VII.

Kubische Fernwirkung.

Die Annahme, dafs die drei Massen sich gegenseitig mit Kräften anziehen, die der dritten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional sind ($n=3$), verdient eine besondere Berücksichtigung, weil sie mit einer auffallenden Vereinfachung der Gleichungen verbunden ist.

Dieser Sonderfall der linearen Gravitation hat vor Jahren eine Bearbeitung gefunden (Rudio, „Über die Bewegung dreier Punkte in einer Geraden" in Crelle's Journal Bd. 100, S. 442—446), die an einen Satz Jacobi's anknüpft und auf rein mathemathischem Standpunkt steht. Wer die zitierte Arbeit mit der vorliegenden Entwicklung vergleichen will, wird erkennen, dafs durch Anlehnung an den natürlichen Vorgang die Aufgabe erleichtert wird. Die Resultate stimmen in Folge eines Versehens nicht überein. Weil hier Genauigkeit geboten ist, sei bemerkt, dafs in der letzten Formel auf S. 445 a. a. O. bei dem eingeklammerten Ausdruck $(ht^2+2h't+h'')$ der Exponent 2 fortgeblieben ist, so dafs das Schlufsintegral der Zeit in eine falsche Kategorie gerät. Eine Verifikation, welche den Fehler gezeigt haben würde, ist unterblieben, ebenso eine Diskussion der Resultate, die auch schwer angängig sein würde, weil die kinematische Tragweite der einzelnen Operationen nicht erkennbar wird. Es wird nur angegeben und bewiesen, die Konstante h, welche die Energiekonstante vertritt, müsse positiv sein, während sie zweifellos auch negativ oder Null sein kann. Eine eingehendere Untersuchung würde gezeigt haben, dafs die Unzulässigkeit dieses Scheinbeweises eine Inkongruenz zwischen Rechnung und Natur aufdeckt. Es ist dasselbe Mifsgeschick, welches den braven Achilles bei seinem berühmten Wettlauf mit der Schildkröte hinderte, über einen gewissen Punkt hinauszukommen, weil er sich nicht nach der wahren Zeit, sondern nach einer variablen Rechnungsgröfse richten sollte, die sich in der wahren Zeit totläuft.

Die erwähnte Vereinfachung der Gleichungen besteht darin, dafs man für $n=3$ aus den beiden Gleichungen (29a) die Gröfsen $\frac{d\varphi}{dt}$ und $f(\varphi)$ zusammen eliminieren kann, es entsteht mit zweimaliger Integration:

$$\frac{d^2(\varrho^2)}{dt^2}=2L;\quad \frac{d(\varrho^2)}{dt}=2Lt+C_1;\quad \varrho^2=Lt^2+C_1t+C_0 \tag{48}$$

wo C_1 und C_0 Konstanten sind, die durch die Anfangswerte von $\frac{d\varrho}{dt}$ und ϱ bestimmt werden. Auffallend ist, dafs man hier eine lösbare Gleichung zwischen dem Fahrstrahl ϱ und der Zeit t erhält, noch ohne Kenntnis der Bahnlinie, die der Punkt P in der Ebene E beschreibt, während in anderen Fällen die Bestimmung der Bahnlinie vorangeht, und die Integration der Zeit den Schlufs macht.

Die Konstante L ist durch Gleichung (22) in die Rechnung eingeführt und tritt als Differenz auf, in welcher der Minuendus die aktuelle Energie, der Subtrahendus die potentielle Energie darstellt. Durch geeignete Wahl der Anfangsdaten kann man dem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Minuendus und dem Subtrahendus jeden absoluten Wert beilegen, so dafs L jeden reellen Wert $>, =, < 0$ haben kann.

Fällt in (48) $L = 0$ und $C_1 = 0$ aus, so beschreibt der Punkt P die schon besprochene kreisförmige Bahn (V, 2). Für $L = 0$, aber $C_1 \gtrless 0$ kann der Anfangspunkt der Zeitmessung so gewählt werden, dafs $C_0 = 0$ wird. Ist $L \gtrless 0$, so kann durch dieselbe Mafsregel $C_1 = 0$ gemacht werden.

Bezieht man, um einen vorläufigen Überblick zu gewinnen, die dritte Gleichung (48) auf eine t-Achse und eine senkrecht dazu stehende ϱ-Achse, so ist ihr geometrisches Äquivalent für $L = 0$, $C_1 = 0$ ein zur t-Achse paralleles Linienpaar; für $L = 0$, $C_1 \gtrless 0$ eine Parabel; für $L < 0$ und $C_1 = 0$ eine Ellipse, wobei stets $C > 0$ ausfällt; für $L > 0$ und $C_1 = 0$ ein Paar zugeordneter Hyperbeln ($C_0 \gtrless 0$), die für $C_0 = 0$ in die Asymptoten übergehen.

Die wahre Zeit, als Prinzip der Realität alles Geschehenden, nimmt mit Notwendigkeit nach einander alle reellen Werte an (‚tempus verum aequabiliter fluit', Newton), die drei Massen können aus der Welt nicht verschwinden, die Gröfse ϱ kann zunehmen und abnehmen, mufs aber nach Definition positiv und reell sein. Nun sind in (48) für alle Formen, auch für positive L, Werte von t auffindbar, denen ein reeller, positiver ϱ-Wert nicht entspricht. Die Gültigkeit der Gleichungen ist daher an bestimmte Intervalle der Variablen t gebunden, und zwar ist in unserem Falle die Grenze der zulässigen t-Werte bezeichnet durch $\varrho = 0$, d. h. durch den Zusammensturz der drei Massen. Soll der Prozefs über die Zeitgrenze hinaus fortgeführt werden, so mufs eine besondere Untersuchung über eine vorzunehmende Neuordnung der Konstanten entscheiden, die freilich oft nur in einer Vorzeichenänderung bestehen wird.

Um eine Bestimmung für den Winkel φ zu bekommen, setzen wir den aus der zweiten und dritten Gleichung (48) hervorgehenden Wert

$$\frac{d\varrho}{dt} = \pm \frac{2\,Lt + C_1}{2\sqrt{Lt^2 + C_1 t + C_0}}$$

in die zweite Gleichung (29a) ein und finden nach Ordnung und Trennung der Variablen:

$$(49)\quad \frac{dt}{Lt^2 + C_1 t + C_0} = \pm \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{4\,LC_0 - C_1^2 + 2\,f}}; \quad f = \frac{\mu_1}{\sin^2(\delta_\xi - \varphi)} + \frac{\mu_2}{\sin^2(\delta_\eta - \varphi)} + \frac{\mu_3}{\sin^2(\delta_\zeta - \varphi)}$$

Bei der Ausführung der Integration ergibt sich neben L, C_1, C_0 die letzte der zu erwartenden vier Konstanten.

Die Bewegungen der drei Körper für kubische Gravitation sind hierdurch auf Quadraturen und somit auf rein mathematische Aufgaben zurückgeführt. Dabei ist jedoch zu beachten, dafs in der Natur die Gleichungen nur gelten vom Anfangszustand an bis zum nächsten Zusammenstofs zweier Massen in der Zukunft und in der Vergangenheit, mit anderen Worten für die Bewegung des Punktes P von Spur zu Spur. In mathematischer Fortsetzung des Prozesses kann, wie früher erörtert, beim Eintritt des Punktes P in eine Spur Durchdringung oder Umkehr der Massen eintreten; die Umkehr hat den Vorzug, dafs sie als Grenzfall einer ebenen Bewegung mit sehr kleiner Seitenkomponente aufgefafst werden kann. In (49) wird beim Zusammenstofs zweier Massen $f = \infty$, der Vorzeichenwechsel von $+d\varphi$ nach $-d\varphi$, der bei der Umkehr nötig ist, ge-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schieht daher sprungweise $\left(\frac{d\varphi}{dt} = \pm\infty\right)$. — Die Leichtigkeit der Auflösung für $n = 3$ drückt sich darin aus, dafs die Integratiou des Fahrstrahls (48) über alle partiellen Zusammenstöfse je zweier Massen glatt hinweggeht.

1. Die kreisförmige Bewegung des Punktes P, bei der

$$L = 0;\ C_1 = 0;\ \varrho^2 = C_0;\ \frac{dt}{C_0} = \pm\frac{\sqrt{2}\cdot d\varphi}{\sqrt{f}}$$

wird, beschränkt sich, wenn nach jedem Zusammenstofs zweier Massen Umkehr erfolgt, auf eine hin und her gehende Schwingung in einem Kreisbogen, der einen Sektor füllt. Dabei ist die Geschwindigkeit an den beiden Enden des Kreisbogens am gröfsten. Die drei Körper fallen niemals in einem Punkt zusammen, auch kann kein Körper im Unendlichen verschwinden. Den Vorgang hat man sich so vorzustellen, dafs die mittlere Masse beim Hin- und Herschwingen die beiden äufseren abwechselnd zur Umkehr nötigt. Diese Form der Bewegung kann für beliebige Massen m_1, m_2, m_3 und beliebige Anfangsstellung durch zweckdienliche Feststellung der Anfangswerte der Geschwindigkeiten $x_{32}' = \frac{dx_{32}}{dt}$ etc. inszeniert werden. Die Bestimmungsgleichungen sind:

$$x_{32}' + x_{13}' + x_{21}' = 0$$

$$\frac{x_{32}'^2}{m_1} + \frac{x_{13}'^2}{m_2} + \frac{x_{21}'^2}{m_3} = \frac{M}{m_1 m_2 m_3}\left(\frac{m_2 m_3}{x_{32}^2} + \frac{m_3 m_1}{x_{13}^2} + \frac{m_1 m_2}{x_{21}^2}\right)$$

$$\frac{d\varrho^2}{dt} = \frac{2\,x_{32}\,x_{32}'}{m_1} + \frac{2\,x_{13}\,x_{13}'}{m_2} + \frac{2\,x_{21}\,x_{21}'}{m_3} = 0.$$

2. Die elliptische Form. L sei negativ, der Zeitanfang so gewählt, dafs $C_1 = 0$ wird wird. Aus (48) folgt $\varrho^2 = Lt^2 + C_0$, d. h. C_0 ist positiv. Der Fahrstrahl ϱ erreicht einen Maximalwert $\varrho_{max} = \sqrt{C_0}$ für $t = 0$; die drei Massen bleiben im Endlichen. Für zwei Zeitwerte wird $\varrho = 0$, nämlich für $t = \pm\sqrt{\frac{C_0}{-L}}$, von denen der eine in der Zukunft, der andere in der Vergangenheit liegt. Die beiden Zeitwerte bezeichnen die Grenzen des Bewegungsprozesses, dessen Gesamtdauer daher $2\sqrt{\frac{C_0}{-L}}$ beträgt. Der Prozefs endet mit dem gleichzeitigen Zusammensturz der drei Massen, die auch früher schon einmal in einem Punkte zusammenlagen und durch unendlich grofse Geschwindigkeiten auseinandergesprengt wurden. (Asteroiden als Bruchstücke eines explodierenden Planeten). Auch über die Zeitgrenze hinaus kann man den Formelapparat durch die Annahme retten, dafs auf den Zusammenstofs sofort eine neue Explosion folgt, nach der die einzelnen Phasen der Bewegung sich in umgekehrter Reihenfolge wiederholen. Bei Durchdringung der Massen tritt der Punkt P in den Scheitelsektor, bei Umkehr geht er in den ursprünglichen Sektor zurück. Zur Erklärung seines unentschiedenen Verhaltens kann man anführen, dafs in den Differentialgleichungen (19), die den Ausgangspunkt der mathematischen Schlufsfolgerungen bilden, die unabhängige Variable t nur in der Form dt^2 vorkommt, dafs also der Prozefs genau in derselben Weise verlaufen würde, wenn man die Rechnungszeit t von Anfang an rückwärts laufen liefse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Änderungen der Gröfse ϱ beziehen sich gewissermafsen auf das äufsere Schicksal des Gesamtsystems der drei gravitierenden Massen. Dagegen gibt die Gleichung (49)

$$\frac{dt}{Lt^2 + C_0} = \pm \frac{\sqrt{2}\, d\varphi}{\sqrt{2\, L C_0 + f}} \tag{50}$$

Aufschlufs über die inneren Verhältnisse des Systems. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist das Minimum der Funktion f so grofs, dafs der Radikand $2 L C_0 + f$ für alle φ-Werte des Sektors positiv bleibt, so kann ein Zeichenwechsel von $\frac{d\varphi}{dt}$ innerhalb des Sektors nicht eintreten. Die mittlere Masse wird dann zwischen den beiden äufseren hin- und herschwingen wie bei der Kreisform 1), bald gegen den linken, bald gegen den rechten Nachbar sich wendend. In der Phase der wachsenden ϱ-Werte zeigt sich die Mittelmasse kräftiger als ihre Gegner und treibt den Punkt P in zickzackförmigen Schwingungen vom Durchschnittspunkt der Spuren zurück. Nach Überschreitung von ϱ_{max} gewinnen die äufseren Massen die Oberhand, der Punkt P wird nach dem Spurenanfang gezogen, die mittlere Masse wird zu immer schnelleren und kürzeren Schwingungen angetrieben, die Schwingungszahl wächst bis ins Unendliche, wenn in (50) der Nenner der linken Seite Null wird, d. h. wenn der Zusammenstofs der drei Massen erfolgt.

Ist das Minimum von f kleiner als der absolute Wert von $2 L C_0$, so wird schon an einer Stelle innerhalb des Sektors der Radikand Null und damit auch $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ als Übergang zum Zeichenwechsel. Der Punkt P wird jetzt zykloidenähnliche Blätter beschreiben, die der einen Spur angewachsen sind und sämtlich bis an den durch $2 L C_0 + f = 0$ bestimmten Strahl reichen. Die mittlere Masse erscheint als Trabant der einen Aufsenmasse und bleibt in dieser Abhängigkeit, bis sie beim Herrannahen der dritten Masse unter immer schnelleren Schwingungen in den gemeinsamen Zusammensturz hineingezogen wird.

Die Rolle der mittleren Masse kann hier, wie bei allen linearen Prozessen dreier Körper, dahin charakterisiert werden, dafs sie entweder als Zentralkörper, wenn zwei verschiedene Spuren nach einander in Anspruch genommen werden, oder als Trabant auftritt, wenn dieselbe Spur zweimal nach einander an die Reihe kommt. Auf die Gröfse der Massen kommt es dabei nicht an, auch sonst sind die Bezeichnungen, die nur der Kürze des Ausdrucks dienen, mit den Verhältnissen im Sonnensystem nicht genau in Vergleich zu stellen. Es zeigt sich bei dieser Auffassung, dafs für $n = 3$ die Mittelmasse entweder dauernd als Zentralkörper oder dauernd als Trabant auftritt. Ein Übergang findet in dem ganz besonderen Falle statt, dafs der mit dem Radius $-2 L C_0$ geschlagene Kreis die F-Kurve berührt. Dann kann der Punkt P bis an den zu $f' = 0$ gehörigen Strahl, den Hauptstrahl des Sektors, heranschwingen. Zu einer vollständigen Berührung zwischen Bahnlinie und Hauptstrahl kann es aber erst am Schlufs der Prozesses, d. h. im Spurenanfang kommen, weil sonst die Vorbedingungen für die besprochene pendelnde Bewegung gegeben wären.

3. Die parabolische Form, $L = 0$, $C_1 \gtrless 0$, $C_0 = 0$; $\varrho^2 = C_1 t$, hat nur einen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zulässigen Zeitwert $t = 0$ für den Zusammenstofs der drei Massen, und zwar bedeutet dieser Zeitwert für positive C_1 den Anfang, für negative C_1 das Ende des Prozesses. Im ersteren Falle wächst ϱ mit der Zeit ins Unendliche. Die Bewegung endet mit dem Verschwinden einer Masse aus dem Bereich merklicher Kraftäufserung. Dabei wird $\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{f}}$ immer kleiner und nimmt in unendlicher Ferne den Wert 0 an.

4. Die hyperbolische Form $L > 0$; $C_1 = 0$; $\varrho^2 = Lt^2 + C_0$. Die Annahme $C_1 = 0$ besagt nach der zweiten Gleichung (48), dafs dem gegebenen Anfangszustand der Zeitwert $t_0 = \frac{\varrho}{L}\frac{d\varrho}{dt}$ zugewiesen werden soll. Demnach ist C_0 zu bestimmen aus $C_0 = \varrho^2 - \frac{\varrho^2}{L}\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2$, wo rechts die Daten des Anfangszustandes einzusetzen sind, und es folgt, dafs $C_0 >, =, < 0$ sein kann.

Ist C_0 negativ, so ergeben sich für $\varrho = 0$ zwei Zeitwerte $t = \pm\sqrt{-\frac{C_0}{L}}$, die aber nicht demselben Prozefs angehören können, da sie durch Zeitwerte, z. B. $t = 0$ getrennt sind, denen kein reeller ϱ-Wert zukommt. Das Pluszeichen gilt, wenn auch t_0 positiv ausfällt, wenn also der gegebene Zustand wachsenden ϱ-Wert hat, und umgekehrt.

Ist $C_0 = 0$, so tritt das Zusammenfallen der drei Massen zur Zeit $t = 0$ ein, und es wird vom Vorzeichen von t_0 abhängen, ob dieses Ereignis der Vergangenheit oder der Zukunft angehört.

Für positive Werte von C_0 bleibt ϱ stets reell. Das Minimum $\varrho_{min} = \sqrt{C_0}$ tritt für $t = 0$ ein. In diesem Falle, der den hyperbolischen Charakter am klarsten hervortreten läfst, ist der Radikandus der Gleichung (50) stets gröfser als Null. Der Punkt P wird seine Schwingungen über die ganze Breite des Sektors ausdehnen; die mittlere Masse wird nur als Zentralkörper auftreten. Sie wird den äufseren Massen, die aus der Unendlichkeit herbeieilen, abwechselnd entgegentreten und ihren Lauf zu hemmen suchen. Im ersten Teil des Prozesses werden die Aufsenmassen siegreich sein, die Schwingungen des Punktes P werden sich mehr und mehr dem Kreuzungspunkt der Spuren nähern, bis zur Zeit $t = 0$ das Minimum von ϱ erreicht wird. Im darauf folgenden zweiten Teil wird die Mittelmasse bei jedem Zusammentreffen die äufseren Massen weiter zurückdrängen und sie schliefslich wieder bis in unendliche Entfernung vertreiben.

Die mittlere Masse verfährt mit den beiden Aufsenmassen, wie bei quadratischer Anziehung die Sonne mit zwei Kometen verfahren würde, die in langgezogenen Bahnen aus entgegengesetzten Richtungen des Weltraums auf den Zentralkörper zusteuern. Die Sonne wird die fremden Gäste freilich schon nach einmaligem Zusammentreffen wieder dahin befördern, wo sie hergekommen sind. Dabei wird sie selbst aber doch einer kleinen Schwingung unterliegen; sie wird jedem Kometen, den sie zurücktreiben will, etwas entgegengehen. Die letzten Rechnungen haben gezeigt, dafs auch eine kleinere Masse dasselbe leisten kann; was ihr an Gröfse abgeht, ersetzt sie durch Wiederholung der Angriffe und durch gröfsere Geschwindigkeit.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf