren Masse Halt zu gebieten, denn zwei Minima können nicht aufeinander folgen, wenn nicht dazwischen ein Maximum liegt. Der Punkt mufs nach dem ersten Minimum wieder entlegenere Teile des Sektors aufsuchen, um sich das Recht zu neuer Abnahme zu holen. Hat die Zentralmasse den drohenden Untergang des Systems erfolgreich abgewehrt, so kehrt P entweder in den Zwickel zurück, aus dem er gekommen ist, der Angriff von m_3 wird abgeschlagen, oder er geht in den Zwickel der Nachbarspur, dann wird die mittlere Masse zum Trabanten der eindringenden dritten, und die erste Masse verschwindet in entgegengesetzter Richtung im Unendlichen.

Selbstverständlich kann der elliptische Prozefs auch so gedacht werden, dafs alle drei Massen dauernd im Endlichen bleiben. Dabei kann sogar die mittlere Masse aus-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schliefslich als Zentralkörper wirken, der sich abwechselnd mit dem linken oder rechten Nachbar beschäftigt, falls das gröfste Maximum von ϱ noch von der Grenzkurve unberührt bleibt; sie kann auch wiederholt die Rolle wechseln, wenn der Punkt P in dem einen oder anderen Zwickel nur bis zu einer gewissen Höhe emporsteigt.

5. Die hyperbolische Form, $L > 0$, gibt weniger Anhaltspunkte zur Beurteilung und im ganzen ein einfacheres Bild. Der Ausdruck $f + L\varrho$ ist stets positiv, die resultierende Geschwindigkeit des Punktes P hat daher auch im Unendlichen einen endlichen Wert (51), und der Krümmungsradius kann im Innern des Sektors, d. h. für endliche f und f', nicht 0 werden (53; 4), so dafs plötzliche Richtungsänderungen nur in den Spuren eintreten. Eine Grenzkurve ist nicht vorhanden, für den Fahrstrahl stehen nur Minima und nicht ein einziges Maximum zur Verfügung. Hat ϱ an einer Stelle seinen kleinsten Wert erreicht, so wird ein ununterbrochenes Zunehmen folgen. Der Prozefs endet daher in Zukunft und Vergangenheit mit dem Verschwinden einer oder zweier Massen im Unendlichen. Die Bedingung für den Übergang der konvexen in die konkave Krümmung ($R = \infty$) ist nach (53; 4) $0 = f' \cos\psi + f \cdot \sin\psi$, in Worten: die Tangente der ϱ-Kurve steht senkrecht zur Tangente des zugeordneten Punktes der f-Kurven; ein Zustand, der nicht dauern kann, es sei denn $\sin\psi = 0$ und $f' = 0$. Das führt auf die pendelnde Bewegung zurück, die auch für andere L-Werte die einzige Möglichkeit eines gleichzeitigen Zusammenfallens der drei Massen zu bieten scheint.

6. Die parabolische Form. Hat die Energiekonstante L den besonderen Wert Null, so wird nach (51) die resultierende Geschwindigkeit von P im Unendlichen auch $= 0$, wie bei zwei Körpern im freien System. —

Aus der zweiten Gleichung (53) verschwindet mit L das Glied, welches den Fahrstrahl ϱ enthält, es bleibt:

$$(54) \qquad f \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (2\psi' + 1) - f' = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{d}{d\varphi}(f \cdot \cos^2\psi)}{f \cdot \cos^2\psi} - \operatorname{tg}\psi = 0$$

eine Gleichung die aufser der unabhängigen Variablen φ nur noch eine abhängige Variable ψ enthält. Wenn diese Gleichung aufgelöst werden kann, so ergibt sich der Fluxionswinkel ψ als Funktion des Winkels φ. Die Beziehung $\frac{\varrho'}{\varrho} = \operatorname{ctg}\psi$ wird dann integrabel und führt zur Gleichung der Bahnlinie in Polarkoordinaten. Aus (51) erhält man für die Winkelgeschwindigkeit des Fahrstrahls

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{f}{\varrho\,(\varrho'^2 + \varrho^2)},$$

womit nach Einsetzung der für ϱ und ϱ' gefundenen Werte durch Trennung der Variablen die Integration der Zeit ermöglicht wird.

Setzt man in (54) $\sqrt{f}\cos\psi = y$, wo nach der Bedeutung des Winkels ψ zu wachsendem ϱ ein positives, zu abnehmendem ϱ ein negatives y gehört, so wird $\operatorname{tg}^2\psi = \frac{f - y^2}{y^2}$ und nach (54):

$$(55) \qquad 2\,y' = \pm\sqrt{f - y^2}; \quad 4\,y'^2 + y^2 = f.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wird noch $y^2 = z$ eingeführt, wo z stets positiv ist, so entsteht, nach Multiplikation mit y^2:

$$z'^2 + z^2 = f \cdot z. \tag{56}$$

Die partikulare Lösung, dafs dauernd $z = 0$ sei, ist durch den Multiplikator hineingetragen und daher nebensächlich.

Wählt man endlich $\xi = \operatorname{ctg} \psi$ als unabhängige Variable, so nimmt die Differentialgleichung die Form an:

$$2\,\xi' - (1 + \xi^2) \cdot \left(1 - \frac{f'}{f}\,\xi\right) = 0 \tag{57}$$

die sich schon früher als partikulare Lösung der allgemeinen ξ-Gleichung (35) ergeben hat. Zwischen ξ und y ergibt sich die Beziehung $y^2 = \frac{f\xi^2}{1 + \xi^2}$; der partikularen Lösung $\xi^2 + 1 = 0$; $\xi = \pm i$ entspricht $y = \infty$.

Die Bewegung des Punktes P in der Ebene E ist als Abbildung der gegenseitigen Lagenänderung der drei Massenpunkte von der Zeit eindeutig abhängig. Jedem Bewegungszustand von P (Lage, Richtung, Geschwindigkeit) entspicht, ebenfalls eindeutig, ein Wert von ψ, y oder z. Man kann daher statt der ϱ-Kurve auch eine y-Kurve oder eine z-Kurve der Untersuchung zu Grunde legen. Am besten geeignet erscheint die z-Kurve, weil z die Dimension von f hat. Der Vollständigkeit wegen mögen einige Angaben über die z-Kurven Platz finden, wenn auch bei weiterer Behandlung der parabolischen Form das Hauptaugenmerk auf die Frage zu richten sein würde, wie weit eine der Gleichungen (54) bis (57) der mathematischen Lösung entgegengeführt werden kann.

Der Verlauf der z-Kurven läfst sich, wenn man den nötigen Aufwand von Rechnung nicht scheut, vollkommen genau feststellen, da jetzt Gleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variablen vorliegen, während die bisherigen Ergebnisse über die ϱ-Kurven aus Gleichungen mit drei Variablen oder aus Gleichungen zweiter Ordnung hergeleitet werden mufsten. Die Unterlagen sind, mit Hinzufügung des nach (35a) zu berechnenden Krümmungsradius R_1:

$$z = f \cdot \cos^2 \psi; \quad z' = \pm \sqrt{z\,(f - z)}; \quad R_1 = \frac{2\sqrt{zf}}{3 \mp \dfrac{f'\sqrt{z}}{f\sqrt{f - z}}}$$

z darf nicht gröfser als f werden, damit z' reell bleibt. Die z-Kurven treten nicht in den von der f-Kurve begrenzten Teil des Sektors ein. In der f-Kurve als Grenze ($z = f$) ist $R_1 = 0$; $z' = 0$; $\cos \psi = \pm 1$. Die z-Kurven haben an der Grenze einen Umkehrpunkt, sie stofsen gegen die f-Kurve in einer Richtung, die zum Fahrstrahl senkrecht steht, und zwar geschieht das, wenn der Punkt P sich für einen Augenblick in der Richtung des Fahrstrahls bewegt, (Umkehr zur Spur, gröfste Elongation des Partialprozesses.) Stöfst P senkrecht gegen die Spur S_ζ, so wird $\psi = \frac{\pi}{2}$, $f = \infty$, $\delta_\zeta = \varphi$ und für $z = \cos^2 \psi : \frac{1}{f} = \frac{0}{0} = -2 \cos \psi \sin \psi \cdot \psi' : -\frac{f'}{f^2}$ ergibt sich nach Einsetzung der wirksamen Teile von f und f' (52) der Wert $z = 0$, d.h. die z-Kurve schwingt während des Ablaufs eines jeden Partialprozesses vom Ursprung gegen die f-Kurve und wieder zurück.

Das Doppelzeichen von z', welches auch in R_1 auftritt, erklärt sich daraus, dafs in jedem Sektor zu jedem Wert von f mit Ausnahme von f_{min} zwei Winkel φ gehören; die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

entsprechenden Fahrstrahlen liegen rechts und links von dem durch f_{min} gelegten Hauptstrahl. Die Gleichungen können nicht entscheiden, welcher von beiden Winkeln gemeint ist, und behelfen sich daher mit dem Doppelzeichen. Auf dem Wege zwischen f-Kurve und Ursprung kann z' aus Gründen der Stetigkeit sein Vorzeichen nicht ändern; der Quotient $\frac{f'}{f}$ ist bei wachsendem φ vor dem Hauptstrahl negativ, hinter dem Hauptstrahl positiv. Setzen nun, wie wir sahen, die z-Kurven, von der f-Kurve ausgehend, mit Krümmungen ein, die dem Hauptstrahl ihre konkave Seite zuwenden, so erkennt man leicht, dafs zum unteren Zeichen in R_1 positive Werte von $\frac{f'}{f'}$, zum oberen negative gehören. Es folgt, dafs R_1 unterwegs nicht ∞ werden kann, d. h. sämtliche z-Kurven verlaufen konkav zum Hauptstrahl.

Der Punkt, in dem der Hauptstrahl die f-Kurve in ihrem Minimum schneidet, nimmt eine Ausnahmestellung ein; hier ist $z' = 0$ bei endlichem R_1. In jedem parabolischen Prozefs wird die z-Kurve diesen Punkt einmal passieren, ohne Umkehr und unter Berührung der f-Kurve, so dafs in ihm eine unendliche Anzahl einzelner möglicher z-Schwingungen zusammengebunden erscheint. Der Punkt P wird diesmal nicht zur alten Spur zurückkehren, sondern im Hauptstrahl einen Augenblick ruhen, dann sich der anderen Spur des Sektors zuwenden und die Rückwärtsbewegung antreten, die sich in einer Reihe entsprechender, scharfspitziger Schwingungen der z-Kurve auf der anderen Seite des Hauptstrahls abspiegeln wird. Das Passieren des genannten Ausnahmepunktes bietet die einzige Möglichkeit für die mittlere der drei Massen, in den überwiegenden Einflufs der störenden Masse überzugehen. Auch erkennt man als ein besonderes Merkmal der parabolischen Form, dafs nur ein einmaliger Spurenwechsel stattfindet. Die mittlere Masse m_2 gibt schon nach dem ersten Zusammentreffen mit der neuen Masse m_3 ihre bisherige elliptische Verbindung mit m_1 auf und gerät in Abhängigkeit von m_3, während m_1 sich zurückzieht.

Die parabolischen Bewegungsprozesse sind nicht alle genau von derselben Art, was einleuchtet, da die noch fehlenden Integrationskonstanten durch ihre verschiedenen Werte das Bild der gültigen z-Kurven und im Anschlufs daran das der ϱ-Kurven variieren können. Insbesondere wird die innerste Schwingung, die ohne scharfe Spitze die f-Kurve berührt und den Übergang von Spur zu Spur vermittelt, bald mehr, bald weniger dickbäuchig sich darstellen.

In einem Falle, der pendelnden Bewegung, kann sie sogar sprungweise zu einem Punkt, dem Ausnahmepunkt, sich zusammenziehen, wenn für $\frac{d\varphi}{df} = 0$ dauernd $\cos^2 \psi = 1$; $z = f$; $z' = 0$ wird.

Jede linear-parabolische Bewegung der Massen m_1, m_2, m_3 besteht nach dem Gesagten aus zwei Teilen; in dem einen Teil werden die Partialprozesse von m_1 und m_2 durch m_3, im anderen Teile die Partialprozesse von m_2 und m_3 durch m_1 gestört. Gehen wir von der Mitte aus, so finden wir auf jeder Seite unendlich viel einzelne Partialprozesse, ehe die störende Masse ganz wirkungslos geworden ist. Ebenso grofs ist die Anzahl der spitzen Blätter in der Figur der z-Kurve. Wenn die allgemeine Lösung der z-Gleichung (56) vorläge, etwa in der Form $z = F(\varphi, k_1)$, so würde jedem Wert der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Konstante k_1 eine besondere Spielart der z-Kurvenfigur entsprechen. Alle Spielarten aber stimmen in der Reihenfolge der Intervalle überein. Im Mittelintervall, zu beiden Seiten des Hauptstrahls von dem Ausnahmepunkt bis zu den ersten Blattspitzen gehört zu jedem Winkel φ nur ein z-Wert. Daran schliefsen sich auf beiden Seiten Intervalle mit 3, dann mit 5, 7 . . . z-Werten für jeden Winkel φ.

IX.

Über die Lösbarkeit der parabolischen Form.

Die parabolische Form des linearen Dreikörperproblems ist auf die Auflösung einer der Differentialgleichungen (54) bis (57) zurückgeführt. Wir halten Umschau unter der mathematischen Verwandtschaft der Gleichungen, um zu ermitteln, welche Hilfe die reine Mathematik unserem Problem gewährt, und welche Rückwirkungen eine etwaige Lösung auf rein mathematische Untersuchungen ausüben würde. Es ist bekannt, dafs in der heutigen Wissenschaft nicht mehr die Auflösung, sondern die Theorie der Differentialgleichungen gepflegt wird. Die Wissenschaft sieht ihre Hauptaufgabe nicht mehr in der Gewinnung von Resultaten, wie es noch Euler in jener glücklichen Zeit tat, als auf dem neuerschlossenen Gebiet der Infinitesimalrechnung die erste, reiche Ernte gehalten wurde, sie erforscht vielmehr die Eigenschaften der Differentialgleichungen, die Bedingungen für das Vorhandensein allgemeiner Integrale, die Beziehungen der partikularen Lösungen unter sich und zur Hauptlösung, selbst da, wo man die Lösungen nicht genau kennt. Selbstverständlich steht die Theorie auf arithmetischem Boden, sie betrachtet ebenso selbstverständlich und unvermeidlich ihre Variablen als komplexe Zahlen und schreibt der Ebene, in welcher diese Variablen untergebracht werden, Eigenschaften zu, die mit den Eigenschaften natürlicher Flächen in krassem Widerspruch stehen. Das ist ihr gutes Recht, denn die reine Gröfsenlehre mufs, unabhängig von Raum und Zeit, sich selbst das Gesetz geben; es liegt aber auch nichts Wunderbares darin, dafs die bei solchem Vorgehen gewonnenen Sätze rein theoretisch bleiben und auf natürliche Vorgänge nicht recht passen wollen.

Die Auffindung allgemeiner Lösungen behält freilich, wenn sie gelingt, ihren grofsen Wert; aber eben hier, wo wir Hilfe suchen, sind die Ergebnisse der mathematischen Forschung, ehrlich gestanden, recht dürftig. In der Tat kann man, von zahlreichen oft stark gekünstelten Sonderfällen abgesehen und in voller Allgemeinheit, nur die lineare Gleichung erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} + Ay + B = 0 \tag{58}$$

auflösen (Bernouilli), in der A und B bekannte aber unbestimmte Funktionen der Unabhängigen x sind.

Ist $A = 0$, so stellt (58) die Gesamtheit aller Differentialgleichungen erster Ordnung vor, bei denen von vorn herein die Trennung der Variablen möglich ist, nötigenfalls nach Einführung einer neuen Abhängigen für die von x freie Gruppe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf