relativen Geschwindigkeit r_i ein Parallelogramm (das Doppelte des vom Fahrstrahl in der Zeiteinheit beschriebenen Flächenraums), dividiert den Inhalt dieses Parallelogramms durch die dritte Masse und betrachtet den Quotienten als eine Linie, die auf der Ebene des Parallelogramms senkrecht steht, so ergibt die geometrische Zusammensetzung der drei Normalen eine nach Gröfse und Richtung unveränderliche Resultante:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}$$

als Normale der invariablen Ebene. Eine zweckmäfsige Umformung der Flächensätze erhält man durch Einführung des Dreiecks der drei Massen und seiner Projektionen J_{yz}, J_{zx}, J_{xy}. Es wird:

$$2\,J_{yz} = y_{21} z_{32} - y_{32} z_{21} = y_{21} z_3 + y_{32} z_1 + y_{13} z_2 \text{ usw.}$$

Der Einfachheit wegen werde die invariable Ebene zur x, y ebene gemacht, dann wird $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y = 0$, $\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}$. Werden die Gleichungen (18) nach x_{21}, y_{21}, z_{21} usw. oder nach x_3, y_3, z_3 usw. projiziert, so ergibt sich, mit Beachtung von (17), leicht:

$$x_3' J_{yz} + y_3' J_x + z_3' J_{xy} = \frac{\mathfrak{M} \cdot m_1 m_2}{2\,M} z_{21} \text{ usw.}$$

$$x_{21}' J_{yz} + y_{21}' J_{zx} + z_{21}' J_{xy} = -\frac{\mathfrak{M} \cdot m_3}{2} z_3 \text{ usw.}$$

Daraus folgt: Liegen die drei Massen in einer geraden Linie, $J_{yz} = J_{zx} = J_{xy} = 0$, so sind alle $z_i = 0$, d. h. alle Bedeckungen (Eklipsen) finden in der invariablen Ebene statt. Liegen zu irgend einer Zeit zwei Massen in der invariablen Ebene, so liegt die dritte Masse auch darin. Für diesen Augenblick schrumpfen die Gleichungen wegen $J_{yz} = 0$, $J_{zx} = 0$, zusammen zu $z_i' J_{xy} = 0$. Sind nun die zur invariablen Ebene senkrechten Geschwindigkeitskomponenten von Null verschieden, so mufs $J_{xy} = 0$ sein, d. h. die drei Massen befinden sich, für $z_i' \gtrless 0$, nur dann gleichzeitig in der invariablen Ebene, wenn sie in einer geraden Linie liegen. Ist aber J_{xy} von Null verschieden, so sind alle $z_i' = 0$, d. h. nicht nur die Massen, sondern auch ihre Geschwindigkeiten liegen in der invariablen Ebene. Dann wird die ganze Bewegung dauernd auf diese Ebene beschränkt bleiben, da für ein Ausweichen nach oben oder unten keine Ursache vorhanden ist. Liegen endlich die drei Massen in einer geraden Linie, die auch die Richtungen der Geschwindigkeiten aufnimmt, so bleibt der Prozefs aus demselben Grunde dauernd linear. Das Problem der drei Körper kann demnach ein räumliches, ebenes oder lineares sein.

IV.

Drei gravitierende Körper in gerader Linie.

1. Aufstellung der Differentialgleichungen. Drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 in freiem System sollen zu irgend einer Zeit t in einer geraden Linie liegen, und die Richtungen ihrer Bewegung sollen in dieselbe, als x-Achse angenommene Gerade fallen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ein Ausbrechen der Massen nach irgend einer Seitenrichtung ist aus Gründen der Symmetrie ausgeschlossen. Das Vorzeichen der gegenseitigen Entfernungen $x_{32} = x_3 - x_2$, $x_{13} = x_1 - x_3$, $x_{21} = x_2 - x_1$ hängt von der Reihenfolge ab. Jede Masse, z. B. m_2 kann zwischen den beiden anderen, m_1 und m_3 liegen, entweder so, dafs m_1 links und m_3 rechts liegt, oder umgekehrt. Fallen zwei Massen zusammen, so kann die dritte rechts oder links liegen. Die drei Massen können auch gleichzeitig zusammenfallen. Die Konfiguration zeigt daher, wenn die drei Massen getrennt sind, 6 Formen, wenn zwei Massen zusammenfallen, 6 Formen, wenn die drei Massen zusammenfallen, 1 Form. Es sei

$$x_{32}^2 = \varrho_{32}^2; \quad x_{13}^2 = \varrho_{13}^2; \quad x_{21}^2 = \varrho_{21}^2 \tag{18a}$$

wo ϱ_{32}, ϱ_{13}, ϱ_{21} die absoluten Werte der Abstände bedeuten. Zwischen je zwei Massen nehmen wir Anziehungskräfte an, die der n^{ten} Potenz der Entfernung umgekehrt proportional sind. Wird der Gravitationsfaktor $= 1$ gesetzt, so ist die Beschleunigung, die von m_2 auf m_1 ausgeübt wird, für jeden Fall der Konfiguration $m_2 \frac{x_{21}}{\varrho_{21}^{n+1}}$, dagegen die Beschleunigung, die m_2 von m_1 erhält, $m_1 \frac{x_{12}}{\varrho_{21}^{n+1}} = - m_1 \frac{x_{21}}{\varrho_{21}^{n+1}}$. Die Differentialgleichungen für die einzelnen Massen werden demnach:

$$x_1'' = \frac{m_2 x_{21}}{\varrho_{21}^{n+1}} - \frac{m_3 x_{13}}{\varrho_{13}^{n+1}}; \quad x_2'' = \frac{m_3 x_{32}}{\varrho_{32}^{n+1}} - \frac{m_1 x_{21}}{\varrho_{21}^{n+1}}; \quad x_3'' = \frac{m_1 x_{13}}{\varrho_{13}^{n+1}} - \frac{m_2 x_{32}}{\varrho_{32}^{n+1}} \tag{18b}$$

woraus mit Einführung der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2 + m_3$ durch Subtraktion die Gleichungen für die relativen Bewegungen hervorgehen:

$$\begin{array}{l|l|l}
x_{32}'' = -\frac{M x_{32}}{\varrho_{32}^{n+1}} + m_1 \left(\frac{x_{32}}{\varrho_{32}^{n+1}} + \frac{x_{13}}{\varrho_{13}^{n+1}} + \frac{x_{21}}{\varrho_{21}^{n+1}} \right) & 2 \frac{x_{32}}{m_1} & 2 \frac{x_{32}'}{m_1} \\
x_{13}'' = -\frac{M x_{13}}{\varrho_{13}^{n+1}} + m_2 \left(\frac{x_{32}}{\varrho_{32}^{n+1}} + \frac{x_{13}}{\varrho_{13}^{n+1}} + \frac{x_{21}}{\varrho_{21}^{n+1}} \right) & 2 \frac{x_{13}}{m_2} & 2 \frac{x_{13}'}{m_2} \\
x_{21}'' = -\frac{M x_{21}}{\varrho_{21}^{n+1}} + m_3 \left(\frac{x_{32}}{\varrho_{32}^{n+1}} + \frac{x_{13}}{\varrho_{13}^{n+1}} + \frac{x_{21}}{\varrho_{21}^{n+1}} \right) & 2 \frac{x_{21}}{m_3} & 2 \frac{x_{21}'}{m_3}
\end{array} \tag{19}$$

Für die ausgeschalteten Schwerpunktssätze tritt hier die Gleichung

$$x_{32} + x_{13} + x_{21} = 0 \tag{20}$$

ein, die als Integral von (19) angesehen werden kann und für zwei Integrationskonstanten den Wert 0 fordert. Aufserdem sind noch vier Konstanten zu erwarten, die durch die Daten eines als bekannt angenommenen Anfangszustandes, z. B. durch die Anfangswerte von x_{32}, x_{13}; x_{32}', x_{13}' festgelegt werden.

2. Umformung der Differentialgleichungen. Das System (19) kann wegen (20) durch zwei von einander unabhängige Projektionen ersetzt werden. Multipliziert man die drei Gleichungen der Reihe nach einmal mit $2 \frac{x_{32}}{m_1}$, $2 \frac{x_{13}}{m_2}$, $2 \frac{x_{21}}{m_3}$ und zweitens mit $2 \frac{x_{32}'}{m_1}$, $2 \frac{x_{13}'}{m_2}$, $2 \frac{x_{21}'}{m_3}$ und addiert, so entsteht:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$2\,\frac{x_{32}\,x_{32}''}{m_1}+2\,\frac{x_{13}\,x_{13}''}{m_2}+2\,\frac{x_{21}\,x_{21}''}{m_3}=-\frac{2\,M}{m_1\,m_2\,m_3}\left(\frac{m_2\,m_3\,x_{32}^2}{\varrho_{32}^{n+1}}+\frac{m_3\,m_1\,x_{13}^2}{\varrho_{13}^{n+1}}+\frac{m_1\,m_2\,x_{21}^2}{\varrho_{21}^{n+1}}\right)$$

$$2\,\frac{x_{32}'\,x_{32}''}{m_1}+2\,\frac{x_{13}'\,x_{13}''}{m_2}+2\,\frac{x_{21}'\,x_{21}''}{m_2}=-2\,\frac{M}{m_1\,m_2\,m_3}\left(\frac{m_2\,m_3\,x_{32}\,x_{32}'}{\varrho_{32}^{n+1}}+\frac{m_3\,m_1\,x_{13}\,x_{13}'}{\varrho_{13}^{n+1}}+\frac{m_1\,m_2\,x_{21}\,x_{21}'}{\varrho_{21}^{n+1}}\right)$$

Nun ist für jeden Index:

$$\frac{x^2}{\varrho^{n+1}}=\frac{1}{\varrho^{n-1}};\quad x\,x'=\varrho\,\varrho';\quad 2\,x\,x''=\frac{d^2}{dt^2}(x^2)-2\,x'^2;\quad 2\,x'\,x''=\frac{d}{dt}\cdot(x'^2)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen erhält man aus der ersten Projektion:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x_{32}^2}{m_1}+\frac{x_{13}^2}{m_2}+\frac{x_{21}^2}{m_3}\right)-2\left(\frac{x_{32}'^2}{m_3}+\frac{x_{13}'^2}{m_1}+\frac{x_{21}'^2}{m_3}\right)=-2\,\frac{M}{m_1\,m_2\,m_3}\left(\frac{m_2\,m_3}{\varrho_{32}^{n-1}}+\frac{m_3\,m_1}{\varrho_{13}^{n-1}}+\frac{m_1\,m_2}{\varrho_{21}^{n-1}}\right)\quad(21)$$

und aus der zweiten Projektion, integriert:

$$\frac{x_{32}'^2}{m_1}+\frac{x_{13}'^2}{m_2}+\frac{x_{21}'^2}{m_3}=\frac{2}{n-1}\,\frac{M}{m_1\,m_2\,m_3}\left(\frac{m_2\,m_3}{\varrho_{32}^{n-1}}+\frac{m_3\,m_1}{\varrho_{13}^{n-1}}+\frac{m_1\,m_2}{\varrho_{21}^{n-1}}\right)+L.\quad(22)$$

Hieraus ergibt sich die übliche Form des Energiesatzes (für ruhenden Schwerpunkt) durch Multiplikation mit $\frac{m_1\,m_2\,m_3}{2\,M}$. Zu beachten ist, dafs in der letzten Gleichung der Exponent der Fernwirkung $n \gtrless 1$ sein mufs. Für $n=1$ würde die Integration auf ein logarithmisches Potential führen. Im übrigen kann n jeden konstanten Wert haben. Für $n=0$ würden die Gleichungen den Fallbewegungen (konstante Beschleunigung), für $n=-1$ elastischen Schwingungen entsprechen. Negative n-Werte ergeben mit der Entfernung wachsende Kräfte. Rechnet man die Massen negativ an, so tritt Abstofsung an die Stelle der Anziehung.

3. Transformation. Um die Gleichung (20) für die Rechnung zu verwerten und doch die symmetrische Struktur der Formeln zu retten, setzen wir:

$$x_{32}=\sqrt{m_1}\cdot\xi;\quad x_{13}=\sqrt{m_2}\,\eta;\quad x_{21}=\sqrt{m_3}\,\zeta$$

und betrachten ξ, η, ζ als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes P. Aus (20):

$$\sqrt{m_1}\,\xi+\sqrt{m_2}\,\eta+\sqrt{m_3}\,\zeta=0;\quad \sqrt{m_1}\,\xi'+\sqrt{m_2}\,\eta'+\sqrt{m_3}\,\zeta'=0\quad(23)$$

folgt dann, dafs der Punkt P sich in einer festliegenden Ebene E bewegt, welche den Anfangspunkt des neuen Koordinatensystems aufnimmt. Ihre Normale hat gegen die Achsen ξ, η, ζ die Neigungskosinus $\sqrt{\frac{m_3}{M}}$, $\sqrt{\frac{m_1}{M}}$, $\sqrt{\frac{m_2}{M}}$ und geht durch den positiven Oktanten. Die drei Koordinatenebenen (η,ζ); (ζ,ξ); (ξ,η) werden von der Ebene E in drei Spuren S_ξ, S_η, S_ζ geschnitten, deren positive Richtung so bestimmt werden soll, dafs jede Spur einen spitzen Winkel mit derjenigen Achse ihrer Koordinatenebene bildet, die in der zyklischen Vertauschung ξ, η, ζ, ξ . . voransteht. Spitze Winkel liegen dann zwischen $+S_\xi$ und $+\eta$, zwischen $+S_\eta$ und $+\zeta$ und zwischen $+S_\zeta$ und $+\xi$. Die Gleichungen der drei Spuren entstehen aus (23) für $\xi=0$; $\eta=0$; $\zeta=0$, nämlich $\sqrt{m_2}\,\eta+\sqrt{m_3}\,\zeta=0$; $\sqrt{m_3}\,\zeta+\sqrt{m_1}\,\xi=0$; $\sqrt{m_1}\,\xi+\sqrt{m_2}\,\eta=0$. Nennt man die Neigungskosinus der Spuren

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

S_ξ, S_η, S_ζ gegen die positiven ξ, η, ζ-Achsen α_ξ, β_ξ, γ_ξ; α_η, β_η, γ_η; α_ζ, β_ζ, γ_ζ, so wird mit den Abkürzungen $m_2 + m_3 = m_{23}$; $m_3 + m_1 = m_{31}$; $m_1 + m_2 = m_{12}$:

$$\alpha_\xi = 0;\ \beta_\xi = \sqrt{\frac{m_3}{m_{23}}};\ \gamma_\xi = -\sqrt{\frac{m_2}{m_{23}}}$$

$$(24)\qquad \alpha_\eta = -\sqrt{\frac{m_3}{m_{31}}};\ \beta_\eta = 0;\ \gamma_\eta = \sqrt{\frac{m_1}{m_{31}}}$$

$$\alpha_\zeta = \sqrt{\frac{m_2}{m_{12}}};\ \beta_\zeta = -\sqrt{\frac{m_1}{m_{12}}};\ \gamma_\zeta = 0.$$

Daraus ergibt sich für die Winkel zwischen den positiven Richtungen der Spuren gegen einander:

$$(24\,a)\ \cos(S_\eta, S_\zeta) = -\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_{31} m_{12}}};\ \cos(S_\zeta, S_\xi) = -\sqrt{\frac{m_3 m_1}{m_{12} m_{23}}};\ \cos(S_\xi, S_\eta) = -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_{23} m_{31}}}$$

Diese Winkel sind also sämtlich stumpf. Werden die negativen Verlängerungen der Spuren über den Anfangspunkt hinaus mitgerechnet, so erscheint die Ebene E in sechs spitzwinklige Sektoren geteilt. Die Gröfse der Sektoren hängt von dem Verhältnis der Massen ab. Sind die drei Massen einander gleich, so mifst jeder Sektor 60°. Ist eine Masse, z. B. m_3 überwiegend, die anderen dagegen fast verschwindend, so stehen zwei Spuren, S_ξ und S_η nahezu senkrecht zu einander, während die Richtung der dritten Spur nur durch das Verhältnis der beiden kleineren Massen bestimmt wird. Den Zusammenhang zwischen den Vorzeichen von ξ, η, ζ und der positiven Reihenfolge der Massen für jeden Sektor erkennt man aus einer kleinen Tabelle:

Sektor	Vorzeichen	Reihenfolge
$+S_\xi, -S_\zeta$	$-+-$	$m_3\, m_2\, m_1$
$+S_\eta, -S_\zeta$	$-++$	$m_3\, m_1\, m_2$
$+S_\eta, -S_\xi$	$--+$	$m_1\, m_3\, m_2$
$+S_\zeta, -S_\xi$	$+-+$	$m_1\, m_2\, m_3$
$+S_\zeta, -S_\eta$	$+--$	$m_2\, m_1\, m_3$
$+S_\xi, -S_\eta$	$++-$	$m_2\, m_3\, m_1$

Durch die Bewegung des Punktes P in der Ebene E wird die Stellung der drei Massen zu einander für jeden Zeitwert eindeutig abgebildet. Liegt der Punkt P im Schnittpunkt der Spuren, so fallen die drei Massen gleichzeitig zusammen. Geht P durch eine Spur, z. B. S_ξ in den benachbarten Sektor über, so ist in diesem Augenblick $\xi = 0$; $x_{32} = 0$ d. h. die Massen m_2 und m_3 fallen zusammen und wechseln die Stellung (durchdringen sich). So lange keine Durchdringung eintritt, ist die Bewegung des Punktes P auf einen Sektor beschränkt. Jeder Sektor entspricht daher einer der Hauptformen der Konfiguration.

4. Einführung von Polarkoordinaten. Die Lage des Punktes P in der Ebene E soll auf Polarkoordinaten ϱ und φ bezogen werden. Der Fahrstrahl

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \sqrt{\frac{x_{32}^2}{m_1} + \frac{x_{13}^2}{m_2} + \frac{x_{21}^2}{m_3}} \tag{25}$$

oder die Entfernung vom Koordinatenanfang soll stets positiv gerechnet werden, während der von einer noch zu bestimmenden Richtung aus gemessene Winkel φ positiv oder negativ sein und alle sechs Sektoren durchlaufen kann. ϱ hat gegen die ξ, η, ζ-Achsen die Neigungskosinus $\frac{\xi}{\varrho}, \frac{\eta}{\varrho}, \frac{\zeta}{\varrho}$; bezeichnet man die Winkel zwischen ϱ und $+S_\xi$ mit φ_ξ, zwischen ϱ und $+S_\eta$ mit φ_η und zwischen ϱ und $+S_\zeta$ mit φ_ζ, so wird nach (24):

$$\cos\varphi_\xi = \frac{\eta}{\varrho}\sqrt{\frac{m_3}{m_{23}}} - \frac{\zeta}{\varrho}\sqrt{\frac{m_2}{m_{23}}};\quad \cos\varphi_\eta = \frac{\zeta}{\varrho}\sqrt{\frac{m_1}{m_{31}}} - \frac{\xi}{\varrho}\sqrt{\frac{m_3}{m_{31}}};\quad \cos\varphi_\zeta = \frac{\xi}{\varrho}\sqrt{\frac{m_2}{m_{12}}} - \frac{\eta}{\varrho}\sqrt{\frac{m_1}{m_{12}}} \tag{26}$$

Die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ müssen durch ϱ und φ ausgedrückt werden. Dazu hat man nach (23), (26), (25) die drei Gleichungen:

$$\sqrt{m_1}\,\xi + \sqrt{m_2}\,\eta + \sqrt{m_3}\,\zeta = 0;\quad \sqrt{m_3}\,\eta - \sqrt{m_2}\,\zeta = \sqrt{m_{23}}\cdot\varrho\cdot\cos\varphi_\xi;\quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varrho^2.$$

Durch Substitution der aus den beiden ersten hervorgehenden Werte von η und ζ in die dritte und mit nachfolgender zyklischer Vertauschung über m_1, m_2, m_3 und ξ, η, ζ erhällt man:

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{m_{23}}{M}}\cdot\varrho\cdot\sin\varphi_\xi;\quad \eta = \pm\sqrt{\frac{m_{31}}{M}}\,\varrho\sin\varphi_\eta;\quad \zeta = \pm\sqrt{\frac{m_{12}}{M}}\,\varrho\cdot\sin\varphi_\zeta$$

Die Vorzeichen hängen von der Richtung ab, in der die Winkel gemessen werden. Läfst man die Winkel φ_ξ, φ_η, φ_ζ von den positiven Spuren aus im Sinne der zyklischen Vertauschung ξ, η, ζ wachsen, so gehören, wie aus der Tabelle zu erkennen, zum Intervall $0 < \varphi_\xi < \pi$ negative ξ-Werte, zum Intervall $\pi < \varphi_\xi < 2\pi$ dagegen positive; für η und ζ gilt Entsprechendes, und es ist dann überall das Minuszeichen zu nehmen. Bezeichnet man die Anfangsrichtung für den Winkel φ mit S, ferner die Winkel von $+S$ nach $+S_\xi$ mit δ_ξ, von $+S$ nach $+S_\eta$ mit δ_η, von $+S$ nach $+S_\zeta$ mit δ_ζ, so kann in den Formeln $\varphi_\xi = \varphi - \delta_\xi$, $\varphi_\eta = \varphi - \delta_\eta$, $\varphi_\zeta = \varphi - \delta_\zeta$ gerechnet werden, wobei eine volle Umdrehung um 2π vernachlässigt ist, weil sie auf die trigonometrischen Funktionen keinen Einflufs ausübt. Es folgt.

$$\frac{x_{32}}{\sqrt{m_1}} = \xi = \sqrt{\frac{m_{23}}{M}}\cdot\varrho\cdot\sin(\delta_\xi - \varphi);\quad \frac{x_{13}}{\sqrt{m_2}} = \eta = \sqrt{\frac{m_{31}}{M}}\,\varrho\cdot\sin(\delta_\eta - \varphi);$$
$$\frac{x_{21}}{\sqrt{m_3}} = \zeta = \sqrt{\frac{m_{12}}{M}}\,\varrho\cdot\sin(\delta_\xi - \varphi). \tag{27}$$

Von den drei Winkeln δ_ξ, δ_η, δ_ζ ist einer beliebig wählbar je nach der Lage, die man der Anfangsrichtung S gibt, die anderen ergeben sich dann nach (24a) aus den Beziehungen:

$$\cos(\delta_\eta - \delta_\zeta) = -\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_{31} m_{12}}};\quad \cos(\delta_\zeta - \delta_\xi) = -\sqrt{\frac{m_3 m_1}{m_{12} m_{23}}};\quad \cos(\delta_\xi - \delta_\eta) = -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_{23} m_{31}}} \tag{27a}$$

Die Gröfsen ξ, η, ζ können positiv oder negativ sein, will man ihre absoluten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Werte haben, die nach (18a) mit $\frac{\varrho_{32}}{\sqrt{m_1}}$, $\frac{\varrho_{13}}{\sqrt{m_2}}$, $\frac{\varrho_{21}}{\sqrt{m_3}}$ zu bezeichnen sind, so mufs man den Sektor berücksichtigen, in dem sich P befindet. Liegen z. B. die Massen in der Reihenfolge m_1, m_2, m_3, so ist nach der Tabelle P zwischen $+S_\zeta$ und $-S_\xi$ zu suchen; ξ und ζ sind positiv, aber η negativ, man hat daher den η-Wert in (27) mit dem Minuszeichen zu versehen, um den absoluten Wert von $\frac{\varrho_{13}}{\sqrt{m_2}}$ herzustellen.

Beiläufig ergeben sich aus (27) einige identische Gleichungen. Für jeden Wert von φ ist:

$$\frac{m_{23}}{M}\sin^2(\delta_\xi-\varphi)+\frac{m_{31}}{M}\sin^2(\delta_\eta-\varphi)+\frac{m_{12}}{M}\sin^2(d_\zeta-\varphi)=1$$

Daraus:

$$\frac{m_{23}}{M}\cos^2(\delta_\xi-\varphi)+\frac{m_{31}}{M}\cos^2(\delta_\eta-\varphi)+\frac{m_{12}}{M}\cos^2(\delta_\zeta-\varphi)=1 \tag{28}$$

und durch Differentiation:

$$\frac{m_{23}}{M}\sin(\delta_\xi-\varphi)\cos(\delta_\xi-\varphi)+\frac{m_{31}}{M}\sin(\delta_\eta-\varphi)\cos(\delta_\eta-\varphi)+\frac{m_{12}}{M}\sin(\delta_\zeta-\varphi)\cos(\delta_\zeta-\varphi)=0.$$

5. Differentialgleichungen in Polarkoordinaten. Der Ausdruck

$$\frac{x_{32}'^2}{m_1}+\frac{x_{13}'^2}{m_2}+\frac{x_{21}'^2}{m_3}=\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2$$

ist das Quadrat der resultierenden Geschwindigkeit des Punktes P. Man findet dafür nach (27) und (28) oder kürzer durch Fluxion den Wert $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2+\varrho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$. Für das Potential der Kräfte ergibt sich durch Einsetzung der Werte von ϱ_{32}, ϱ_{13}, ϱ_{21} aus (27):

$$2\frac{M}{m_1m_2m_3}\left(\frac{m_2m_3}{\varrho_{32}^{n-1}}+\frac{m_3m_1}{\varrho_{13}^{n-1}}+\frac{m_1m_2}{\varrho_{21}^{n-1}}\right)=\frac{1}{\varrho^{n-1}}f(\varphi),$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\mu_1=2\sqrt{\frac{M^{n+1}}{m_1^{n+1}\cdot m_{23}^{n-1}}};\ \mu_2=2\sqrt{\frac{M^{n+1}}{m_2^{n+1}\cdot m_{31}^{n-1}}};\ \mu_3=2\sqrt{\frac{M^{n+1}}{m_3^{n+1}\cdot m_{12}^{n-1}}} \tag{28a}$$

und

$$f(\varphi)=\pm\frac{\mu_1}{\sin^{n-1}(\delta_\xi-\varphi)}\pm\frac{\mu_2}{\sin^{n-1}(\delta_\eta-\varphi)}\pm\frac{\mu_3}{\sin^{n-1}(\delta_\zeta-\varphi)}. \tag{29}$$

Die drei Teile der Funktion $f(\varphi)$ sollen nach ihrer Bedeutung absolute Gröfsen sein; für ungerade n gilt also durchweg das Pluszeichen, für gerade n ist je nach dem Sektor für ein oder zwei Glieder das Minuszeichen zu wählen. Die Gleichungen (21) und (22) gehen über in:

$$\begin{gathered}\frac{d^2(\varrho^2)}{dt^2}-2\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2-2\varrho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{1}{\varrho^{n-1}}f(\varphi)=0\\ \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2-\varrho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\frac{1}{(n-1)\varrho^{n-1}}f(\varphi)-L=0;\quad n\gtrless 1.\end{gathered} \tag{29a}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6. Untersuchung der Funktion $f(\varphi)$. Konstruktion der f-Kurve. Zu jedem Wert von φ gehört ein positiver Wert der Funktion f. Läfst man den Winkel φ durch die sechs Sektoren laufen und trägt man auf dem freien Schenkel die jedesmaligen f-Werte ab, so erhält man eine krumme Linie, die als f-Kurve bezeichnet werden möge. Ihr Verlauf hängt von dem Grade der Fernwirkung n ab. Ist $n > 1$, so folgt aus (29), dafs f für sechs Werte von φ unendlich grofs wird, nämlich für δ_ξ, $\delta_\xi + \pi$; δ_η, $\delta_\eta + \pi$; δ_ζ, $\delta_\zeta + \pi$, d. h. wenn der Punkt P durch eine Spur oder ihre negative Verlängerung geht. Die Kurve besteht in diesem Falle aus sechs von einander getrennten Ästen, die aus dem Unendlichen herunterhängen, und von denen jeder einem Sektor der Spurenebene angehört. Je zwei Scheitelsektoren haben kongruente Kurvenäste.

Erstes Beispiel. Für $n = -1$, d. h. für Anziehungskräfte, die den Massenabständen direkt proportional sind, wird $\mu_1 = 2 m_{23}$ usw. und wegen (28) $f = 2M$. Die entsprechende Kurve ist ein Kreis mit dem Radius $2M$.

Zweites Beispiel. Für quadratische Fernwirkung kann der Verlauf der f-Kurve durch ein einfaches Konstruktionsverfahren festgestellt werden. Sind die drei Massen m_1, m_2, m_3 gegeben, und bezeichnet man ihre Verhältnisse zur Gesamtmasse M durch $\nu_1 = \frac{m_1}{M}$, $\nu_2 = \frac{m_2}{M}$, $\nu_3 = \frac{m_3}{M}$, so sind ν_1, ν_2, ν_3 echte Brüche, deren Summe $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 1$ ist. Aus den Formeln (27a), nämlich jetzt $\cos(\delta_\eta - \delta_\zeta) = -\sqrt{\frac{\nu_2 \nu_3}{\nu_1 + \nu_2 \nu_3}}$ usw. ergeben sich reelle Werte für die stumpfen Winkel zwischen den Spuren. Die Gleichungen (28a) und (29) heifsen für $n = 2$

$$\mu_1 = \frac{2}{\sqrt{M \nu_1^3 (1-\nu_1)}}; \quad \mu_2 = \frac{2}{\sqrt{M \nu_2^3 (1-\nu_2)}}; \quad \mu_3 = \frac{2}{\sqrt{M \nu_3^3 (1-\nu_3)}} \tag{30}$$

und

$$f = f_1 + f_2 + f_3 \text{ wenn } f_1 = \pm \frac{\mu_1}{\sin(\delta_\xi - \varphi)}; \quad f_2 = \pm \frac{\mu_2}{\sin(\delta_\eta - \varphi)}; \quad f_3 = \pm \frac{\mu_3}{\sin(\delta_\zeta - \varphi)}.$$

Die Vorzeichen sind so zu wählen, dafs stets der absolute Wert zur Geltung kommt. Nun entsprechen der Teilgleichung $f_1 = \pm \frac{\mu_1}{\sin(\delta_\xi - \varphi)}$ in der Ebene E zwei zur S_ξ-Spur im Abstande μ_1 gezogene Parallelen. Ebenso werden die beiden anderen Gleichungen für f_2 und f_3 abgebildet, wenn man zur S_η-Spur im Abstand μ_2 und zur S_ζ-Spur im Abstand μ_3 auf beiden Seiten Parallelen zieht. Ein vom Mittelpunkt des Spurensterns nach irgend einer Richtung ausgehender Strahl wird drei von den sechs Parallelen schneiden. Trägt man auf ihm die vom Anfangspunkt bis zu den drei Schnittpunkten gemessenen Strecken hintereinander ab, so erhält man einen Punkt der gesuchten Kurve. Aus dieser Konstruktion ergibt sich als beachtenswerte Eigenschaft, dafs nicht die Spuren selbst, sondern die in den Abständen μ_1, μ_2, μ_3 zu ihnen gezogenen Parallelen Asymptoten sind, so dafs zwei benachbarte Kurvenäste auch im Unendlichen nicht zusammenlaufen, sondern durch Streifen von der Breite $2\mu_1$, $2\mu_2$, $2\mu_3$ getrennt bleiben. Die Breite eines Streifens hängt nur von der Masse eines Körpers und der Gesamtmasse ab, ist aber unabhängig davon, wie sich der Rest der Gesamtmasse auf die beiden anderen Körper verteilt (30).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Drittes Beispiel. Für $n = 0$, d. h. wenn die Kräfte von der Entfernung unabhängig sind, kann man zur Konstruktion der f-Kurve ein ähnliches Verfahren anwenden. Wie (29):

$$f = f_1 + f_2 + f_3; \quad f_1 = \pm \mu_1 \sin(\delta_\xi - \varphi); \quad f_2 = \pm \mu_2 \sin(\delta_\eta - \varphi); \; f_3 = \pm \mu_3 \sin(\delta_\zeta - \varphi)$$

zeigt, hat man nur an die Stelle der drei Doppelparallelen drei Doppelkreise vom Durchmesser μ_1, μ_2, μ_3 zu setzen, die die Spuren S_ξ, S_η, S_ζ im Anfangspunkt von beiden Seiten berühren. Die entstehende Kurve zeigt in jedem Sektor ein Maximum und erleidet in den Spuren eine plötzliche Richtungsänderung, als Ganzes bietet sie das Bild eines sechsmal eingekerbten Blattes dar.

7. Elimination der Zeit. Gleichungen der Bahnlinie. Die Differentialgleichungen (29a) haben wie alle Bewegungsgleichungen, bei denen die Kräfte allein durch die Konfiguration der Massen bedingt werden, die Eigenschaft, dafs die unabhängige Variable t nur in den Abgeleiteten der Raumgröfsen vorkommt. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, die Zeit implicite zu eliminieren.

Der Winkel φ soll von jetzt an zur unabhängigen Variablen gemacht und die Abgeleiteten nach φ durch Strichelung abgekürzt werden, so dafs in den folgenden Rechnungen $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\varphi}$, $\varrho'' = \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}$, $f' = \frac{df}{d\varphi}$ ist.

Dann wird

$$\frac{d\varrho}{dt} = \varrho' \frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{d^2\varrho}{dt^2} = \varrho' \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varrho'' \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2; \quad \frac{df}{dt} = f' \frac{d\varphi}{dt}.$$

$\frac{d^2}{dt^2}(\varrho^2) = 2\varrho\varrho' \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cdot (2\varrho\varrho'' + 2\varrho'^2)$ und die Gleichungen (29a) gehen über in:

$$(31) \quad 2\varrho\varrho' \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 (2\varrho\varrho'' - 2\varrho^2) + \frac{f}{\varrho^{n-1}} = 0; \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\varrho'^2 + \varrho^2}\left(\frac{f}{(n-1)\varrho^{n-1}} + L\right).$$

Erste Form. Wir eliminieren $\frac{d\varphi}{dt}$ und lassen die Frage, ob dauernd $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ sein kann, vorläufig unbeantwortet. Die letzte Gleichung, nach t differentiiert und darauf durch $\frac{d\varphi}{dt}$ dividiert, ergibt:

$$2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{\varrho'^2 + \varrho^2}\left(\frac{f'}{(n-1)\varrho^{n-1}} - \frac{f\varrho'}{\varrho^n}\right) - \frac{2\varrho'\varrho'' + 2\varrho\varrho'}{(\varrho'^2 + \varrho^2)^2}\left(\frac{f}{(n-1)\varrho^{n-1}} + L\right).$$

Werden in die erste Gleichung (31) die Werte für $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ und $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ eingesetzt, so folgt nach einfachen Rechnungen die Differentialgleichung für die Bahnlinie des Punktes P in der Form:

$$(32) \quad 2\varrho''\left(\frac{f}{(n-1)\varrho^{n-2}} + L\varrho\right) + \frac{\varrho'^3 f'}{(n-1)\varrho^n} + \varrho'^2\left(\frac{n-5}{n-1}\frac{f}{\varrho^{n-1}} - 4L\right) + \frac{\varrho' f'}{(n-1)\varrho^{n-2}} + \frac{n-3}{n-1}\frac{f}{\varrho^{n-3}} - 2L\varrho^2 = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zweite Form. Eine andere, für manche Untersuchungen bequemere Gestalt nimmt die Bahnliniengleichung an, wenn aus den Bewegungsgleichungen (29a) nicht die Abgeleiteten des Winkels φ, sondern die des Fahrstrahls ϱ eliminiert werden. Durch eine kleine Umformung der ersten und Differentiation der zweiten nach t erhält man zunächst

$$2\varrho\frac{d^2\varrho}{dt^2}-2\varrho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{f}{\varrho^{n-1}}=0;\ 2\frac{d\varrho}{dt}\cdot\frac{d^2\varrho}{dt^2}+\frac{d}{dt}\left(\varrho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)-\frac{f'}{(n-1)\varrho^{n-1}}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{f}{\varrho^n}\frac{d\varrho}{dt}=0.$$

Wir multiplizieren die letzte Gleichung mit ϱ^2, die erste mit $-\varrho\frac{d\varrho}{dt}$ unter Hinausschiebung der besonderen Untersuchung, ob ϱ oder $\frac{d\varrho}{dt}$ dauernd $=0$ sein können, und erhalten

$$\frac{d}{dt}\left(\varrho^4\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)=\frac{f'}{(n-1)\varrho^{n-3}}\cdot\frac{d\varphi}{dt}. \tag{32a}$$

Zwischenbemerkung. An dieser Stelle könnten wir einen Augenblick Halt machen, um ein Resultat nach Eulers Art unter Dach und Fach zu bringen. Der Ausdruck $\varrho^2\frac{d\varphi}{dt}$ ist das Doppelte der vom Fahrstrahl in der Zeiteinheit beschriebenen Fläche, und die Gleichung (32a) zeigt, dafs der Flächensatz in der Ebene E nicht zustande kommt, es sei denn dauernd $f'=0$. Für das unter 6) erwähnte erste Beispiel, $n=-1$, $f=2M$, ist dieses Verlangen erfüllt. Es wird $\varrho^4\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\mathfrak{M}^2$ konstant. Hieraus und aus der zweiten Gleichung (31) ergeben sich durch Trennung der Variablen:

$$\pm d\varphi=\frac{\mathfrak{M}\,d(\varrho^2)}{2\varrho^2\sqrt{-M\varrho^4+L\varrho^2-\mathfrak{M}^2}};\quad \pm dt=\frac{d(\varrho^2)}{2\sqrt{-M\varrho^4+L\varrho^2-\mathfrak{M}^2}}$$

Die Integrale zeigen Analogien mit dem Zweikörperproblem (10) und (12a) für das Argument ϱ^2. Die Energiekonstante L fällt stets positiv aus, weil das Potential der Kräfte eine negative Gröfse ist. Im Integral haben dagegen M und L die Stellen getauscht, so dafs die Bewegung elliptischen Charakter zeigen wird. Der Prozefs ist zu bezeichnen als lineares Dreikörperproblem für elastische Fernkräfte. —

Durch Einführung des Fluxionswinkels ψ und seiner Beziehungen

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\varrho}{\varrho'};\quad \varrho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\sin^2\psi\cdot\left(\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2+\varrho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)$$

zunächst in (31) und dann in (32a) erhält man:

$$\varrho^4\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\sin^2\psi\left(\frac{f}{(n-1)\varrho^{n-3}}+L\varrho^2\right);\quad \frac{d}{d\varphi}\left[\sin^2\psi\left(\frac{f}{(n-1)\varrho^{n-3}}+L\varrho^2\right)\right]=\frac{f'}{(n-1)\varrho^{n-3}}$$

und nach Ausführung der Rechnung, Division durch $\cos^2\psi$ und Beachtung von $\varrho'\cdot\operatorname{tg}\psi=\varrho$

$$2\operatorname{tg}\psi\cdot\psi'\left(\frac{f}{(n-1)\varrho^{n-3}}+L\varrho^2\right)+\operatorname{tg}\psi\cdot\left(-\frac{n-3}{n-1}\frac{f}{\varrho^{n-3}}+2L\varrho^2\right)=\frac{f'}{(n-1)\varrho^{n-3}}$$

oder:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(33) $$f \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (2\psi' - n + 3) - f' + 2\,L\,(n-1)\,\varrho^{n-1} \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\psi' + 1) = 0$$

eine Gleichung, die aufser der Unabhängigen φ noch zwei abhängige Variable ψ und ϱ enthält. Will man die Beziehung $\frac{\varrho'}{\varrho} = \operatorname{ctg}\psi$ benutzen, um auch ϱ zu entfernen, so hat man zu schreiben:

(34) $$2\,L\,(n-1)\,\varrho^{n-1} = \frac{f' - f\operatorname{tg}\psi \cdot (2\psi' - n + 3)}{\operatorname{tg}\psi \cdot (\psi' + 1)}$$

wo die besonderen Fälle $\operatorname{tg}\psi = 0$ und $\psi' + 1 = 0$ als ausgeschlossen anzusehen sind. Durch Differentiation über den Logarithmus wird daraus mit der neuen Abkürzung $\xi = \operatorname{ctg}\psi$, d. h. $\xi' = -\psi'(1+\xi^2)$ und nach Division durch $1+\xi^2$

$$0 = \xi'' \cdot (-f'\xi - f(n-1)) + 3\,\xi'^2 f' + \xi'[f''\xi + f'(-\xi^2 \cdot n + n - 6) + f\xi(-n^2 + 6n - 5)]$$

(35) $$+ (1+\xi^2) \cdot [-f''\xi + f'(\xi^2(n-1) - n + 3) + f\xi(n-1)(n-3)]$$

Die Energiekonstante L, die an das Auftreten des Fahrstrahls ϱ gebunden erscheint, kommt hierin nicht vor; die Gleichung gilt aber für jeden L-Wert. Aus der Art ihrer Entwickelung ergeben sich mehrere partikulare Lösungen:

1) $\operatorname{tg}\psi = 0$, $\varphi = \text{const.}$, $\xi = \infty$
2) $1 + \xi^2 = 0$; $\xi' = 0$; ξ wird imaginär.
3) $\psi' + 1 = 0$; $\psi + \varphi = \text{const}$; $\xi' = \xi^2 + 1$
4) $f\operatorname{tg}\psi \cdot (2\psi' - n + 3) - f' = 0$; $2\,\xi' + (1+\xi^2)\left(n - 3 + \frac{f'}{f}\xi\right) = 0$

die leicht durch Einsetzung zu verifizieren sind. Die vierte Lösung ist allgemein für $L = 0$, wie aus (34) hervorgeht.

Dritte Form. Eine Bahnliniengleichung, in der gar keine Abgeleiteten vorkommen, ist herstellbar durch Einführung des Krümmungsradius R, der für Polarkoordinaten bekanntlich den Wert:

$R = \frac{(\varrho'^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\,\varrho'^2 - \varrho\varrho''}$ hat. Wegen $\operatorname{ctg}\psi = \frac{\varrho'}{\varrho}$, $\sin^2\psi = \frac{\varrho^2}{\varrho'^2 + \varrho^2}$, $\psi' = \frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho'^2 + \varrho^2}$,

(35a) $$\psi' + 1 = \frac{\varrho^2 + 2\,\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho'^2 + \varrho^2} \text{ wird } R = \frac{\varrho}{\sin\psi\,(1+\psi')};\ \psi' + 1 = \frac{\varrho}{R \cdot \sin\psi}$$

und nach (33):

(36) $$2\,\varrho\,(f + L\,(n-1)\,\varrho^{n-1}) - R\,(f'\cos\psi + f\,(n-1)\sin\psi) = 0$$

8. Integration der Zeit. An eine allgemeine Auflösung der Differentialgleichungen (32) oder (35) ist wohl nicht zu denken. Ihre Verwendbarkeit besteht darin, dafs sie, sobald über den Grad der Fernwirkung n und über die Konstante L oder auch über die Daten des Anfangszustandes bestimmte Annahmen vorliegen, die zu lösenden Gleichungen schnell liefern. Gelingt es in einem solchen Falle, eine der Gleichungen aufzulösen, so verläuft die Schlufsrechnung, soweit der Physiker daran beteiligt ist, mühelos. Aus (35) erhielte man ξ als Funktion des Winkels φ, dann könnte aus $\frac{\varrho'}{\varrho} = \xi$ auch der Fahrstrahl ϱ durch die unabhängige Variable ausgedrückt werden. Die Gleichung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(32) würde dasselbe direkt leisten. Aus (31) würde sich ergeben $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = F(\varphi)$; $t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} + \text{const.}$, wo nunmehr $F(\varphi)$ bekannt wäre. Durch ein Umkehrungsverfahren müfste man φ und damit auch ϱ als Funktionen der Zeit darstellen. Endlich würden die Gleichungen (27) die Abstände der Massen für beliebige Zeitpunkte ergeben. Die Aufsuchung der unbestimmten Integrale und der Ermittelung eines geeigneten Umkehrungsverfahrens können freilich noch erhebliche Schwierigkeiten bieten; es ist denkbar, dafs die gebräuchlichen Funktionen garnicht dazu ausreichen, dafs es notwendig wird, neue zweckentsprechende Funktionen zu ersinnen. Das sind aber rein mathematische Angelegenheiten, das mechanische Problem ist mit der Trennung der Variablen gelöst.

V.

Besondere Annahmen über den Anfangszustand. Pendelnde Bewegungen.

Die Bewegungen der drei gravitierenden Massen können unter Umständen aufserordentlich einfache Formen annehmen. In einigen Fällen gelingt sogar die Auflösung für das ebene Problem. Wir betrachten hauptsächlich diejenigen Sonderannahmen des linearen Prozesses, die sich aus den bisherigen Rechnungen als partikulare Lösungen von selbst darbieten.

1. Die Annahme $\varrho = 0$. Die drei Körper fallen gleichzeitig zusammen. In der Natur würde dadurch das Ende des Bewegungsprozesses angezeigt werden; in der Rechnung, wo die Massenpunkte sich gegenseitig durchdringen oder umkehren können, würde für $\varrho = 0$ der Punkt P durch den Anfang der Spurenebene gehen. Dagegen ist es für die Rechnung unstatthaft, die Gleichung $\varrho = 0$ dauernd gelten zu lassen. Dann würden die Massen zusammen bleiben, was in der Natur sehr wohl möglich ist; die Differentialgleichungen würden aber die unbestimmte Form $\infty - \infty$ annehmen und gegenstandslos werden.

2. Die Annahme $\frac{d\varrho}{dt} = 0$. Der Fahrstrahl ϱ bekommt einen konstanten Wert, der Punkt P beschreibt eine kreisförmige Bahn, und die Bewegungsgleichungen sind nach (29a):

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{f}{2\varrho^{n-3}} = \frac{f}{(n-1)\varrho^{n-3}} + \frac{L}{\varrho^2}.$$

Ein Bestehen dieser Doppelgleichung ist für beliebige φ-Werte nur möglich, wenn $n = 3$ und $L = 0$ ist. Da die Funktion f nur von φ abhängt, so ist dann die Trennung der Variablen durchführbar (29):

$$f = \frac{\mu_1}{\sin^2(\delta_\xi - \varphi)} + \frac{\mu_2}{\sin^2(\delta_\eta - \varphi)} + \frac{\mu_3}{\sin^2(\delta_\zeta - \varphi)}; \quad dt = \pm \frac{\sqrt{2} \cdot d\varphi}{\sqrt{f}} \tag{37}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf