der drei Massen möglich ist. Die zugehörige Bewegung des Punktes P verläuft für jeden Sektor in dem Strahl, der vom Anfangspunkt durch den nächsten Punkt der f-Kurve gelegt ist. Das Zustandekommen einer solchen einfachen Bewegung setzt natürlich voraus, dafs schon im Anfangszustand die Abstände der drei Massen und auch ihre relativen Geschwindigkeiten sich so zu einander verhalten, wie es die Gleichung (40) oder die Bedingung $f' = 0$ fordern. Geht man von (40) aus, so können der Abstand zweier Massen und ihre relative Geschwindigkeit, z. B. x_{32} und $\frac{dx_{32}}{dt}$ beliebig gewählt werden. Der positive reelle Wert von x müfste durch Annäherung festgestellt werden, dann wird durch $x_{21} = x \cdot x_{32}$ und $\frac{dx_{21}}{dt} = x \frac{dx_{32}}{dt}$ Entfernung und Geschwindigkeit der dritten Masse m_1 bestimmt. Geht man dagegen von (41) aus, so könnte man die f-Kurve konstruieren und die Gröfse des Winkels φ, der dem Minimum $f' = 0$ entspricht, durch ein graphisches Verfahren z. B. mit dem Transporteur feststellen. Dann bleiben ϱ und $\frac{d\varrho}{dt}$ beliebig wählbar; die Abstände der Massen und ihre Geschwindigkeiten ergeben sich aus den Gleichungen (27) und ihren Ableitungen. Beiläufig erhält man dabei auf konstruktivem Wege eine reelle Wurzel der Gleichung fünften Grades (40).

Sind die Anfangsbedingungen für das Zustandekommen der pendelnden Bewegung erfüllt, so entspricht der weitere Verlauf des Prozesses, wie die zweite Gleichung (39) zeigt, der Bewegung zweier gravitierenden Punkte und ist wie diese zu behandeln.

Anmerkung. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs auch für andere n-Werte der Fall $\operatorname{tg}\psi = 0$ zulässig ist, wenn nur in jedem Sektor die f-Kurve ein Minimum oder Maximum hat. Die beliebige Anfangsstellung der Massen für $n = -1$ entspricht der kreisförmigen f-Kurve dieses Beispiels, die der Bewegungsrichtung des Punktes P nichts vorschreibt.

5. Die Annahme $\psi' + 1 = 0$; $\psi + \varphi = \text{const.}$ verleiht dem Punkte P eine geradlinige Bahn. Aus (33) folgt $f \operatorname{tg}(\text{const} - \varphi) \cdot (n - 1) + f' = 0$, d. h. der Winkel φ hat einen konstanten Wert, was wieder auf $\operatorname{tg}\psi = 0$ zurückgeht. Die besprochene pendelnde Bewegung ist daher der einzige Fall, in dem die Bewegung von P geradlinig wird. Ist nur für einen Augenblick $\psi' + 1 = 0$, $R = \infty$, so geht die konkave Krümmung in die konvexe über.

VI.

Zwischensatz. Konstruktive Auflösung einer Gruppe von Gleichungen fünften Grades.

Die Untersuchung über die pendelnde Bewegung dreier nach Newton's Hypothese gravitierenden Massen reizt zu einer Abschweifung auf arithmetisches Gebiet. Es hat sich eine Gleichung fünften Grades von besonderer Struktur (40) ergeben, deren Lösung durch geometrische Konstruktion und Messung gefunden werden kann. Man könnte nun versuchen, die Grundlagen des Bewegungsprozesses zu verallgemeinern, um die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gleichungen fünften Grades in weiterem Umfange heranzuziehen. Ein Mittel zum Zweck besteht darin, dafs man unter den drei Massen gewissermafsen qualitative Unterschiede zuläfst, mit anderen Worten, dafs man dem Gravitationsfaktor für jedes Massenpaar einen eigenen Wert beilegt. Es werde die Anziehung zwischen m_2 und m_3 mit $G_1 \frac{m_2 m_3}{\varrho_{32}^2}$, zwischen m_3 und m_1 mit $G_2 \frac{m_3 m_1}{\varrho_{13}^2}$, zwischen m_1 und m_2 mit $G_3 \frac{m_1 m_2}{\varrho_{21}^2}$ bezeichnet, wo wir uns die Verfügung über G_1, G_2, G_3 vorbehalten. Das Prinzip von der Gleichheit der Aktion und Reaktion ist gewahrt, die Kräfte wirken zentral und sind konservativ, die allgemeinen Integrale sind daher gesichert. An die Stelle der Gleichungen (18b) und (19) treten:

$$x_1'' = \frac{G_3 m_2 x_{21}}{\varrho_{21}^3} - \frac{G_2 m_3 x_{13}}{\varrho_{13}^3}; \quad x_{32}'' = -\frac{G_1 M x_{32}}{\varrho_{32}^2} + m_1 \left(\frac{G_1 x_{32}}{\varrho_{32}^3} + \frac{G_2 x_{13}}{\varrho_{13}^3} + \frac{G_3 x_{21}}{\varrho_{21}^3} \right)$$

und zwei entsprechende durch zyklische Massenvertauschung. Die Umformungen des Abschnittes IV bleiben gültig, nur treten in der Funktion $f(\varphi)$ neben den Gröfsen μ_1, μ_2, μ_3 jetzt die Faktoren G_1, G_2, G_3 auf, so dafs für $n = 2$ und die Reihenfolge m_1, m_2, m_3 jetzt zu setzen ist:

$$f = \frac{\mu_1 G_1}{\sin(\delta_\xi - \varphi)} - \frac{\mu_2 G_2}{\sin(\delta_\eta - \varphi)} + \frac{\mu_3 G_3}{\sin(\delta_\zeta - \varphi)}.$$

Dementsprechend sind bei der Konstruktion der f-Kurve die asymptotischen Parallelen in Abständen von $2\mu_1 G_1$, $2\mu_2 G_2$, $2\mu_3 G_3$ anzuordnen. In (39a) treten ebenfalls die Faktoren G_1, G_2, G_3 ein, und für (40) erhält man:

$$\begin{aligned} 0 = &- x^5 G_1 (m_2 + m_3) - x^4 G_1 (2 m_2 + 3 m_3) - x^3 \left(G_1 (m_2 + 3 m_3) + G_2 m_1 - G_3 m_1\right) \\ &+ x^2 \left(G_3 (m_2 + 3 m_1) + G_2 m_3 - G_1 m_3\right) + x G_3 (2 m_2 + 3 m_1) + G_3 (m_2 + m_1). \end{aligned} \tag{46}$$

Bildet man $f' = 0$ und rechnet, wie bei (41) angegeben, so zeigt sich auch hier Übereinstimmung, der zweite Faktor unterscheidet sich von (46) nur durch das Vorzeichen von G_2. Der Vergleich mit der Gleichung fünften Grades:

$$x^5 + a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e = 0 \tag{47}$$

führt, durch Elimination von x^5, zu fünf Kongruenzbedingungen. Eine m-Gröfse und eine G-Gröfse bleiben unbestimmt, was auf die Gestalt der f-Kurve keinen Einflufs hat, die übrigen m_i und G_i sind leicht zu berechnen. Unter den Koeffizienten der Gleichung fünften Grades ergibt sich nur eine Bedingung:

$$\begin{aligned} 0 = &\, a^2 (3d - 8e) + a(-12d + 31e) + 12d - 30e + d^2 (3a - 8) + de(-12a + 31) \\ &+ e^2 (12a - 30) - b(a - 2) \cdot (d - 3e) - c(d - 2e)(a - 3) \end{aligned} \tag{47a}$$

während (40) deren drei ergeben würde. Genügen die Koeffizienten einer Gleichung fünften Grades (47) der Bedingung (47a), so hat eine reelle Wurzel den Wert $x = \frac{x_{21}}{x_{32}}$, wo x_{21} und x_{32} aus (27) zu entnehmen sind, und der zum Winkel φ gehörende Fahrstrahl durch das Minimum der f-Kurve zu legen ist. — Bei noch reicherer Ausstattung des Prozesses (Zusatzbeschleunigungen) scheint dieselbe Behandlungsweise auf alle Gleichungen fünften Grades ausdehnbar zu sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf