führen, dafs für den Zeitpunkt $t = 0$ die Differentialgleichungen der Bewegung versagen, sie nehmen die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an. Auch erkennt man aus der Gleichung (15a), dafs strenggenommen ϱ und t die Rollen vertauscht haben. Die Zeit t sollte die unabhängige Variable sein, aber die Raumgröfse ϱ nimmt ihr bei der Ausführug der Integration diese Rolle ab, und der Zeichenwechsel von $+ dt$ nach $- dt$ würde von rein mathematischem Standpunkt aus verlangen, dafs für einen gewissen ϱwert die Zeit t einmal zum Stillstand kommt und nachher rückwärts läuft, was naturwidrig ist. Wir schliefsen, dafs physikalisch keiner der beiden Fälle, mathematisch aber beide zulässig sind, und dafs, wenn bei gröfseren Bewegungsprozessen mit dem Zusammenstofs zweier Körper zu rechnen ist, die Gleichungen eine Behandlung fordern, die beiden Möglichkeiten gerecht wird.

III.

Allgemeines über die Bewegung dreier Körper.

Die im vorhergehenden Abschnitt besprochenen Bewegungen setzen ein freies System zweier Körper voraus, welches in der Natur sich nicht vorfindet. Die Beobachtungen zeigen, dafs die Planeten nur annähernd die Örter einnehmen, die ihnen durch die Keplerschen Gesetze zugewiesen werden, und Newton erkannte als Ursache der Abweichungen die gegenseitige Anziehung der Planeten selbst. Die elliptischen Bahnen der Planeten, die pseudoparabolischen der Kometen werden nur deshalb nicht gänzlich verwischt, weil den gewaltigen von der Sonne ausgehenden Kräften gegenüber die unter den einzelnen Gliedern des Sonnensystems auftretenden Anziehungen geringfügig sind, weil sie jener Hauptkraft gegenüber nicht zerstörend, sondern nur störend wirken. Einige „Störungen“ sind von Newton selbst berechnet, die weitere Ausbildung der Störungstheorie ist neben Euler den grofsen französischen Mathematikern (Lagrange, Laplace) zu verdanken. Man kann sich, um ein ungefähres Bild der Vorgänge zu gewinnen, eine regelrecht verlaufende Planetenbewegung vorstellen und einen dritten Himmelskörper hinzutreten lassen. Steht der Störenfried vor dem Planeten in der Richtung seiner Geschwindigkeit, so wird er die Bewegung beschleunigen, steht er hinter ihm, so wird er die Bewegung zu hemmen suchen, in Konjunktion mit der Sonne wird er die Sonnenkraft unterstützen, in der Oppositionsstellung wird er der Sonne entgegenwirken, und nimmt er alle diese Stellungen der Reihe nach an, so wird er den gestörten Planeten veranlassen, um seinen von der Sonne vorgezeichneten Ort noch eine kleine Extratour zu unternehmen. Als günstig für die Stabilität des Sonnensystems kommt dabei der Umstand in Betracht, dafs die Umlaufszeiten der Planeten inkommensurable Gröfsen sind. Wenn sich die Jahreslängen zweier benachbarten Planeten genau wie 1 : 2 verhielten, so würden sich die gegenseitigen Störungen immer an denselben Stellen der Bahn in demselben Sinne wiederholen, und aus vielen kleinen Änderungen würde im Laufe der Zeit eine grofse Veränderung entstehen. Günstig für die Störungstheorie ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ferner die Tatsache, dafs die Planetenbahnen nur wenig gegeneinander geneigt und nahezu kreisförmig sind, so dafs Neigungswinkel und Exzentrizitäten als kleine Gröfsen in die Rechnung treten.

Arago versteht unter dem „Problem der drei Körper“ die Aufgabe, die Bewegung eines der Anziehung zweier anderen Himmelskörper unterworfenen Gestirnes zu bestimmen; er fügt hinzu, sein Landsmann Clairaut sei der Erste gewesen, der das Problem gelöst habe. Das ist der Standpunkt des Astronomen. Er nimmt zwar drei Körper des Sonnensystems heraus, etwa Sonne, Erde und Mond, oder Sonne, Jupiter und Saturn, berechnet aber nur die Bewegungen eines einzigen Körpers. Die Sonne, der zweite Körper, wird wegen ihrer dominierenden Masse als ruhend angenommen, die Bewegung des dritten, störenden Körpers wird in den Hauptzügen als bekannt angesehen. So ergibt sich die Möglichkeit, die einzelnen Teile der gesuchten Bewegung in unendliche Reihen aufzulösen, die in den Nennern die überwiegenden Gröfsen, in den Zählern die kleinen Gröfsen aufweisen, so dafs eine schnelle Konvergenz erzielt wird. Im Endergebnis wird dann die Bewegung des Gestirnes nicht durch eine in sich geschlossene mathematische Formel dargestellt, es ergibt sich vielmehr eine elliptische Grundbewegung, deren Elemente (Neigung der Bahn, Knoten, grofse Achse, Exzentrizität, Umlaufszeit) säkularen Schwankungen ausgesetzt sind, und die aufserdem noch periodische Ungleichheiten von kürzerer Dauer zeigt. Die rechnende Astronomie hat durch Glanzleistungen menschlichen Scharfsinns Beobachtungen und Hypothese in Einklang gebracht; sie hat den letzten Planeten Neptun, der die Uranusbahn stört, früher in ihren Gleichungen entdeckt, als er im Fernrohr des beobachtenden Astronomen erschien, ein Beweis, dafs das Problem der drei Körper, soweit das Sonnensystem in Frage kommt, von den Astronomen gelöst ist.

Gehen wir über das Sonnengebiet hinaus, so ändert sich die Sachlage. In den Tiefen des Weltraums gibt es doppelte, dreifache und vielfache Sterne; es ist nicht ausgeschlossen, dafs unter den dreifachen sich Systeme annähernd gleicher Massen mit starken Neigungen und grofsen Exzentrizitäten finden. Dort fehlen die Umstände, die die Störungstheorie begünstigen und ihre Erfolge möglich machen. Wir stehen vor dem Dreikörperproblem im mathematischen Sinne: die allgemeine Auflösung für die gravitierenden Bewegungen dreier Punkte zu suchen. Die Beobachtungen fallen aus wegen der weiten Entfernung und der Langsamkeit der Stellungsänderungen; von der Lösung des Problems sind wir ebenfalls weit entfernt, und die Fortschritte geschehen sehr langsam. Eine Zusammenstellung der Literatur über dieses berühmte Problem würde bei einiger Vollständigkeit allein eine Programmabhandlung füllen, die sicheren Resultate lassen sich auf eine Seite zusammendrängen, sie gehen wenig über das hinaus, was von zwei Körpern bekannt ist. Es ist hier nicht der Ort, auf Einzelheiten der Literatur einzugehen. Nur eine Bemerkung kann ich nicht unterdrücken. Es will mir scheinen, dafs die Störungstheorie ihren Namen mit Recht führt: sie hat sogar das Problem der drei Körper gestört. Was dem Astronomen geboten ist, ist dem Physiker noch nicht erlaubt. Die meisten Lösungsversuche gehen sofort mit unendlichen Reihenentwickelungen nach Taylor und Maclaurin ins Geschirr, bald kommen sie in die Lage, vereinfachende Annahmen machen zu müssen, und damit sind sie im Fahrwasser der Störungstheorie angelangt. Unendliche Reihen sind unentbehrlich, aber sie gehören der reinen Mathematik an, die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bei Naturproblemen erst an letzter Stelle zum entscheidenden Worte kommt. Man sollte mit den Reihenentwickelungen warten, bis alles, aber auch alles zusammengetragen ist, was eindringende kinematische und geometrische Überlegung über den Gesamtverlauf des Prozesses ausmachen kann.

Die Differentialgleichungen für Newton'sche Fernwirkung:

$$x_1'' = \frac{m_2 x_{21}}{\varrho_{21}^3} - \frac{m_3 x_{13}}{\varrho_{13}^3}$$

und acht andere, die durch zyklische Vertauschung über die Massen m_1, m_2, m_3 und die Achsen x, y, z zu bilden sind, erfordern die Auffindung von achtzehn Integrationskonstanten. Sechs davon werden durch die Schwerpunktssätze bestimmt und sind sämtlich Null, wenn der Schwerpunkt zum Anfang des Koordinatensystems gemacht wird:

$$m_1 x_1'' + m_2 x_2'' + m_3 x_3'' = 0; \quad m_1 x_1' + m_2 x_2' + m_3 x_3' = 0; \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$$

und sechs entsprechende für y und z. Die Beziehungen

$$x_1 = -\frac{m_2}{M} x_{21} + \frac{m_3}{M} x_{13} \text{ usw.}; \quad M = m_1 + m_2 + m_3 \tag{17}$$

zeigen dann, wie die Bewegung der einzelnen Massen durch die relativen Bewegungen je zweier Massen bestimmt werden kann. Die Differentialgleichungen für die relativen Bewegungen:

$$x_{21}'' = -\frac{M x_{21}}{\varrho_{21}^3} + m_3 \left(\frac{x_{21}}{\varrho_{21}^3} + \frac{x_{32}}{\varrho_{32}^3} + \frac{x_{13}}{\varrho_{13}^3} \right) \text{ usw.}; \quad x_{21} + x_{32} + x_{13} = 0$$

führen durch nochmalige Elimination der Fernkräfte auf die integrablen Kombinationen der Flächensätze:

$$\frac{y_{21} z_{21}'' - z_{21} y_{21}''}{m_3} + \frac{y_{32} z_{32}'' - z_{32} y_{32}''}{m_1} + \frac{y_{13} z_{13}'' - z_{13} y_{13}''}{m_2} = 0 \text{ usw.}$$

$$\frac{y_{21} z_{21}' - z_{21} y_{21}'}{m_3} + \frac{y_{32} z_{32}' - z_{32} y_{32}'}{m_1} + \frac{y_{13} z_{13}' - z_{13} y_{13}'}{m_2} = \mathfrak{M}_x \text{ usw.} \tag{18}$$

und durch Elimination der Zeit (4a) auf den Energiesatz:

$$\frac{r_{21}^2}{m_3} + \frac{r_{32}^2}{m_1} + \frac{r_{13}^2}{m_2} = 2 \frac{M}{m_1 m_2 m_3} \left(\frac{m_1 m_2}{\varrho_{21}} + \frac{m_2 m_3}{\varrho_{32}} + \frac{m_3 m_1}{\varrho_{13}} \right) + L.$$

Von den übrigen acht Integrationskonstanten ist trotz aller Anstrengungen nicht eine einzige entdeckt worden; man hat den Nachweis versucht, dafs nicht mehr gefunden werden können. Die Schwerpunktssätze, die Flächensätze und den Energiesatz pflegt man als die sieben allgemeinen Integrale zu bezeichnen, obgleich es eigentlich zehn sind, denn die Schwerpunktssätze zählen doppelt. Sie gelten für zwei und für drei Massen und überhaupt für jedes freie System, wenn nur die bei der Bewegung zweier Körper angegebenen Voraussetzungen zutreffen: Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, zentrale Fernwirkung und konservative Kräfte.

Die geometrische Bedeutung der Flächensätze (18) kann, wie folgt, erklärt werden. Bildet man für jedes Massenpaar aus der Entfernung ϱ_i und der resultierenden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

relativen Geschwindigkeit r_i ein Parallelogramm (das Doppelte des vom Fahrstrahl in der Zeiteinheit beschriebenen Flächenraums), dividiert den Inhalt dieses Parallelogramms durch die dritte Masse und betrachtet den Quotienten als eine Linie, die auf der Ebene des Parallelogramms senkrecht steht, so ergibt die geometrische Zusammensetzung der drei Normalen eine nach Gröfse und Richtung unveränderliche Resultante:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}$$

als Normale der invariablen Ebene. Eine zweckmäfsige Umformung der Flächensätze erhält man durch Einführung des Dreiecks der drei Massen und seiner Projektionen J_{yz}, J_{zx}, J_{xy}. Es wird:

$$2\,J_{yz} = y_{21} z_{32} - y_{32} z_{21} = y_{21} z_3 + y_{32} z_1 + y_{13} z_2 \text{ usw.}$$

Der Einfachheit wegen werde die invariable Ebene zur x, y ebene gemacht, dann wird $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y = 0$, $\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}$. Werden die Gleichungen (18) nach x_{21}, y_{21}, z_{21} usw. oder nach x_3, y_3, z_3 usw. projiziert, so ergibt sich, mit Beachtung von (17), leicht:

$$x_3' J_{yz} + y_3' J_x + z_3' J_{xy} = \frac{\mathfrak{M} \cdot m_1 m_2}{2\,M} z_{21} \text{ usw.}$$

$$x_{21}' J_{yz} + y_{21}' J_{zx} + z_{21}' J_{xy} = -\frac{\mathfrak{M} \cdot m_3}{2} z_3 \text{ usw.}$$

Daraus folgt: Liegen die drei Massen in einer geraden Linie, $J_{yz} = J_{zx} = J_{xy} = 0$, so sind alle $z_i = 0$, d. h. alle Bedeckungen (Eklipsen) finden in der invariablen Ebene statt. Liegen zu irgend einer Zeit zwei Massen in der invariablen Ebene, so liegt die dritte Masse auch darin. Für diesen Augenblick schrumpfen die Gleichungen wegen $J_{yz} = 0$, $J_{zx} = 0$, zusammen zu $z_i' J_{xy} = 0$. Sind nun die zur invariablen Ebene senkrechten Geschwindigkeitskomponenten von Null verschieden, so mufs $J_{xy} = 0$ sein, d. h. die drei Massen befinden sich, für $z_i' \gtrless 0$, nur dann gleichzeitig in der invariablen Ebene, wenn sie in einer geraden Linie liegen. Ist aber J_{xy} von Null verschieden, so sind alle $z_i' = 0$, d. h. nicht nur die Massen, sondern auch ihre Geschwindigkeiten liegen in der invariablen Ebene. Dann wird die ganze Bewegung dauernd auf diese Ebene beschränkt bleiben, da für ein Ausweichen nach oben oder unten keine Ursache vorhanden ist. Liegen endlich die drei Massen in einer geraden Linie, die auch die Richtungen der Geschwindigkeiten aufnimmt, so bleibt der Prozefs aus demselben Grunde dauernd linear. Das Problem der drei Körper kann demnach ein räumliches, ebenes oder lineares sein.

IV.

Drei gravitierende Körper in gerader Linie.

1. Aufstellung der Differentialgleichungen. Drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 in freiem System sollen zu irgend einer Zeit t in einer geraden Linie liegen, und die Richtungen ihrer Bewegung sollen in dieselbe, als x-Achse angenommene Gerade fallen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf