übrigen Gestirne, ja die ganze Körperwelt, so weit sie reichen mag, als Einheit: ihre Bewegungen sind in den Gleichungen festgelegt. Wer aber beschafft und hält die Uhr, nach der die Ortsveränderung gemessen werden soll, wenn nur der eine Körper sich im Raum befindet? Wer bürgt dafür, dafs sich das Koordinatenkreuz nicht selbst bewegt, oder auf welchen Punkt will man die Ruhe des Koordinatenanfangs beziehen? Es ist offenbar, dafs wir für einen Körper im Raum, sagen wir für die gesamte Körperwelt, als Einheit aufgefafst, nicht entscheiden können, ob Ruhe oder Bewegung herrscht, nach welcher Richtung sie sich bewegt, ob schnell oder langsam. Nur zweierlei folgt mit Bestimmtheit aus der durch alle Erfahrung gestützten Hypothese: die Richtungen im Raum sind bestimmt, (eine Drehung der Koordinatenachsen würde die Gestalt der Differentialgleichungen völlig verändern,) und der Verlauf der Zeit oder dessen, was wir Zeit nennen, ist mit derselben Notwendigkeit gleichmäfsig, mit der wir die Längeneinheit als konstant betrachten.

Wollte man, was verfrüht ist, eine Anschauungslehre auf kinematischer Grundlage aufbauen, so müfste man von der Definition ausgehen: Die Bewegung eines ungestörten Körpers bestimmt durch ihre Richtung die gerade Linie im Raum und durch ihren Verlauf die als gleich anzusehenden Zeitabschnitte.

II.

Die Bewegung zweier Körper.

1. Beobachtungen. Die soeben besprochene Bewegung würde die einfachste und genaueste Uhr abgeben, die man sich denken kann; sie findet aber nirgends und niemals statt. Periodisch wiederkehrende Bewegungen von völlig gleichwertiger Dauer künstlich zu erzeugen, wie es der Uhrmacher anstrebt, oder im Lauf der Gestirne nachzuweisen glückt nur bis zu einem gewissen Grade. Wir leben in einer Welt der Störungen. Das Gesetz der Trägheit verliert aber nichts von seinem Wert dadurch, dafs es in keinem Falle ungehindert zur Geltung kommt. Der Physiker, der in der Natur seine grofse Aufgabensammlung vor sich sieht, mufs auch die Kunst besitzen, in dieser Sammlung zu lesen; er mufs trennen, abstrahieren, das Wesentliche herausheben und zusammenfassen können, sonst wird er in jedem kleinen Teil der Natur die Gesamtheit der physikalischen Disziplinen mit allen ihren Verwickelungen vorfinden. Es geht ihm in dieser Hinsicht wie dem Maler, dem Bildhauer, dem Dichter, die auch die Natur nicht zu genau kopieren dürfen, wenn ihre Werke nicht überladen erscheinen sollen. Wie schwer es ist, aus der realen Verwirrung das einfache Ideal herauszufinden, tritt uns bei den vielen mifsglückten Versuchen entgegen, die Bewegung zweier Körper richtig zu deuten. Im ganzen Altertum und bis in die neue Zeit hinein eine Kette von Irrtümern. Dafs zwei durch einen Zwischenraum getrennte Körper an der Erdoberfläche sich gegenseitig beeinflussen, hat man in früherer Zeit nicht gewufst, und das ist ver-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zeihlich, denn es ist schwer nachzuweisen. In dem Umstand, dafs ein geworfener Körper sich von der Erde entfernt und wieder zur Erde zurückkehrt, hat man nichts Auffallendes gesehen, es ist zu leicht, zu selbstverständlich. Bildet die Erde den einen, Sonne, Mond oder ein Planet den andern Körper, so tritt in dem hochgepriesenen Ptolemäischen System die angenommene Mittelpunktsstellung der Erde als grobe Fehlerquelle auf, die von den Planeten wunderlich verschlungene, epizykloidenartige Bahnen fordert. Kopernikus, der die Sonne als gröfsten Körper in die Mitte stellte, vereinfachte die Bewegungen und verkleinerte die Fehler ganz erheblich, in theoretischer Strenge ist seine heliozentrische Auffassung ebenso unzulässig wie die geozentrische des Ptolemäus. Kepler's Gesetze sind aus den Beobachtungen mit erstaunlicher Ausdauer berechnete Erfahrungsresultate, sie beziehen sich auf die Tatsachen, nicht auf die Ursache der Bewegungen. Wohl hat Kepler geahnt, dafs die Sonne, die Quelle des Lichtes, auch der Sitz der Kraft sein kann, die die Planeten fesselt; aber ohne Kenntnis der Logarithmen und der höheren Mathematik war es ihm nicht vergönnt, das richtig Erkannte auch richtig zu erklären.

2. Hypothese. Es ist leicht einzusehen, dafs ein Körper nur durch andere Körper veranlafst werden kann, auf seine träge Bewegung zu verzichten, denn ohne die andern Körper wäre er allein im Raum und würde geradeaus gehen. Der deutsche Sprachgebrauch weist, wie Helmholtz sagte, schon darauf hin, dafs die Ursache einer Veränderung wiederum eine Sache, d. h. ein Körper sein müsse. Die Materie, die bisher nur Objekt der Bewegung war, wird damit zum Subjekt für andere, von ihr hervorgerufene Bewegungen erhoben. Die naturwissenschaftliche Hypothese für die Bewegung zweier Körper aufgestellt zu haben, ist das unsterbliche Verdienst Newton's. Nach seiner Ansicht findet zwischen beiden eine Anziehung statt, die den Massen direkt, dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist, die also mathematisch ausgedrückt wird durch $G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\varrho^2}$, wenn m_1 und m_2 die Massen (die Mengen der in den Körpern vereinigten Materie), ϱ ihren geradlinigen Abstand und G den sogenannten Gravitationsfaktor bedeuten, dessen Wert von der Intensität der Massenwirkung und von der Wahl der Einheiten abhängt. Zum Verständnis der Newton'schen Hypothese und ihrer rechnungsmäfsigen Anwendung sind einige Bemerkungen unerläfslich:

a) Was zwei Körpern recht ist, ist allen Körpern billig. Zwischen je zwei Körpern wird die durch die Hypothese bedingte Anziehung anzunehmen sein. So gelangte Newton zu der Idee der allgemeinen Gravitation, die lange Zeit als sicherstes und oberstes Naturgesetz gegolten hat und neuerdings Gefahr läuft, wieder abgesetzt zu werden.

b) Der Gravitationsfaktor G, dessen Bestimmung für die praktische Physik und Astronomie von der gröfsten Bedeutung ist, wird bei theoretischen Untersuchungen fortgelassen. Man setzt eine Wahl der Einheiten voraus, bei der er den Wert 1 annimmt, oder man zieht die Quadratwurzel aus G in die Masse hinein und setzt für $\sqrt{G} \cdot m$ wieder das Zeichen m.

c) Jeder Körper hat räumliche Ausdehnung, der Abstand ϱ kann aber nur von Punkt zu Punkt gemessen werden. Man denkt sich daher die Materie der Körper in ihrem Schwerpunkt vereinigt und betrachtet ϱ als Abstand der Schwerpunkte. Dazu

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

berechtigen die von Newton gefundenen Sätze, dafs eine Kugel von konzentrisch homogener Dichtigkeit auf einen äufseren Punkt so wirkt, als läge ihre ganze Masse im Mittelpunkt, und umgekehrt; ferner dafs eine Hohlkugel auf einen Punkt im Innern Kräfte ausübt, die sich gegenseitig aufheben, d. h. die Resultierende Null ergeben. Weicht ein Körper, wie die Erde, von der Kugelgestalt ab, so ist die vereinfachende Annahme nicht mehr zulässig; die Bewegung des Mondes wird durch die Abplattung der Erde beeinflufst. Wenn man in theoretischer Verallgemeinerung den Grad der Fernwirkung ändert, etwa Anziehung oder Abstofsung annimmt, die der dritten oder fünften Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist, so gilt die einfache Rechnung von Punkt zu Punkt nur näherungsweise für grofse Abstände und kleine Körper.

d) Einen harten Straufs hat die Newton'sche Hypothese gegen den philosophischen Einwurf zu bestehen, dafs eine unvermittelte Fernwirkung denkwidrig sei. Wie ein Körper nicht an einer Stelle in Raum und Zeit verschwinden, an einer andern wiedererscheinen kann, so kann er auch die Eigenschaften, die ihm als Subjekt der Bewegung innenwohnen, nicht mit Überspringung eines völlig unbeteiligten Zwischenraumes auf andere Körper wirken lassen. Es wäre ein törichtes Beginnen, einen so klaren Gedanken bekämpfen zu wollen, etwa in der lobenswerten Absicht, den Standpunkt eines grofsen Meisters zu verteidigen. Verständiger ist es, den Philosophen, die eine direkte Wirkung in der Ferne für unmöglich erklären, unumwunden zuzustimmen. Die Annahme, ein Körper könne in weit entlegenen Gebieten des Raumes plötzlich Eigenschaften entfalten, die ohne jedes materielle Substrat dahingelangt sind, mutet in der Tat dem Körper Kunststückchen zu, die an Zauberei grenzen und einen Verzicht auf eine natürliche Erklärung des Natürlichen in sich schliefsen. Der Vorwurf der Widersinnigkeit trifft aber nicht Newton, sondern seine gedankenlosen Nachbeter, die in der Gravitation als der Urkraft der Materie ein Dogma feierten, bei dem die Frage Warum ein Frevel an der Heiligkeit der Wissenschaft ist. Newton hat nur behauptet, sogar mit einigem Widerstreben, dafs die Gravitationshypothese ein geeignetes Mittel sei, die beim geworfenen Stein und bei den kreisenden Himmelskörpern beobachteten Bewegungen demselben mathematischen Gesetz zu unterwerfen. Eine spätere Zeit wird entscheiden, wie die Massenanziehung zweier Körper auf primäre Kraftäufserungen der Materie zurückzuführen ist. Man wird dann vielleicht erkennen, dafs das Geltungsgebiet der Hypothese, sofern sie sich auf die sogenannten ponderabelen Körper bezieht, ein beschränktes ist. Für molekulare Abstände der Massenteilchen ist das schon lange festgestellt. Hat man doch in der Theorie der Gase an die Stelle der Anziehung die Abstofsung, an die Stelle der zweiten Potenz aus Opportunitätsgründen die fünfte Potenz setzen müssen. In neuester Zeit wollen auch die Kometen nicht mehr recht dem Gesetz gehorchen, wenn sie dem mächtigen Sonnenkörper zu nahe kommen. Man munkelt sogar vom Merkur, dafs er Zeichen von Unbotmäfsigkeit an den Tag legt. Wer weifs, welche weiteren Enthüllungen die Zukunft bringen wird, ob man nicht, wenn man sucht, auch eine obere Grenze für die Gültigkeit der Gravitationshypothese finden kann, ob nicht bei sehr grofsen Entfernungen, ebenso wie bei sehr kleinen, Einflüsse die Oberhand gewinnen, die im Gebiete der Gültigkeit des Gesetzes zurücktreten. Was aber auch die Zukunft lehren wird, es wird nur dazu dienen, die Newton'sche Hypothese, von den Schlacken des Unverstandes gereinigt, als das erscheinen zu lassen, was sie ist: ein Meister-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

stück in der Kunst, aus dem Buche der Natur einfache mathematische Gesetze herauszulesen.

3. Differentialgleichungen. Eine gewissenhafte Würdigung der Schwierigkeiten und scheinbaren Widersprüche, die sich bei der mathematischen Behandlung der Bewegungsprozesse einstellen, ist untrennbar von der Erwägung, dafs die höhere Mathematik aus drei Quellen entstanden ist, die sich nicht ganz miteinander vermischen können, weil sie aus verschiedenen Gebieten der Erkenntnis fliefsen. Die drei Quellen können durch die Namen Newton, Descartes, Leibniz gekennzeichnet werden; sie verhalten sich zu einander wie Kinematik, Geometrie und Arithmetik.

Newton wandte bei seinen Untersuchungen die sogenannte Fluxionsmethode an, die er von seinen englischen Vorgängern übernommen hatte, aber dahin ausbildete, dafs er die Zeit als eine dem Raum ebenbürtige Gröfse einführte, die ihre eigenen, von dem Zwange mathematischer Formeln unabhängigen Gesetze hat. Er geht gewissermafsen dem zu ergründenden Problem unmittelbarer und schärfer auf den Leib, als es vor ihm geschah. Seine Fluxionsmethode ist einem edlen Renner vergleichbar, der rasch und sicher das Ziel erreicht, wenn er von Meisterhand gelenkt wird, aber unerfahrene Reiter nicht duldet. Newton hat keine Nachfolger gefunden; wer sich aber an kinematischer Genialität erfrischen will, der lese die Principia Mathematica. Ein bekanntes Beispiel für die Fluxionen, vielleicht das einzige, das sich in die moderne Mathematik hinübergerettet hat, ist in der gegenwärtigen Abhandlung bei der Formel (7) und sonst mehrfach mit Vorteil benutzt worden.

In der französischen, von Descartes begründeten Mathematikerschule wird die Zeit gleichsam durch eine Hintertür in die Rechnung eingeführt. Man benutzte sie zuerst als eine Art Parameter der Veränderlichkeit bei der Untersuchung geometrischer Kurven (Tangentenproblem, Zykloide), und teilte ihr dann für Bewegungsprozesse die Rolle einer unabhängigen Variablen t zu, während die Koordinaten des Raumes als von t abhängige Gröfsen auftreten. Diese Methode verwandelt Newton's Vollblutpferd in einen sanften Karrengaul, der im Anfang der Reise fast jedem gehorcht, dafür freilich oft genug unterwegs versagt, so dafs der Fortgang der Fahrt nur durch allerhand künstliche Mittel erreicht werden kann, wenn man nicht gar vom Wege abkommt und das Ziel aus dem Auge verliert.

Leibniz und seine deutschen Mitarbeiter haben den Formalismus der höheren Mathematik ersonnen, sie haben die Bedeutung des Zeichens $\frac{dy}{dx}$ festgestellt, das Rechnungsverfahren mit dem neuen Symbol ausgebildet, oder wissenschaftlich zu reden, sie haben den Algorithmus der Infinitesimalrechnung erfunden. Ihre Resultate gehören der reinen Gröfsenlehre ohne Rücksicht auf Raum und Zeit an und sind daher für jede höhere Rechnung unentbehrlich.

Bei der Behandlung der Bewegungsprozesse hat die französische Methode über Newton den Sieg davongetragen. Sie ist ausgezeichnet durch die Eleganz, mit der sie das mathematische Verfahren inszeniert; ihr Gang ist sicher, so lange es sich um Probleme handelt, wie die Bewegung zweier Körper, bei denen man, durch Kepler's und Newton's Arbeiten, das Resultat schon kennt. Auf unbekanntem Gebiet ist die Gefahr grofs, dafs man ins Ungewisse hineinrechnet, sobald es nicht mehr gelingt, die arith-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

metischen Operationen durch Vergleichung mit natürlichen Vorgängen zu kontrollieren. Die anfängliche Leichtigkeit wird dann durch grofse Schwierigkeiten abgelöst, die Gleichungen gehen ins Breite bis zur vollendeten Unübersichtlichkeit, und eine Enttäuschung folgt der anderen, wie ungezählte Beispiele beweisen.

Wir betrachten hier in aller Kürze nach Art des Lagrange, wenn auch in veränderter Form, die Bewegungen zweier Körper, um das an ihnen zu zeigen, was für alle Gravitationsprobleme gilt, und um einige Anhaltspunkte für die folgenden Rechnungen zu gewinnen.

Zwei als Punkte auffafsbare Massen m_1 und m_2 seien im Raum frei beweglich. Zwischen ihnen soll eine Anziehungskraft bestehen, die in der Richtung der geraden Verbindungslinie ϱ wirkt, den Massen proportional und eine Funktion $f(\varrho)$ der Entfernung ist. Aus den sechs rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 bilden wir die Beziehungen $x_{21} = x_2 - x_1$; $x_{12} = x_1 - x_2$, also $x_{21} = - x_{12}$ usw., ferner $\varrho^2 = x_{21}^2 + y_{21}^2 + z_{21}^2$, wo ϱ der absolute Wert des Abstandes sein soll. Bei freier Bewegung der einzelnen Massen, d. h. für $f(\varrho) = 0$, wären die Geschwindigkeitskomponenten x_1', y_1', z_1' usw. konstant, die Beschleunigungskomponenten x_1'', y_1'', z_1'' usw. Null. Bei der vorausgesetzten gegenseitigen Beeinflussung entsteht durch rechtwinklige Projektion auf die Achsen:

$$\begin{aligned} x_1'' &= - f \frac{m_2 x_{12}}{\varrho}; \quad x_2'' = - f \frac{m_1 x_{21}}{\varrho} \\ y_1'' &= - f \frac{m_2 y_{12}}{\varrho}; \quad y_2'' = - f \frac{m_1 y_{21}}{\varrho} \\ z_1'' &= - f \frac{m_2 z_{12}}{\varrho}; \quad z_2'' = - f \frac{m_1 z_{21}}{\varrho} \end{aligned} \tag{1}$$

Die allgemeine Lösung dieser sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung verlangt zwölf Integrationskonstanten, die durch die sechs Koordinaten und die sechs Geschwindigkeitskomponenten eines als bekannt anzusehenden Anfangszustandes zu bestimmen sind.

Der erste Schritt zur Lösung besteht in der Elimination der Funktion f aus je zwei Gleichungen derselben Richtung, d. h. in der Ausnutzung des Umstandes, dafs die Beschleunigungen den Massen proportional sein sollen. Man erhält mit zweimaliger Integration:

$$\begin{array}{l|l|l} m_1 x_1'' + m_2 x_2'' = 0 & m_1 x_1' + m_2 x_2' = Mu & m_1 x_1 + m_2 x_2 = Mut + Mx_0 \\ m_1 y_1'' + m_2 y_2'' = 0 & m_1 y_1' + m_2 y_2' = Mv & m_1 y_1 + m_2 y_2 = Mvt + My_0 \\ m_1 z_1'' + m_2 z_2'' = 0 & m_1 z_1' + m_2 z_2' = Mw & m_1 z_1 + m_2 z_2 = Mwt + Mz_0 \end{array}$$

wo die Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ eingeführt ist, um x_0, y_0, z_0 als Koordinaten des Schwerpunkts für die Zeit $t_0 = 0$ und u, v, w als seine konstanten Geschwindigkeitskomponenten erscheinen zu lassen. Die Möglichkeit, durch diese sogenannten Schwerpunktssätze sechs von den gesuchten Integrationskonstanten zu bestimmen, beruht im Grunde auf dem Erfahrungssatz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. Man kann die Gröfsen m_1 und m_2 definieren als die Koeffizienten, die den Körpern beizulegen sind, um das dritte Axiom Newton's numerisch zur Geltung zu bringen. Von der Bewegung des Schwerpunktes gilt im übrigen, was von der trägen Bewegung eines

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Körpers gesagt wurde: im freien Raum fehlt zur Bestimmung von x_0, y_0, z_0; u, v, w jeder Anhalt. Man kann, ohne der Allgemeingültigkeit etwas zu vergeben, alle sechs Konstanten $= 0$ setzen.

Für die Rechnung bieten die Schwerpunktssätze den grofsen Vorteil, dafs man von den Bewegungen der einzelnen Massen zu der relativen Bewegung beider übergehen kann. Aus

$$(1a)\qquad \begin{matrix} m_1 x_1 + m_2 x_2 = M u t + M x_0 \\ x_2 - x_1 = x_{21} \end{matrix} \quad \text{folgt} \quad \begin{matrix} M x_2 = M u t + M x_0 + m_1 x_{21} \\ M x_1 = M u t + M x_0 - m_2 x_{21} \end{matrix}$$

Entsprechende Beziehungen gelten für die anderen Achsen. Gelingt es also, die relative Bewegung beider Körper zu berechnen, d. h. x_{21}, y_{21}, z_{21} als Funktionen der Zeit t darzustellen, so kennt man auch die Gröfsen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 für jeden Zeitpunkt. Wir fassen daher die Gleichungen (1) zu den Differentialgleichungen der relativen Bewegung zusammen und behandeln nur diese.

$$(2)\qquad \begin{array}{l|c|c|c||c} x_{21}'' = -f\dfrac{M x_{21}}{\varrho} & & z_{21} & -y_{21} & x_{21}' \\ y_{21}'' = -f\dfrac{M y_{21}}{\varrho} & -z_{21} & & x_{21} & y_{21}' \\ z_{21}'' = -f\dfrac{M z_{21}}{\varrho} & y_{21} & -x_{21} & & z_{21}' \end{array}$$

Eliminiert man wieder die Funktion der Fernwirkung f aus je zwei Gleichungen, so findet man auch hier integrabele Beziehungen:

$$(3)\qquad \begin{array}{l|l|c|c} y_{21} z_{21}'' - z_{21} y_{21}'' = 0 & y_{21} z_{21}' - z_{21} y_{21}' = \mu_x & x_{21} & x_{21}' \\ z_{21} x_{21}'' - x_{21} z_{21}'' = 0 & z_{21} x_{21}' - x_{21} z_{21}' = \mu_y & y_{21} & y_{21}' \\ x_{21} y_{21}'' - y_{21} x_{21}'' = 0 & x_{21} y_{21}' - y_{21} x_{21}' = \mu_z & z_{21} & z_{21}' \end{array}$$

Die Konstanten μ_x, μ_y, μ_z, sind Flächengröfsen (Rotationsmomente der Geschwindigkeiten), nämlich die Projektionen eines Parallelogramms, das nach Länge und Richtung aus dem Fahrstrahl ϱ und der resultierenden relativen Geschwindigkeit $r = \sqrt{x_{21}'^2 + y_{21}'^2 + z_{21}'^2}$ gebildet wird. Bezeichnet man den Inhalt des Parallelogramms mit $\mu = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2}$ und den Winkel zwischen den positiven Richtungen von ϱ und r mit ψ, so wird

$$(4)\qquad \mu = \varrho \cdot r \cdot \sin\psi$$

Die Flächensätze (3) und noch deutlicher die aus ihnen hervorgehenden Gleichungen

$$\mu_x x_{21} + \mu_y y_{21} + \mu_z z_{21} = 0; \quad \mu_x x_{21}' + \mu_y y_{21}' + \mu_z z_{21}' = 0$$

besagen, dafs die relative Bewegung der beiden Körper auf eine festliegende Ebene, die sogenannte invariable Ebene, beschränkt ist, deren Neigungskosinus gegen die Koordinatenebenen $\frac{\mu_x}{\mu}$, $\frac{\mu_y}{\mu}$, $\frac{\mu_z}{\mu}$ sind, und die für $\mu = 0$ in eine gerade Linie von unveränderlicher Richtung übergeht. Die Flächensätze drücken das zweite Kepler'sche Gesetz aus, der Grund ihres Zustandekommens ist in dem Umstand zu finden, dafs die Anziehungskraft zwischen den beiden Körpern in die Richtung ihrer geraden Verbindungslinie fällt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichungen (2) liefern als drittes Resultat den Energiesatz, wenn man sie nach den Geschwindigkeiten x_{21}', y_{21}', z_{21}' projiziert und die Ableitungen

$$r r' = x_{21}' x_{21}'' + y_{21}' y_{21}'' + z_{21}' z_{21}''; \quad \varrho \varrho' = x_{21} x_{21}' + y_{21} y_{21}' + z_{21} z_{21}' \tag{4a}$$

berücksichtigt. Auf beiden Seiten fällt dann der Nenner dt fort, und die Integration kann ausgeführt werden:

$$r r' = -M \cdot f \varrho'; \quad r^2 = -2M \int f d\varrho + L \tag{5}$$

Die Konstante L ist, von einem irrelevanten Faktor abgesehen, als Gesamtenergie der relativen Bewegung zu betrachten.

Der berühmte Satz von der Konstanz der Energie ist hier, wie überall, als Elimination der Zeit aus den Bewegungsgleichungen aufzufassen. Bedeutet nämlich schematisch ϱ die Länge, r die Geschwindigkeit, p die Beschleunigung, so ist:

$$\frac{d\varrho}{dt} = r; \quad \frac{dr}{dt} = p, \text{ d. h. } dt = \frac{d\varrho}{r} = \frac{dr}{p} \text{ oder } r \cdot dr = p \cdot d\varrho; \quad \frac{r^2}{2} = \int p d\varrho + \text{const.}$$

Der Energiesatz kommt demnach nur zu stande, wenn $\int p d\varrho$ ausführbar ist, d. h. wenn die Beschleunigungen nur von der Massenverteilung im Raum abhängen (konservative Kräfte).

Die Gleichung (5) enthält in der Geschwindigkeit r implicite noch den Begriff des Zeitlichen. Entfernt man r mit Hilfe von (4), so ergibt sich eine Gleichung:

$$\frac{\mu^2}{\varrho^2 \sin^2 \psi} = -2M \int f d\varrho + L \tag{6}$$

die nur noch Raumgröfsen enthält und als Gleichung für die Bahnlinie gelten kann.

Beispiel. Setzt man $f(\varrho) = \frac{a}{\varrho^3}$ und $L = 0$, so fällt aus (6) der Fahrstrahl ϱ heraus, und es wird $\psi = \text{const.}$; in Worten: für kubische Fernwirkung und verschwindende Energiekonstante ist die Bahnlinie eine logarithmische Spirale. Ein solches Resultat kann man bezeichnen als Resultat nach Euler'scher Art, weil Euler es liebte, schwierige Gleichungen dadurch lösbar zu machen, dafs er von den Funktionen in der Gleichung ein, man könnte sagen, entgegenkommendes Benehmen verlangte.

Die Schenkel des Winkels ψ haben beide veränderliche Richtung. Gewöhnlich zieht man einen Winkel φ zwischen ϱ und einer festen Richtung in der invariablen Ebene vor. Der Übergang wird nach der Fluxionsmethode durch die Beziehung $\varrho \cdot d\varphi = d\varrho \cdot \operatorname{tg}\psi$ vermittelt und führt nach kurzer Umformung zu

$$d\varphi = \pm \frac{\mu \cdot d\varrho}{\varrho \cdot \sqrt{L\varrho^2 - 2M\varrho^2 \int f d\varrho - \mu^2}} \tag{7}$$

μ kann positiv angesetzt werden, $0 < \psi < \pi$, dann gilt das Zeichen + für wachsende, das Zeichen — für abnehmende Fahrstrahlen. Der Zeichenwechsel findet statt, wenn $d\varrho = 0$ ist; daraus folgt als Bedingung für ein Maximum oder Minimum des Fahrstrahls:

$$L\varrho^2 - 2M\varrho^2 \cdot \int f d\varrho - \mu^2 = 0 \tag{8}$$

L ist die zehnte Integrationskonstante. Die elfte würde sich bei der Integration von (7) als untere Grenze von φ für den Anfangswert von ϱ ergeben. Besser ist es, als

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

untere Integrationsgrenze ein Fahrstrahlminimum zu nehmen, d. h. die feste Richtung in der invariablen Ebene, von der aus die Winkel φ gemessen werden, so zu wählen, dafs sie mit dem ersten Minimum des Fahrstrahls nach der Anfangszeit zusammenfällt, und ihre Lage zum System der x, y, z achsen durch die elfte Konstante zu bestimmen:

$$\varphi = \int_{\varrho_{min}}^{\varrho} \frac{\mu \, d\varrho}{\varrho \cdot \sqrt{L\varrho^2 - 2M\varrho^2 \int f d\varrho - \mu^2}} \tag{9}$$

Nach der Fluxionsfigur, welche besagt, dafs man ein Dreieck mit dem Aufsenwinkel ψ und den Seiten $r \cdot dt$, $\varrho \cdot d\varphi$ und $d\varrho$ als rechtwinklig behandeln kann, folgt für die Zeitbestimmung $dt \cdot r \cdot \cos\psi = d\varrho$, oder wenn aus (4) und (6) für r und ψ substituiert wird:

$$t = t_{min} + \int_{\varrho_{min}}^{\varrho} \frac{\varrho \cdot d\varrho}{\sqrt{L\varrho^2 - 2M\varrho^2 \int f d\varrho - \mu^2}} \tag{10}$$

wo die Zeit t_{min} als zwölfte Konstante angibt, wann zum ersten Male nach der Zeit des Anfangszustandes der Fahrstrahl ϱ sein Minimum erreicht.

Die Bewegungen zweier nach irgend einem Gesetz der Fernwirkung gegen einander gravitierenden ($f > 0$) oder sich abstofsenden ($f < 0$) Körper sind hiermit gefunden. Es erübrigt nur, für f den entsprechenden Wert einzusetzen, z. B. für elastische Anziehung oder Abstofsung $f = \pm a \cdot \varrho$ zu nehmen, usw.

4. Gravitation im engeren Sinne. In Gl. (5) ist zu setzen:

$$f = \frac{1}{\varrho^2}; \quad \int f \cdot d\varrho = -\frac{1}{\varrho}; \quad r^2 - 2\frac{M}{\varrho} = L \tag{11}$$

Der Anfangszustand kann jeden positiven ϱ wert mit jedem positiven r wert vereinigen, so dafs L jeden beliebigen reellen Wert haben kann. Maximum oder Minimum des Fahrstrahls tritt ein für

$$L\varrho^2 + 2M\varrho - \mu^2 = 0; \quad \varrho = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 + L\mu^2}}{L} \tag{11a}$$

Die Quadratwurzel ist reell für jeden Wert der Energiekonstanten, wie aus der Umformung

$$M^2 + L\mu^2 = M^2 + \varrho^2 r^2 \sin^2\psi \cdot \left(r^2 - 2\frac{M}{\varrho}\right) = (M - \varrho r^2 \sin^2\psi)^2 + \varrho^2 r^4 \sin^2\psi \cos^2\psi$$

hervorgeht. Um zu entscheiden, ob Minimum oder Maximum vorliegt, hat man aus (6)

$$\frac{\mu^2}{\varrho^2 \sin^2\psi} = 2\frac{M}{\varrho} + L$$

durch zweimalige Differentiation $\frac{d^2\varrho}{d\psi^2}$ zu bilden und, nach Einsetzung von $\psi = \frac{\pi}{2}$, zu prüfen, ob der zweite Differentialquotient positiv oder negativ ausfällt. Die Rechnung ist leicht und ergibt für jeden L wert:

$$\varrho_{min} = \frac{-M + \sqrt{M^2 + L\mu^2}}{L} \tag{12}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nur für negative L findet sich daneben noch ein positiver reeller Wert für ϱ_{max}. Für $L = 0$ wird $\varrho_{min} = \frac{\mu^2}{2M}$, wie aus der letzten Gleichung nach Anwendung des binomischen Satzes oder auch direkt aus (11 a) zu ersehen. Gl. (9) liefert:

$$\varphi = \int_{\varrho_{min}}^{\varrho} \frac{\mu \cdot d\varrho}{\varrho \sqrt{L\varrho^2 + 2M\varrho - \mu^2}} = \left[\arcsin \frac{M\varrho - \mu^2}{\varrho \sqrt{M^2 + \mu^2 L}}\right]_{\varrho_{min}}^{\varrho}$$

Für die untere Grenze des Integrals findet man durch Einsetzung für ϱ_{min} den Wert $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Die Gleichung der Bahnlinie wird daher:

$$\frac{M\varrho - \mu^2}{\varrho \cdot \sqrt{M^2 + L\mu^2}} = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\varphi$$

$$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}; \quad p = \frac{\mu^2}{M}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{M^2 + L\mu^2}}{M}$$

Das ist die allgemeine Kegelschnittsgleichung für Polarkoordinaten (p Parameter, ε numerische Exentrizität), wenn der Anfang in einem Brennpunkte liegt, und die Winkel φ vom nächsten Scheitel aus gemessen werden. Man findet demnach, wenn noch aus (11) die Geschwindigkeit r_∞ für ins Unendliche wachsenden Abstand ($\varrho = \infty$) beigefügt wird:

für $L < 0$; $\varepsilon < 1$ eine Ellipse, r_∞ imaginär
für $L = 0$; $\varepsilon = 1$ eine Parabel, $r_\infty = 0$
für $L > 0$; $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel, r_∞ reell.

Die Bahnlinien der einzelnen Massen sind bei ruhend gedachtem Schwerpunkt der relativen Bewegung ähnlich (1 a).

Will man ermitteln, an welcher Stelle ihrer Bahn sich die Körper zu irgend einer Zeit befinden, so macht man zweckmäfsig von dem Rechte Gebrauch, den Anfang der Zeitmessung beliebig zu wählen, und bestimmt, dass der Zeitanfang mit dem Minimum des Fahrstrahls zusammenfallen soll. Dann ist in Gl. (10) die untere Zeitgrenze $t_{min} = 0$ zu nehmen; für ϱ_{min} ist der gefundene Wert einzusetzen. Die Ausführung der Integration, bei der die drei Fälle $L < 0$; $L > 0$, $L = 0$ einzeln zu behandeln sind, weil sie auf verschiedene Funktionen führen, ist rein mathematisch und für das Folgende ohne Belang. Es mag genügen, die Resultate in geschlossener Form anzugeben. Bezeichnet man die Projektionen des Fahrstrahls ϱ auf die Hauptachsen mit X und Y, und wählt man die Pfeilrichtung der Hauptachsen so, dafs der Fahrstrahl bei positiver Drehung aus der $+X$ richtung in die $+Y$ richtung übergeht, so ergibt sich:

für die Ellipse, $L < 0$

$$A = \frac{p}{1 - \varepsilon^3} = -\frac{M}{L}; \quad B = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{\mu}{\sqrt{-L}}, \quad C = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{M^2 + L\mu^2}}{-L}$$

$$\begin{array}{l|l} \varrho = A - C\cos(\tau - \sigma) & \sigma = -\varepsilon \sin(\tau - \sigma) \\ X = -C + A\cos(\tau - \sigma) & \tau = \frac{2\pi t}{T}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{A^3}{M}} \\ Y = B \cdot \sin(\tau - \sigma) & \end{array} \qquad (13)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus den bekannten Werten der Energiekonstante L und der Flächenkonstante μ berechnet man zuerst die halben Hauptachsen A und B und die Exzentrizitäten C und ε, darauf die Umlaufzeit T und die erste Hilfsgröfse τ. Die zweite Hilfsgröfse σ ist aus der trauscendenten Gleichung $\sigma = -\varepsilon \cdot \sin(\tau - \sigma)$ zu bestimmen, worauf der Fahrstrahl und seine Projektionen durch einfache trigonometrische Funktionen gefunden werden. Von der Richtigkeit der Formeln kann man sich durch ein Verifikationsverfahren überzeugen. Mit Benutzung des Umstandes, dafs $\tau' - \sigma' = \frac{1}{\varrho}\sqrt{\frac{M}{A}}$ ausfällt, erkennt man leicht, dafs die Differentialgleichungen $X'' = -\frac{MX}{\varrho^3}$; $Y'' = -\frac{MY}{\varrho^3}$ erfüllt werden.

Für die Hyperbel, $L > 0$ wird

$$A = \frac{M}{L};\quad B = \frac{\mu}{\sqrt{L}};\quad C = \frac{\sqrt{M^2 + L\mu^2}}{L}$$

$$(14)\qquad \begin{array}{l|l} \varrho = -A + \frac{C}{2}(e^{\tau-\sigma} + e^{\sigma-\tau}) & \tau = \frac{L\sqrt{L}}{M}t \\ X = C - \frac{A}{2}(e^{\tau-\sigma} + e^{\sigma-\tau}) & \sigma = -\frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau-\sigma} - e^{\sigma-\tau}) \\ Y = -\frac{B}{2}(e^{\tau-\sigma} - e^{\sigma-\tau}) & \tau' - \sigma' = -\frac{\sqrt{L}}{\varrho} \end{array}$$

Die hyperbolischen Resultate kann man auch aus den Formeln für die elliptische Bewegung durch eine imaginäre Transformation erhalten, wobei die trigonometrischen Funktionen in Exponentialgröfsen übergehen.

Für die Parabel, $L = 0$ findet man die Länge des Fahrstrahls als reelle Wurzel der kubischen Gleichung

$$(15)\qquad \frac{3M^2}{\mu^3}t = \left(\frac{M}{\mu^2}\varrho + 1\right)\sqrt{\frac{2M}{\mu^2}\varrho - 1},$$

dann $$X = -\varrho + \frac{\mu^2}{M};\quad Y = \frac{\mu^2}{M}\sqrt{2\frac{M}{\mu^2}\varrho - 1};\quad \varrho' = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{2\frac{M}{\mu^2}\varrho - 1}$$

Auch für Hyperbel und Parabel sind die Verifikationen ohne Schwierigkeit ausführbar.

5. Lineare Formen. Dafs zwei, ein freies System bildende Massen eine lineare Bewegung ausführen können, ist auf doppelte Art nachweisbar. Geht man von dem allgemeineren Fall aus, und setzt in Gleichung (4) die Konstante $\mu = 0$, so wird dauernd $\psi = 0$ oder $\psi = \pi$, d. h. die Bewegung ist auf eine gerade Linie beschränkt. Dasselbe kann aus Gründen der Symmetrie geschlossen werden. Fällt nämlich zu irgend einer Zeit nicht nur die relative Kraft, sondern auch die relative Geschwindigkeit in die gerade Verbindungslinie der beiden Körper, so ist ein Ausweichen nach irgend einer Seitenrichtung ohne äufsere Ursache nicht denkbar.

Für die lineare Bewegung wird nach (11)

$$(15\text{a})\qquad r^2 = \varrho'^2;\quad \varrho' = \pm r;\quad \pm dt = \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{L\varrho^2 + 2M\varrho}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Pluszeichen gilt, wenn die Massen sich von einander entfernen, das Minuszeichen für die Annäherung. Die verschiedenen Werte von L besitzen denselben Einflufs auf die Form des Integrals, wie früher. Die lineare Bewegung kann darnach elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Charakter haben, je nachdem die relative Geschwindigkeit bei unendlich grofsem Abstand der Massen imaginär $\left(\varrho_{max} = -\frac{2\,M}{L}\right)$, reell oder Null ist. Aus (13), (14) und (15), wo $B = 0$ und $C = A$ zu rechnen ist, während die Hilfsgröfsen σ und τ ihre Bedeutung behalten, wird für:

$$\begin{aligned} L < 0 \qquad & \varrho = -\frac{M}{L}(1 - \cos(\tau - \sigma)) \\ L > 0 \qquad & \varrho = \frac{M}{L}(-1 + \tfrac{1}{2}e^{\tau-\sigma} + \tfrac{1}{2}e^{\sigma-\tau}) \\ L = 0 \qquad & 2\varrho^3 = 9\,Mt^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Etwas Bemerkenswertes tritt für $t = 0$ ein. Dann wird für alle Formen der Bewegung $\tau = 0$, $\sigma = 0$, $\varrho = 0$, d. h. die Massen stürzen zusammen, und zwar mit einer nach (11) unendlich grofsen Geschwindigkeit. Die mathematische Analyse führt auf solche Grenzfälle und mufs sich damit abfinden, die Natur lehnt sie ab. Unendlich grofse Geschwindigkeiten sind unnatürlich. Sollten einmal zwei Himmelskörper, die immer räumliche Ausdehnung haben, zusammenstofsen, so würden sie, noch ehe der Abstand der Schwerpunkte verschwindet, zertrümmert werden, die Bewegung würde auf die Bruchstücke übergehen und sich zum grofsen Teil in Wärme umsetzen (Meteore). Wenn es möglich ist, wie einige Astronomen behaupten, dafs ein Planet durch den Kopf eines grofsen Kometen ohne erhebliche Beschädigung beider Teile gehen kann, so würde nach den angeführten Newton'schen Sätzen im Augenblick zentraler Durchdringung die Anziehungskraft nicht ∞, sondern 0 sein. Zertrümmerung der Massen und Wärmeerzeugung sind natürliche Schutzmittel gegen das übermäfsige Anwachsen der Geschwindigkeit, die in den Differentialgleichungen der Bewegung nicht vorgesehen sind. Fragt man nun, was wohl rechnungsgemäfs geschehen wird, wenn zwei gravitierende Punkte zusammentreffen, so ergibt sich offenbar als nächstliegende Annahme, dafs die beiden Punkte sich durchdringen werden, und dafs nach dem Stellungswechsel derselbe Prozefs in umgekehrter Ordnung sich weiter abspielen wird. Betrachtet man dagegen den linearen Prozefs als Grenzfall einer allgemeineren in der Ebene stattfindenden Bewegung, so zeigt sich etwas Anderes. Man gebe der Bewegung eine ganz kleine seitliche Komponente, so wird die Bahnlinie eine sehr langgestreckte Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein, bei denen der Brennpunkt in unmittelbarer Nähe des Scheitels liegt. Läfst man darauf die Seitenbewegung immer kleiner werden und schliefslich verschwinden, so erkennt man, dafs im Augenblick des Zusammenstofses keine Durchdringung der Massen, sondern eine Umkehr stattfindet. Welche von den beiden sich widersprechenden Möglichkeiten, Durchdringung oder Umkehr, die richtigere ist, wird schwer zu entscheiden sein. In der Natur kommt keine von ihnen vor, die Gleichungen (16) geben auch keinen Aufschlufs, denn ϱ ist als absoluter Wert der Entfernung in die Rechnung eingeführt, und aus (16) folgt nur, dafs für gleiche Zeitabstände vor und nach dem Zusammenstofs der Raumabstand derselbe ist. Zur Erklärung dieser auffallenden Doppeldeutigkeit läfst sich an-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

führen, dafs für den Zeitpunkt $t = 0$ die Differentialgleichungen der Bewegung versagen, sie nehmen die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an. Auch erkennt man aus der Gleichung (15a), dafs strenggenommen ϱ und t die Rollen vertauscht haben. Die Zeit t sollte die unabhängige Variable sein, aber die Raumgröfse ϱ nimmt ihr bei der Ausführug der Integration diese Rolle ab, und der Zeichenwechsel von $+ dt$ nach $- dt$ würde von rein mathematischem Standpunkt aus verlangen, dafs für einen gewissen ϱwert die Zeit t einmal zum Stillstand kommt und nachher rückwärts läuft, was naturwidrig ist. Wir schliefsen, dafs physikalisch keiner der beiden Fälle, mathematisch aber beide zulässig sind, und dafs, wenn bei gröfseren Bewegungsprozessen mit dem Zusammenstofs zweier Körper zu rechnen ist, die Gleichungen eine Behandlung fordern, die beiden Möglichkeiten gerecht wird.

III.

Allgemeines über die Bewegung dreier Körper.

Die im vorhergehenden Abschnitt besprochenen Bewegungen setzen ein freies System zweier Körper voraus, welches in der Natur sich nicht vorfindet. Die Beobachtungen zeigen, dafs die Planeten nur annähernd die Örter einnehmen, die ihnen durch die Keplerschen Gesetze zugewiesen werden, und Newton erkannte als Ursache der Abweichungen die gegenseitige Anziehung der Planeten selbst. Die elliptischen Bahnen der Planeten, die pseudoparabolischen der Kometen werden nur deshalb nicht gänzlich verwischt, weil den gewaltigen von der Sonne ausgehenden Kräften gegenüber die unter den einzelnen Gliedern des Sonnensystems auftretenden Anziehungen geringfügig sind, weil sie jener Hauptkraft gegenüber nicht zerstörend, sondern nur störend wirken. Einige „Störungen“ sind von Newton selbst berechnet, die weitere Ausbildung der Störungstheorie ist neben Euler den grofsen französischen Mathematikern (Lagrange, Laplace) zu verdanken. Man kann sich, um ein ungefähres Bild der Vorgänge zu gewinnen, eine regelrecht verlaufende Planetenbewegung vorstellen und einen dritten Himmelskörper hinzutreten lassen. Steht der Störenfried vor dem Planeten in der Richtung seiner Geschwindigkeit, so wird er die Bewegung beschleunigen, steht er hinter ihm, so wird er die Bewegung zu hemmen suchen, in Konjunktion mit der Sonne wird er die Sonnenkraft unterstützen, in der Oppositionsstellung wird er der Sonne entgegenwirken, und nimmt er alle diese Stellungen der Reihe nach an, so wird er den gestörten Planeten veranlassen, um seinen von der Sonne vorgezeichneten Ort noch eine kleine Extratour zu unternehmen. Als günstig für die Stabilität des Sonnensystems kommt dabei der Umstand in Betracht, dafs die Umlaufszeiten der Planeten inkommensurable Gröfsen sind. Wenn sich die Jahreslängen zweier benachbarten Planeten genau wie 1 : 2 verhielten, so würden sich die gegenseitigen Störungen immer an denselben Stellen der Bahn in demselben Sinne wiederholen, und aus vielen kleinen Änderungen würde im Laufe der Zeit eine grofse Veränderung entstehen. Günstig für die Störungstheorie ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf