(32) würde dasselbe direkt leisten. Aus (31) würde sich ergeben $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = F(\varphi)$; $t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} + \text{const.}$, wo nunmehr $F(\varphi)$ bekannt wäre. Durch ein Umkehrungsverfahren müfste man φ und damit auch ϱ als Funktionen der Zeit darstellen. Endlich würden die Gleichungen (27) die Abstände der Massen für beliebige Zeitpunkte ergeben. Die Aufsuchung der unbestimmten Integrale und der Ermittelung eines geeigneten Umkehrungsverfahrens können freilich noch erhebliche Schwierigkeiten bieten; es ist denkbar, dafs die gebräuchlichen Funktionen garnicht dazu ausreichen, dafs es notwendig wird, neue zweckentsprechende Funktionen zu ersinnen. Das sind aber rein mathematische Angelegenheiten, das mechanische Problem ist mit der Trennung der Variablen gelöst.

V.

Besondere Annahmen über den Anfangszustand. Pendelnde Bewegungen.

Die Bewegungen der drei gravitierenden Massen können unter Umständen aufserordentlich einfache Formen annehmen. In einigen Fällen gelingt sogar die Auflösung für das ebene Problem. Wir betrachten hauptsächlich diejenigen Sonderannahmen des linearen Prozesses, die sich aus den bisherigen Rechnungen als partikulare Lösungen von selbst darbieten.

1. Die Annahme $\varrho = 0$. Die drei Körper fallen gleichzeitig zusammen. In der Natur würde dadurch das Ende des Bewegungsprozesses angezeigt werden; in der Rechnung, wo die Massenpunkte sich gegenseitig durchdringen oder umkehren können, würde für $\varrho = 0$ der Punkt P durch den Anfang der Spurenebene gehen. Dagegen ist es für die Rechnung unstatthaft, die Gleichung $\varrho = 0$ dauernd gelten zu lassen. Dann würden die Massen zusammen bleiben, was in der Natur sehr wohl möglich ist; die Differentialgleichungen würden aber die unbestimmte Form $\infty - \infty$ annehmen und gegenstandslos werden.

2. Die Annahme $\frac{d\varrho}{dt} = 0$. Der Fahrstrahl ϱ bekommt einen konstanten Wert, der Punkt P beschreibt eine kreisförmige Bahn, und die Bewegungsgleichungen sind nach (29a):

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{f}{2\varrho^{n-3}} = \frac{f}{(n-1)\varrho^{n-3}} + \frac{L}{\varrho^2}.$$

Ein Bestehen dieser Doppelgleichung ist für beliebige φ-Werte nur möglich, wenn $n = 3$ und $L = 0$ ist. Da die Funktion f nur von φ abhängt, so ist dann die Trennung der Variablen durchführbar (29):

$$f = \frac{\mu_1}{\sin^2(\delta_\xi - \varphi)} + \frac{\mu_2}{\sin^2(\delta_\eta - \varphi)} + \frac{\mu_3}{\sin^2(\delta_\zeta - \varphi)}; \quad dt = \pm \frac{\sqrt{2} \cdot d\varphi}{\sqrt{f}} \tag{37}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die kubische Fernwirkung ist einer allgemeineren Behandlung zugänglich (VII); es genüge daher, schon hier darauf hinzuweisen, wie sehr durch $n = 3$ die Lösung der Aufgabe erleichtert wird. Eine kreisförmige Bahnlinie entsteht nur in dem sehr speziellen Falle, dafs es sich um die parabolische Form ($L = 0$) des linearen Dreikörperproblems für reziproke Anziehung dritten Grades handelt, und auch dann nur, wenn im Anfangszustand die Bewegung des Punktes P kreisförmig einsetzt.

3. Die Annahme $\varrho = \infty$. Aus der Definitionsgleichung:

$$\varrho^2 = \frac{x_{32}^2}{m_1} + \frac{x_{13}^2}{m_2} + \frac{x_{21}^2}{m_3},$$

wo $x_{21} + x_{32} + x_{13} = 0$, erkennt man, dafs $\varrho = \infty$ wird, wenn je zwei Massen von einander unendlich grofse Abstände haben, wobei entweder alle Massen im Unendlichen oder eine im Endlichen, zwei im Unendlichen liegen können; ferner wenn zwei Massen einen endlichen Abstand haben, es sei im Unendlichen oder im Endlichen, während die dritte von den beiden ersten unendlich weit entfernt ist.

Der mathematische Begriff des unendlich Grofsen deckt sich nicht mit der philosophischen Idee von der Unendlichkeit. Eine Entfernung von einigen Zentimetern kann, wenn Molekularbewegungen in Frage stehen, die Rolle des unendlich Grofsen übernehmen. Der Fall $\varrho = \infty$ ist daher nicht als eine Unstetigkeit in den Rechnungen anzusehen, welche die Berechtigung der Gleichungen aufhöbe. Der Wert von ϱ kann allmählich so anwachsen, dafs er für die Rechnung unendlich grofs ist; auch kann ϱ von anfänglich sehr grofsen, für die Rechnung unendlichen Werten im Laufe der Zeit zu endlicher Gröfse herabsteigen. Es können mit anderen Worten eine, zwei oder drei Massen im Verlaufe des Prozesses im Unendlichen verschwinden und aus der Rechnung ausscheiden oder aus der Unendlichkeit auftauchen und in die Gesamtbewegung eingreifen. Die Mitwirkung von Massen, die dauernd im Unendlichen liegen, aus dem Unendlichen kommen oder ins Unendliche gehen, ist aber für alle Bewegungsprozesse nur zulässig, wenn die Anziehung zwischen den Massen mit wachsender Entfernung bis 0 abnimmt ($n > 0$). Wäre das Gegenteil der Fall, so würde eine aus dem Unendlichen eintreffende Masse, da sie schon unendlich lange Zeit unter dem Einflusse endlicher oder gar unendlicher Kräfte gestanden hat, mit einer unendlich grofsen Geschwindigkeit begabt sein. Sie würde sich im Bereich der Endlichkeit nur eine unendlich kurze Zeit aufhalten und nach der entgegengesetzten Seite verschwinden, ohne auf die Bewegung der beiden im Endlichen liegenden Massen den geringsten Einflufs ausüben zu können.

Sind für positive n die Abstände je zweier Massen von einander unendlich grofs, so kann man die mittlere Masse im Endlichen annehmen. Die Anfangskräfte sind Null, die Massen sind anfangs frei und bewegen sich mit konstanten Geschwindigkeiten. Nach (31) wird $\frac{d\varphi}{dt} = 0$; $\varphi = \text{const.}$ Der Punkt P liegt in unendlicher Entfernung, und zwar im Innern eines Sektors, er bewegt sich in der Richtung des Fahrstrahls. Nach (29a) kann die Energiekonstante $L = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \varrho^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ in diesem Fall nicht negativ, wohl aber Null sein. Der Bewegungsprozefs kann daher, auch nach Eintritt der Massen in die endliche Sphäre nur parabolischen oder hyperbolischen Charakter zeigen. Hat sich umgekehrt für drei im Endlichen liegenden Massen eine negative Energiekonstante ergeben,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so ist es ausgeschlossen, dafs sich die drei Massen völlig von einander trennen, wenigstens zwei von ihnen müssen in endlichem Abstande von einander bleiben.

Liegt bei positiven n-Werten nur eine Masse, z. B. m_3 im Unendlichen, so kann sie, so lange dieser Zustand dauert, die Bewegung der beiden andern Massen m_1 und m_2 nicht stören. Auch jetzt ist $\varrho = \infty$, da aber x_{21} endlich bleibt, so folgt aus (27), dafs $\sin(\delta_\zeta - \varphi) = 0$ ist. Der Punkt P bewegt sich in der Nähe der Spur S_ζ, er kann in der unendlichen Entfernung vom Spurenanfang seitliche Bewegungen von endlicher Ausdehnung ausführen, wie sie der freien Bewegung zweier Massen zukommen, ohne die Gleichung $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ zu stören. In der Gleichung (29a) bleibt $\frac{f}{\varrho^{n-1}}$ endlich. Die Konstante L kann $>, =, < 0$ ausfallen, ihr Wert ist aber nicht derselbe, der sich aus dem Bewegungsprozefs zweier Massen ergeben würde, weil zu der Energie des Systems m_1 und m_2 noch die Energie der im Unendlichen gedachten Masse m_3 hinzutritt.

4) Die Annahme $\operatorname{tg}\psi = 0$ verlangt $\psi = 0$ oder $\psi = \pi$. Nach der Bedeutung des Winkels ψ folgt daraus, das $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, $\varphi = \text{const}$ sein, d. h. dafs der Punkt P sich in der Richtung des Fahrstrahls und in geradliniger Bahn bewegen soll. Dementsprechend wird nach (35a) der Krümmungsradius $R = \infty$. Die Gleichung (33) ergibt die weitere Forderung $f' = 0$, d. h. die Bewegung von P soll nach dem Minimum oder Maximum der f-Kurve gerichtet sein. Die relativen Abstände der drei Massen sollen nach (27) dauernd in gleichen Verhältnissen zu einander stehen, etwa

$$x_{32} = k_{32} \cdot \varrho, \quad x_{13} = k_{13} \cdot \varrho, \quad x_{21} = k_{21}\varrho;$$

$$\frac{dx_{32}}{dt} = k_{32}\frac{d\varrho}{dt}, \quad \frac{dx_{13}}{dt} = k_{13}\frac{d\varrho}{dt}, \quad \frac{dx_{21}}{dt} = k_{21}\frac{d\varrho}{dt}, \quad k_{32} + k_{13} + k_{21} = 0 \tag{38}$$

wo die Konstanten k_{21}, k_{32}, k_{13} aus (27) zu entnehmen sind. Von den drei Körpern wird eine Art pendelnder Bewegung verlangt, bei der sie gleichzeitig ihren Maximalabstand erreichen, gleichzeitig in einem Punkte zusammentreffen und nach Umkehr oder Durchdringung denselben Prozefs in einfachen Perioden wiederholen.

Die Differentialgleichungen (29a), nämlich jetzt:

$$2\varrho\frac{d^2\varrho}{dt^2} + \frac{f}{\varrho^{n-1}} = 0; \quad \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 - \frac{f}{(n-1)\varrho^{n-1}} - L = 0 \tag{39}$$

sind bei konstantem f vereinbar, die zweite Gleichung ist das Integral der ersten. Daraus darf aber noch nicht geschlossen werden, dafs die gewünschte Bewegung ausführbar ist, denn es handelt sich hier um den besonderen Fall, dafs die beiden Projektionen des Systems (19), die zu den Differentialgleichungen (21) und (22) geführt haben, nicht mehr unabhängig von einander sind (38), wie es sein mufs, wenn (21) und (22) die Bewegungen vollständig wiedergeben sollen. Wir müssen vielmehr, um die Zulässigkeit der pendelnden Bewegung zu prüfen, auf zwei Gleichungen des Systems (19) selbst zurückgreifen.

Der Punkt P liege im Sektor S_ζ, $-S_\xi$, Reihenfolge der Massen m_1, m_2, m_3; dann ist k_{13} negativ und $-k_{13} = k_{21} + k_{32}$. In der ersten und dritten Gleichung (19) ist $\varrho_{32} = k_{32}\varrho$; $\varrho_{13} = (k_{21} + k_{32})\varrho$, $\varrho_{21} = k_{21} \cdot \varrho$ einzusetzen:

$$k_{32}\varrho'' = \frac{1}{\varrho^n}\left(-\frac{m_{23}}{k_{32}^n} - \frac{m_1}{(k_{21}+k_{32})^n} + \frac{m_1}{k_{21}^n}\right); \quad k_{21}\varrho'' = \frac{1}{\varrho^n}\left(-\frac{m_{12}}{k_{21}^n} - \frac{m_3}{(k_{21}+k_{32})^n} + \frac{m_3}{k_{32}^n}\right).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichungen haben unter einander und selbstverständlich auch mit (39) übereinstimmenden Differentialcharakter. Für ihre Vereinbarkeit ergibt sich die Bedingung:

$$(39\,a)\qquad -\frac{m_{23}}{k_{32}^{\,n+1}}-\frac{m_1}{k_{32}\,(k_{21}+k_{32})^n}+\frac{m_1}{k_{32}\,k_{21}^{\,n}}+\frac{m_{12}}{k_{21}^{\,n+1}}+\frac{m_3}{k_{21}\,(k_{21}+k_{32})^n}-\frac{m_3}{k_{21}\,k_{32}^{\,n}}=0,$$

wo k_{21} und k_{32} beide positiv sind. Führt man $\frac{k_{21}}{k_{32}}=x$ ein, so nimmt die geordnete Bedingung die Form an:

$$(x+1)^n\cdot(-m_{23}x^{n+1}-m_3x^n+m_1x+m_{12})+x^n(-m_1x+m_3)=0$$

und die Frage ist, ob für x eine positive reelle Wurzel besteht.

Beispiel 1. $n=0$, konstante Kräfte zwischen den Massen. Es wird $x=\frac{x_{21}}{x_{32}}=\frac{m_{12}}{m_{23}}$, in Worten: Der Abstand der beiden äufseren Massen wird durch die mittlere Masse so geteilt, dafs sich die Abschnitte wie die Summen der in ihren Endpunkten lagernden Massen verhalten.

Beispiel 2. $n=-1$, elastische Kräfte. Die Bedingung für x wird identisch erfüllt, d. h. die Anfangsstellung der drei Massen ist beliebig.

Beispiel 3. $n=2$, Newtonische Gravitation. Die Bedingung wird:

$$(40)\qquad \begin{aligned}0=&-x^5(m_2+m_3)-x^4(2m_2+3m_3)-x^3(m_2+3m_3)+x^2(m_2+3m_1)\\&+x(2m_2+3m_1)+m_2+m_1.\end{aligned}$$

Der einzige Zeichenwechsel dieser Gleichung läfst auf eine positive Wurzel schliefsen, deren Bedeutung genauer aus $f'=0$ zu erkennen ist (33). Wenn man Bedenken trägt, die Gleichung (33), bei deren Herleitung der Faktor $\frac{d\varphi}{dt}$ fortgefallen ist, für den vorliegenden Fall gelten zu lassen, so hat man die Gleichung (29) für $n=2$ und die Reihenfolge m_1, m_2, m_3, nämlich:

$$(40\,a)\qquad f(\varphi)=\frac{\mu_1}{\sin(\delta_\xi-\varphi)}-\frac{\mu_2}{\sin(\delta_\eta-\varphi)}+\frac{\mu_3}{\sin(\delta_\zeta-\varphi)}$$

nach φ zu differentiieren und die entstehende Gleichung:

$$(41)\qquad f'=0=\frac{\mu_1\cos(\delta_\xi-\varphi)}{\sin^2(\delta_\xi-\varphi)}-\frac{\mu_2\cos(\delta_\eta-\varphi)}{\sin^2(\delta_\eta-\varphi)}+\frac{\mu_3\cos(\delta_\zeta-\varphi)}{\sin^2(\delta_\zeta-\varphi)}$$

zu untersuchen. Die Ausrechnung ist etwas lang und soll hier nur skizziert werden. Ersetzt man die trigonometrischen Funktionen durch ihre Werte aus (27) und führt $x_{21}=x\cdot x_{32}$, $x_{13}=-x_{32}(x+1)$ ein, so erhält man eine Gleichung, in welcher die drei auftretenden Wurzeln durch einmaliges Quadrieren beseitigt werden können, da sich z. B. das Produkt $\cos(\delta_\xi-\varphi)\cdot\cos(\delta_\zeta-\varphi)$ als rational erweist. Die Gleichung ist in x vom zehnten Grade, kann aber in zwei Faktoren fünften Grades zerlegt werden. Der eine Faktor ist mit (40) identisch, der andere ist abzulehnen, weil er eine Zusammenstellung von Vorzeichen verlangt, die mit $x_{21}+x_{32}+x_{13}=0$ nicht vereinbar ist.

Wir sehen, dafs auch für Gravitation im engeren Sinne eine pendelnde Bewegung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der drei Massen möglich ist. Die zugehörige Bewegung des Punktes P verläuft für jeden Sektor in dem Strahl, der vom Anfangspunkt durch den nächsten Punkt der f-Kurve gelegt ist. Das Zustandekommen einer solchen einfachen Bewegung setzt natürlich voraus, dafs schon im Anfangszustand die Abstände der drei Massen und auch ihre relativen Geschwindigkeiten sich so zu einander verhalten, wie es die Gleichung (40) oder die Bedingung $f' = 0$ fordern. Geht man von (40) aus, so können der Abstand zweier Massen und ihre relative Geschwindigkeit, z. B. x_{32} und $\frac{dx_{32}}{dt}$ beliebig gewählt werden. Der positive reelle Wert von x müfste durch Annäherung festgestellt werden, dann wird durch $x_{21} = x \cdot x_{32}$ und $\frac{dx_{21}}{dt} = x \frac{dx_{32}}{dt}$ Entfernung und Geschwindigkeit der dritten Masse m_1 bestimmt. Geht man dagegen von (41) aus, so könnte man die f-Kurve konstruieren und die Gröfse des Winkels φ, der dem Minimum $f' = 0$ entspricht, durch ein graphisches Verfahren z. B. mit dem Transporteur feststellen. Dann bleiben ϱ und $\frac{d\varrho}{dt}$ beliebig wählbar; die Abstände der Massen und ihre Geschwindigkeiten ergeben sich aus den Gleichungen (27) und ihren Ableitungen. Beiläufig erhält man dabei auf konstruktivem Wege eine reelle Wurzel der Gleichung fünften Grades (40).

Sind die Anfangsbedingungen für das Zustandekommen der pendelnden Bewegung erfüllt, so entspricht der weitere Verlauf des Prozesses, wie die zweite Gleichung (39) zeigt, der Bewegung zweier gravitierenden Punkte und ist wie diese zu behandeln.

Anmerkung. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs auch für andere n-Werte der Fall $\operatorname{tg}\psi = 0$ zulässig ist, wenn nur in jedem Sektor die f-Kurve ein Minimum oder Maximum hat. Die beliebige Anfangsstellung der Massen für $n = -1$ entspricht der kreisförmigen f-Kurve dieses Beispiels, die der Bewegungsrichtung des Punktes P nichts vorschreibt.

5. Die Annahme $\psi' + 1 = 0$; $\psi + \varphi = \text{const.}$ verleiht dem Punkte P eine geradlinige Bahn. Aus (33) folgt $f \operatorname{tg}(\text{const} - \varphi) \cdot (n - 1) + f' = 0$, d. h. der Winkel φ hat einen konstanten Wert, was wieder auf $\operatorname{tg}\psi = 0$ zurückgeht. Die besprochene pendelnde Bewegung ist daher der einzige Fall, in dem die Bewegung von P geradlinig wird. Ist nur für einen Augenblick $\psi' + 1 = 0$, $R = \infty$, so geht die konkave Krümmung in die konvexe über.

VI.

Zwischensatz. Konstruktive Auflösung einer Gruppe von Gleichungen fünften Grades.

Die Untersuchung über die pendelnde Bewegung dreier nach Newton's Hypothese gravitierenden Massen reizt zu einer Abschweifung auf arithmetisches Gebiet. Es hat sich eine Gleichung fünften Grades von besonderer Struktur (40) ergeben, deren Lösung durch geometrische Konstruktion und Messung gefunden werden kann. Man könnte nun versuchen, die Grundlagen des Bewegungsprozesses zu verallgemeinern, um die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf