Einleitung.

Eine mathematische Abhandlung zu lesen ist nur selten leicht, mitunter recht mühsam und in vielen Fällen ganz unmöglich. Wenn es eine Statistik nicht nur für die Verfasser, sondern auch für die Leser von Druckschriften gäbe, so würde sich höchst wahrscheinlich zeigen, dafs unter allen Abhandlungen, die geschrieben werden, die mathematischen — die überflüssigsten sind. Wer nicht schon durch den Titel abgeschreckt wird, der sucht vielleicht beim Durchblättern einfache Gesichtspunkte oder verständliche Resultate, die für ihn wissenswert sein könnten, und wenn er hier nicht auf seine Rechnung kommt, sondern nur eine Anhäufung krauser, schwer zu prüfender Symbole findet, so wird er mit einem leisen Gefühl des Unbehagens das Heft aus der Hand legen und sich dabei beruhigen müssen, dafs es nicht zu den Erfordernissen allgemeiner Bildung gehört, mathematische Arbeiten lesen zu können. Auf anderem, sagen wir historischem oder sprachlichem Gebiet hat der Leser eine ziemlich zutreffende Vorstellung von dem, was in den Köpfen der Bücher schreibenden Gelehrten vorgeht; er kann ihren Erörterungen folgen, so weit es ihm beliebt, uud aufhören, wenn die Schriftsteller sich zu sehr auf Einzelheiten ihres Faches einlassen, die für ihn keinen Wert haben. Dabei behält er den Mafsstab der Beurteilung und die Möglichkeit der Kritik. Bei der Mathematik aber geht dem unvorbereiteten Leser der Mafsstab der Beurteilung von vorn herein verloren; sobald die ersten Anzeichen der sogenannten „höheren Mathematik“ auftreten, ist es mit dem Verständnis zu Ende. Nun ist das, was auf mathematischem Gebiete seit dem Wiederaufblühen der Wissenschaften geleistet ist, im wesentlichen nichts anderes als die höhere Mathematik, d. h. die Lehre von den veränderlichen Gröfsen in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit. Der Fortschritt gegen die starre Auffassung des Altertums ist unverkennbar; ist doch die Veränderung das Einzige, von dem wir mit völliger Bestimmtheit wissen, dafs es in der Aufsenwelt besteht. „Im Anfang war die Tat“ sagt Faust. Es ist bedauerlich, aber wahr: was von den gröfsten Denkern der letzten Jahrhunderte zur Erforschung des Weltbaus beigetragen ist, findet seinen präzisen Ausdruck in einem Formensystem, das für die meisten Gebildeten ein unbekanntes Land bleibt. Volkstümliche Vorträge, die durch Experimente und Lichtbilder Belehrung über die Resultate der Naturforschung spenden, können das Fehlende nicht ersetzen. Diese an sich vortrefflichen Veranstaltungen wenden sich an ein breiteres Publikum; die Ein-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

drücke, die sie hinterlassen, sind in der Hauptsache auf Autorität gegründet und machen dem denkenden Hörer häufig den Mangel einer besser begründeten Einsicht nur um so fühlbarer. Der Gebildete hat ein Anrecht darauf, einen Blick in die Werkstatt der schaffenden Geister zu tun, ihre Bemühungen und Ziele, ihre Hoffnungen und Enttäuschungen kennen zu lernen, und dazu fehlt ihm für die Mathematik und ihre Anwendungen der Schlüssel, wenn er nicht in die Wissenschaft vom Veränderlichen eingeweiht ist.

Die weite Kluft, die zwischen dem gebildeten Leser und dem Schreiber mathematischer Schriften gähnt, kann füglich am besten dadurch geschlossen werden, dafs von beiden Seiten eine Annäherung erfolgt. Der Leser müfste besser ausgerüstet an die Lektüre treten. Um zu zeigen, wie das erreicht werden kam, und auf die Gefahr hin, im Dienste der Deutlichkeit die Farben etwas stark aufzutragen, möchte ich von einer mir mitgeteilten Geschichte aus der Schulstube ausgehen, die nicht nur den bekannten Vorzug hat, wahr zu sein, sondern auch den Nagel auf den Kopf trifft. Ein Mathematiklehrer fragte in einer Vertretungsstunde die Schüler einer ihm fremden Quarta: „Weshalb lernt Ihr die Kongruenzsätze?“ Nach einigem Zögern kam die gewifs unerwartete Antwort: „Damit wir Tadel bekommen, wenn wir sie nicht können“. Ich halte die Antwort für aufrichtig und für den kindlichen Ausdruck einer weit verbreiteten Ansicht über den Zweck des mathematischen Unterrichts. Der Anfänger soll gezwungen werden oder aus eigenem Trieb sich bemühen, Schwierigkeiten zu überwinden; er gewöhnt sich dabei an folgerichtiges Denken; er wird reif für neue Schwierigkeiten in den folgenden Klassen, die er wieder unter Stählung seiner Willenskraft niederzwingt; er löst mannigfache Dreiecksaufgaben, von denen die meisten in der ganzen Natur nicht vorkommen; er konstruiert Ankreise, Inkreise und Umkreise, studiert den Ptolemäus, wenn nicht gar den Menelaus und Ceva und die schönen Sachen, die sich daran schliefsen, lernt Formeln aus der ebenen Trigonometrie in fast erschöpfender Fülle, berechnet auf der oberen Stufe Körper, die in kein Krystallsystem passen, behandelt Dreiecksaufgaben nach Mollweide'schen Formeln, weil ihm die anderen schon zu leicht sind, und quält zuletzt seine ganze Schulweisheit zusammen, um im Schlufsexamen vier Aufgaben zu lösen, von denen die eine oder andere selbst mathematisch gebildete Leute stutzig machen kann. Was wird damit erreicht? Die Antwort las ich neulich in einem Artikel über Schulreform: „Die Aufgabe der Mathematik ist Schulung des Verstandes.“ Das ist die Auffassung jener Quartaner, in die Sprache der Erwachsenen übersetzt. Es ist gewifs etwas Grofses um einen geschulten Verstand und eiserne Willenskraft, aber beide lassen sich auf verschiedenen Wegen erwerben, sind auch hier nur als Nebenprodukte anzusehen und erreichen ihren vollen Wert erst, wenn sie sich nicht auf ein künstliches oder verkünsteltes Spezialfach, sondern auf das ganze geistige Leben beziehen. Ich erinnere gern an die schönen Worte des Plinius, die Humboldt an die Spitze des Kosmos gestellt hat: Naturae vero rerum vis atque majestas in omnibus momentis fide caret, si quis modo partes ejus ac non totam complectatur animo.

Was wird nun aus den mathematischen Kenntnissen der jungen Leute, die sich etwa medizinischen oder juristischen Studien widmen? Ihr mathematisch geschulter Verstand löst ihnen nicht die geringste Schwierigkeit in ihrem Berufe, und wenn sie sämtliche Nummern aus Liebor und v. Lühmann's Aufgabensammlung am Schnürchen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hätten; ihre Mathematik ist unrettbar dazu bestimmt, vergessen zu werden. Im alten Schulgleise zu bleiben und Wiederholungen anzustellen, kann ihnen nicht zugemutet werden, das tun, der Not gehorchend, Studenten, wenn sie Nachhülfestunden geben, oder Väter, die ihren Söhnen helfen. Sie können auch nicht in der mathematischen Literatur vorwärtsschreiten, weil der erste auftretende Differentialquotient ihnen sein unerbittliches „bis hierher und nicht weiter“ zuruft. Daher werden die Erinnerungen an die einstige mathematische Herrlichkeit schwächer und schwächer, eine letzte aufflackernde Erinnerung ist gewöhnlich, dafs sie einmal mit Logarithmen zu schaffen hatten, und der Rest ist Schweigen, zuweilen unterbrochen von dem unwilligen Zugeständnis, der mathematische Unterricht sei zu ihrer Zeit schlecht gewesen. Unsere Schüler werden es nicht anders machen, wenn ihnen die Mathematik nach demselben Rezept verabreicht wird. Die Mathematiker werden in ihrer bescheidenen Zurückhaltung das Völkchen bleiben, das nicht verstanden wird, und die grofse Mehrzahl der Gebildeten wird auch weiterhin vor mathematischen Theorien eine Art Grausen empfinden wie vor der schwarzen Kunst.

Soll es besser werden, so greife man zu dem Mittel, das der erfahrene Arzt anwendet: man lasse die Natur wirken. Die Quartaner hätten sagen sollen: „Wir lernen die Kongruenzsätze, weil sie uns Aufschlufs geben über Längen und Richtungen, die wir noch nicht kannten, weil sie ein Mittel sind, die Welt, in der wir leben, zu verstehen. Die Schüler der folgenden Klassen würden lernen, dafs es mit Linien und ihren Richtungen allein nicht getan ist, dafs auch die Zahl hinzukommen mufs zum vergleichenden Verständnis und zur Ausmessung der räumlichen Gröfsen. Sie würden die Arithmetik kennen lernen als ein vom Menschen ersonnenes geistiges Werkzeug, aber nur soweit ein solches Werkzeug nötig ist zum Begreifen der von jeder Willkür freien, unabänderlichen Gesetze des Raumes und der Zeit. Sie würden die Notwendigkeit, quadratische Gleichungen zu lösen, einsehen, wenn sie im Pythagoras das grundlegende Mittel erkannt haben, die schiefe Richtung in der Ebene und im Raum der Zahl zu unterwerfen. Sie müfsten von vornherein mit allen drei Dimensionen des Raumes vertraut werden, auch rechtzeitig lernen, dafs der Raum ohne die Zeit und die Zeit ohne den Raum und beide ohne die Bewegung weder mefsbar noch überhaupt denkbar sind. Warum den Schülern vorenthalten, was sie verstehen können; warum an der flachen Wandtafel und den flachen Heften kleben, während der Schülergeist oft genug deutlich verrät, dafs er einer freieren Auffassung fähig ist? Warum die spanischen Stiefel, in die der Geist geschnürt wird, nicht etwas loser schnallen? Warum nicht mit einem Worte an die Stelle der Planimetrie mit ihrer Plattheit, der Stereometrie mit ihrer Starrheit eine Anschauungslehre setzen als formale Vorbereitung für alle Naturwissenschaft?

Wenn in der Schulmathematik nur solche Sätze und Aufgaben berücksichtigt werden, deren Bedeutung für die Erweiterung unserer Naturerkenntnis uns tagtäglich vor Augen tritt, so wird Zeit gewonnen für Hinweise auf die Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Die Namen, Schicksale und Entdeckungen unserer grofsen Mathematiker, Physiker und Astronomen werden der Schuljugend vertrauter werden, als sie es jetzt leider sind, und die erworbenen Kenntnisse werden im Gedächtnis der Schüler fester haften, wenn sie an geschichtliche und biographische Daten geknüpft sind. Dabei würden die Schüler der obersten Klasse von selbst auf die Möglichkeit, ja Notwendigkeit hingeführt werden, auch die veränderlichen Gröfsen der Rechnung zugänglich zu machen;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sie würden ohne grofse Schwierigkeit die Begriffe der Funktion und ihrer ersten Abgeleiteten verstehen. Ein Semester in Prima würde vollständig ausreichen, die Grundlage der höheren Mathematik klarzulegen: wie aus Beobachtung und Versuch die Tatsachen fliefsen, wie die Hypothese zu den Tatsachen das Gesetz fügt, und wie die Mathematik das Gesetzmäfsige in der Veränderung zu einer Differentialgleichung zusammenfafst, deren Lösung neue Aufschlüsse verschafft. Die Primaner ständen nicht vor einem leeren Wort, wenn sie hören, dafs man die Gesamtheit aller mechanischen Veränderungen in eine einzige Differentialgleichung kleiden kann, deren Lösung, wenn sie gefunden werden könnte, den Bewegungsprozefs des Weltalls enträtseln würde.

Die Schwierigkeiten für den Anfänger, die den Verstand schulen und die Willenskraft stärken sollen, lassen sich durch entsprechende Abgrenzung des kinematischen Lehrstoffes in jeder gewünschten Steigerung herstellen. Es handelt sich dann um Schwierigkeiten, die in der Natur selbst liegen, und deren Überwindung den Menschen auf die Stufe hebt, die er als vernunftbegabtes Wesen einzunehmen berufen ist. Die Idee einer Schulkinematik ist nicht neu; sie liegt, so zu sagen, in der Luft. Von einer Ausführung ist sie weit entfernt; sie ist auch gewifs unausführbar, wenn nicht auf alles Entbehrliche, es sei noch so schön (ϱ Aufgaben, Harmonität u. s. w.) verzichtet wird. Dagegen bildet in einem Unterrichtsfach, welches Raum, Zeit und Bewegung unter die Herrschaft der Zahl zwingen soll, naturgemäfs die Lehre von den veränderlichen Gröfsen (Funktion, Differentialquotient, Differentialgleichung) den Schlufsstein, der nicht fehlen darf, da sonst die übrigen Teile des Gewölbes nach Entfernung des Lehrgerüstes unweigerlich zusammenstürzen, der aber, gehörig eingefügt, dem Ganzen Festigkeit und Dauer verbürgt. Wollte man zwei jungen Leuten, die nach alter und neuer Observanz ausgebildet die Schule verlassen, ihr Naturbekenntnis ablauschen, so würde man vom ersten hören: Ich lebe im Raum, im Raum sind die Bücher, in den Büchern die Gedanken; der zweite würde sagen: Wir leben im Reich der Bewegungen, Raum und Zeit sind die uns verliehenen Formen der Auffassung, unsere Gedanken beherrschen die Welt durch die Zahl. Dem zweiten würde erhalten bleiben, was Humboldt als „Naturgefühl“ bezeichnet, eine lebensfrische Weltanschauung, die dem ersten durch eine Art Denaturierungsprozefs verloren gegangen ist. Der zweite ist fähig, an manchen geistigen Bestrebungen der Neuzeit, die dem ersten verschlossen sind, teilzunehmen und kritisch darüber zu urteilen, was auf die geistigen Bestrebungen selbst nur wohltuend zurückwirken könnte. Auch gibt es keinen gelehrten Beruf, dem nicht aus der Bekanntschaft mit einer auf mathematischen Grundpfeilern ruhenden Bewegungslehre Vorteile erwachsen. Die Philosophen haben zwar in ihren Werken fast immer vor der Mathematik eine erfreuliche Hochachtung bezeugt, doch gehen sie bei ihren Vergleichen und Beweisführungen selten über die Anfangsgründe der Euklidischen Geometrie hinaus, weil sie entweder sich oder ihren Lesern eingehendere Kenntnisse nicht zutrauen, und selbst derjenige unter ihnen, der sich am meisten seiner mathematischen und naturwissenschaftlichen Überlegenheit rühmt, Schopenhauer, würde eine in manchen Beziehungen bessere Philosophie geschrieben haben, wenn er noch etwas mehr Naturmathematik gekannt und z. B. Newton verstanden hätte, statt auf ihn zu schimpfen. Selbst die höchste unter den Fakultäten, die Theologie, würde in der so oft bekämpften Naturwissenschaft eine ihrer festesten Stützen erkennen, wenn ihre Vertreter gewöhnt wären, die Welt als den Schauplatz alles wahrnehmbaren Geschehens bis an

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ihre äufsersten Grenzen zu verfolgen, wenn sie klar eingesehen hätten, was nur eine richtige Anschauungslehre zeigen kann, dafs nach der Seite des unendlich Grofsen und des unendlich Kleinen in Raum, Zeit und Bewegung nicht Grenzen an sich, sondern nur Grenzen menschlicher Fassungskraft vorliegen.

Das sind hohe Ziele, grofse Erwartungen, aber wenn auch nur ein kleiner Teil davon erreichbar sein sollte, er wäre ausschlaggebend für die Zweckmäfsigkeit, mehr Natur in die Schulmathematik zu bringen, um die gebildeten Leser an das Verständnis der mathematisch-physikalischen Literatur heranzuziehen. Eine andere Frage ist, ob einem hinreichend vorbereiteten, erweiterten Leserkreise die Fachliteratur auch das bietet, was gesucht wird. Hier entrollt sich bei dermaliger Lage der Dinge ein sehr eigenartiges Bild. Um eine deutliche Vorstellung von den Schwierigkeiten zu geben, mit denen die Herstellung einer mathematischen Arbeit verknüpft ist, will ich den Leser, der mir bis hierher gefolgt ist, in's Vertrauen ziehen. Vor einigen Monaten ging mir von einer auswärtigen Buchhandlung ein Brief zu, in dem mir auf den Kopf zugesagt wird, ich hätte die Absicht eine Programmabhandlung zu schreiben. Der Brief bietet mir etwa 1 000 000 (eine Million) Abhandlungen, in Spezialverzeichnisse geordnet, an, „durch deren Benutzung meine Arbeit wesentlich gefördert werden dürfte". Angenommen, der hundertste Teil der zur Verfügung gestellten Abhandlungen sei mathematischen Inhalts, und ich könnte in einem Jahre 100 Abhandlungen durchstudieren, so hätte ich 100 Jahre zu lesen, um die wesentliche Förderung meiner Arbeit zu erleben. Es handelt sich bei dieser geringen Schätzung um 10 000 mathematische Sonderschriften, Programmbeilagen, Dissertationen, Auszüge aus Zeitschriften u. s. w. Man bedenke, welch gewaltiges Kapital scharfsinniger geistiger Arbeit hier aufgespeichert liegt. Die Benutzung eines solchen Schatzes kann positiv und negativ gedacht werden: positiv, wenn man dasjenige heraussucht, was man noch einmal schreiben will, natürlich mit verbessernden Zusätzen und kritischen Erörterungen, negativ, wenn man alles vermeidet, was schon geschrieben ist, um etwas Neues zu bringen. Nach meinem Dafürhalten überwiegt die negative Richtung; wenn es nicht so wäre, würde die Mannigfaltigkeit der Arbeiten nicht so in's Ungeheure gestiegen sein. Der Wunsch oder der Zwang etwas zu schreiben, was noch nicht dagewesen ist, führt nur zu leicht von dem Hauptwege ab auf verschlungene Seitenpfade. Da das Einfache und Leichtverständliche nicht neu ist, versucht man es mit dem Bizarren, Schwierigen und variiert die Themata oft bis zu völliger Unnatur. Es kommt hinzu, dafs die Mathematik, wie jede Wissenschaft und jede Kunst, erschöpfbar ist; man kann nicht jeden Tag einen neuen Satz von der Bedeutung des Pythagoras aufstellen, und was Raphael in Rom an die Wand gemalt hat, ist für Fludribus in Säkkingen verloren. Auch mag wohl hin und wieder ein mathematischer Schriftsteller sich von dem richtigen Gedanken leiten lassen, dafs seine Arbeit einem gröfseren Leserkreise doch nicht zugänglich sein wird, und wenn er auch nicht direkt dem Grundsatz huldigt, (der den Deutschen vorgeworfen ist,) dafs die Dunkelheit des Ausdrucks der Wissenschaftlichkeit des Inhaltes proportional sei, so wird er es doch für höflich und schmeichelhaft halten, bei seinen wenigen Lesern recht viel vorauszusetzen. Man wird es daher verstehen, dafs manche mathematische Arbeit ein allgemeineres Interesse weder bietet noch erwartet, auch, dafs gar viele ohne greifbares, zufriedenstellendes Resultat abschliefsen. Ja, wenn man vorher wissen könnte, ob es gehen wird oder

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nicht. Hat doch einmal ein Naturforscher, ich weifs nicht mehr wer, in seinem Schmerz ausgerufen: „Man kann es anstellen, wie man will, die Natur sagt immer nein“. Der Mann mufs viel Unglück gehabt haben. Ich möchte dagegen behaupten: wenn die Natur nein sagt, so hat man es sicherlich falsch angestellt. Auch meine ich, dafs man sehr wohl vorher wissen kann, ob es geht, weil nur eine einzige lösbare Aufgabe vorliegt, das ist die Auflösung des Welträtsels im mathematisch-physikalischen Sinne, die Entwirrung der zahllosen Bewegungsprozesse, die sich im Rahmen von Raum und Zeit abspielen. Die grofse Aufgabensammlung, die alle eine Bearbeitung lohnenden, eine Lösung versprechenden Teilprobleme enthält, ist die Natur, und die Richtschnur, die den einzelnen Forscher vor Abirrungen in unfruchtbare Gebiete schützen kann, ist wiederum die Anlehnung an die Natur. Ein Beispiel für viele. Bekanntlich kann man die Gleichungen fünften Grades nicht lösen, wenn man sich auf algebraische Operationen mit Einschlufs der Wurzelgröfsen beschränkt. Was tun? Man lasse in Seelenruhe die Gleichungen ungelöst, bis sich einmal in der Natur ein Problem findet, bei dem Gleichungen dieses Grades auftreten und im Ablauf des Prozesses ihre Lösung finden. Von dem Augenblicke an dürfte man nicht nur mit Zuversicht hoffen, dafs die Gleichungen lösbar sind, sondern man würde auch aus dem natürlichen Zusammenhang die Funktionen kennen lernen, die die Lösung herbeiführen. An positiven Beweisen dafür, wie sehr die von der Natur praktisch gelösten Probleme auf die mathematischen Rechnungen befruchtend einwirken, fehlt es nicht. Man denke an die Wellentheorie. Der Natur entlehnt, zeigt sie ein so herrliches Ineinandergreifen der mathematischen Operationen, dafs die Physiker, hingerissen durch ihre einfache Schönheit, fast überall Wellen suchen und finden, selbst da, wo vielleicht der natürliche Vorgang weit verwickelter ist. Oder man denke an die Potentialtheorie mit den glänzenden Green'schen Integralen, deren Bekanntschaft allein für ein Studium der höheren Mathematik entschädigt. —

In den nachfolgenden Untersuchungen wollen wir uns nicht so hoch versteigen, sondern nur eine bescheidene Wanderung im Tal von den einfachsten mechanischen Grundbegriffen bis zur Grenze der Wissenschaft unternehmen. Der Weg führt zuerst durch längst bekannte Gegenden, wir wollen aber bei jedem Schritt der Rechnung auf den Zusammenhang mit der Natur achten und die gewonnenen Belehrungen unter strengem Festhalten an geometrische oder kinematische Vorstellungen später, wo die Sachen nicht mehr so einfach liegen, nach Möglichkeit verwerten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf