Die nachstehend mitgeteilten Aufgaben und Lehrsätze haben das Problem der stetigen Teilung einer Strecke zur Grundlage. Der erste Teil derselben schliesst sich dem Umfange, in welchem die Lehre von der stetigen Teilung behandelt zu werden pflegt an, d. h. lediglich der Forderung, eine Strecke stetig zu teilen und die Formel der stetigen Teilung $y^2 = p\ (p - y)$ geometrisch zu deuten. Die durch die Teilung gewonnenen Strecken (und teilweise auch Winkel) werden zur Konstruktion geometrischer Figuren benutzt, und zwar sind die Aufgaben so ausgewählt, dass sie sich der vorangegangenen Lehraufgabe streng anschliessen. Einem grossen Teile der Aufgaben ist eine Gestalt gegeben worden, aus der die Notwendigkeit der stetigen Teilung nicht unmittelbar ersichtlich ist, sondern erst abgeleitet werden muss*). Diese Ableitung geschieht auf die einfachste Weise durch Umformung des erhaltenen Ausdrucks. Diese Form der Aufgabe wurde gewählt, um dem Schüler Gelegenheit zur sicheren Einprägung und geometrischen Deutung der Formel zu geben, also die Lösung geometrischer Aufgaben durch algebraische Analysis anzubahnen, wie dies ja auch bei Gelegenheit der Durchnahme des Pythagoreischen Lehrsatzes u. s. w. geschieht. Die Lösung auch dieser Aufgaben übersteigt, da das Ansetzen und Umformen der Gleichungen sehr einfach sind, das Können der Schüler dieser Stufe durchaus nicht. Ist z. B. in I. A. 1. die Seite des gegebenen Quadrates a, die andere Seite des verlangten Rechtecks gleich y, so ergiebt sich für y die Gleichung: $a \cdot y = a^2 - y^2$ oder $y^2 = a\ (a - y)$**) d. h. y ist der grössere Abschnitt der stetig geteilten Seite a, und damit ist das Rechteck herstellbar.

Ferner sind die bekannten Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks mit einem Winkel von 36° an der Spitze und desjenigen mit einem Winkel von 36° an der Grundlinie, sowie einige Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse durch die Höhe oder die Winkelhalbierende des rechten Winkels stetig geteilt wird, zur

*) Will man diese Form der Aufgaben vermeiden, so ist es bei jeder einzelnen Aufgabe ein Leichtes, sie so in Worte zu kleiden, dass die Forderung, eine Strecke stetig zu teilen, unmittelbar zum Ausdruck gelangt.

**) Die Berechnung von y als Wurzel der Gleichung wäre unelegant; hier, wie in allen anderen Aufgaben, ist die Auflösung der Gleichungen nach den Unbekannten durchaus zu vermeiden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bildung von Aufgaben herangezogen worden. Wo nicht allgemein bekannte Eigenschaften benutzt werden, sind dieselben in den vorhergehenden Aufgaben abgeleitet.

Der zweite Teil der Aufgaben hat eine wesentliche, aber natürliche, eigentlich von selbst sich ergebende Erweiterung der Lehre von der stetigen Teilung zu seiner Grundlage. Es wird zunächst gezeigt, dass und wie sich aus einem Abschnitte die geteilte Strecke, und aus der algebraischen Verbindung (Summe, Differenz, Produkt) zweier der in Betracht kommenden Strecken diese selbst und die dritte auf einfache Weise geometrisch konstruierbar sind. An die so gewonnene Erweiterung des Problems reihen sich die Aufgaben des Abschnitts II.

Gleichwie im ersten Abschnitte ist ein Teil der Aufgaben zunächst algebraisch zu behandeln. (Vergl. die Bemerkung, die sich auf diese Ausführung bezieht.) In ihnen sind zwei zu konstruierende Strecken durch eine dritte in Beziehung gesetzt, d. h. es sind zur Konstruktion zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzustellen. Diese sehr einfach aufzustellenden Gleichungen sind aber nicht in althergebrachter Weise zu behandeln; es sind nicht die Unbekannten zu berechnen, und ihre Werte zu konstruieren, sondern durch Elimination einer von ihnen ergiebt sich die Formel der stetigen Teilung. Ein Beispiel: Es sei in II D 25 r_1 der grössere, r_2 der kleinere Radius, so ist: $r_1 - r_2 = d$ und $r_1 \cdot r_2 = d^2$ d. h. $d^2 = r_1 \cdot (r_1 - d)$, also d der grössere Abschnitt des stetig geteilten Radius r_1, und dieser ist damit aus d herstellbar.

I.

Fundamentalaufgabe: Es soll eine gegebene Strecke stetig geteilt werden.

Sind p und y zwei Strecken, welche durch die Gleichungen: $y^2 = p\ (p - y)$ oder $p \cdot y = p^2 - y^2$ miteinander verbunden sind, so ist y der grössere Abschnitt der stetig geteilten Strecke p.

Sind p und x zwei Strecken, welche durch die Gleichungen: $p^2 = x\ (x - p)$ oder $x^2 = p\ (p + x)$ miteinander verbunden sind, so ist x gleich der Summe aus der Strecke p und ihrem grösseren, durch stetige Teilung erzeugten Abschnitte.*)

Fundamentallehrsatz: Ist in einem gleichschenkligen Dreieck die Grundlinie gleich dem grösseren Abschnitt des stetig geteilten Schenkels, so ist der Winkel an der Spitze 36°.

*) Da die Bezeichnungen: „Major“ und „Minor“ nicht in allgemeine Aufnahme gekommen zu sein scheinen, so sind die in den üblichen Lehrbüchern benutzten deutschen Ausdrücke hier beibehalten worden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

A.

1. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, dessen eine Seite gleich der Seite eines gegebenen Quadrates, und dessen Inhalt gleich der Differenz dieses Quadrates und des Quadrates über der anderen Rechteckseite ist.
2. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, dessen eine Seite gleich der Seite eines gegebenen Quadrates, und dessen Inhalt gleich der Differenz des Quadrates über der anderen Rechteckseite und des gegebenen Quadrates ist.
3. Über einer gegebenen Strecke soll ein Rechteck errichtet werden, dessen Inhalt gleich der Differenz der Quadrate über seinen beiden Seiten ist. (2 Fälle.)
4. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Hypotenuse gegeben ist, und in welchem das Quadrat über der einen Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der anderen Kathete ist.
5. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Kathete gegeben ist, und in welchem das Quadrat über der anderen Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der gegebenen Kathete ist.
6. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, von welchem eine Seite gegeben ist, und in welchem das Quadrat über der Diagonale gleich der Summe des Rechtecks aus der Diagonale und der gegebenen Seite und des Quadrates über der letzteren ist.
7. Über einer gegebenen Strecke soll ein Rhombus errichtet werden, in welchem das Quadrat über einer der Diagonalen gleich dem Rechteck aus der gegebenen Seite und der Summe aus ihr und der Diagonale ist.
8. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, in welchem die eine Diagonale der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten, gegebenen anderen ist.
9. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, in welchem das Quadrat über der einen gegebenen Diagonale gleich der Summe aus dem Quadrate über der anderen Diagonale und dem Rechteck aus beiden Diagonalen ist.
10. Es soll ein Winkel von 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21 u. s. w. Graden gezeichnet werden.
11. Es soll ein Winkel von $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{2}$; $19\frac{1}{2}$; $9\frac{3}{8}$ u. s. w. Graden gezeichnet werden.
12. Es soll ein Winkel von 9; 27; 81 Graden in drei gleiche Teile geteilt werden.
13. **Beweise:** Ist in einem gleichschenkligen Dreieck der Winkel an der Spitze 36^0, so ist a) die Halbierungslinie des Winkels an der Grundlinie stetig teilende Transversale des Schenkels und b) die Grundlinie gleich dem grösseren Abschnitte des stetig geteilten Schenkels.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

14. **Beweise**: Sind in einem gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie 36^0, so sind die Schenkel gleich dem grösseren Abschnitt der stetig geteilten Grundlinie.
15. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, von welchem eine Diagonale gegeben ist, und in welchen der von dieser Diagonale mit der anstossenden Seite gebildete Winkel 36^0 beträgt. (Vgl. 14.)
16. Über einer gegebenen Geraden soll ein Rechteck errichtet werden, dessen Diagonalen sich unter 108^0 schneiden (d. h. in welchem die von den Diagonalen mit der gegebenen Seite gebildeten Winkel gleich 36^0 sind). (Vgl. 14.)
17. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, von welchem die Seite gegeben ist, und in welchem ein Winkel 72^0 (36^0) beträgt. (Vgl. 14.)
18. Es soll ein Rhomboid gezeichnet werden, in welchem der von der gegebenen Diagonale mit einer gegebenen Seite gebildete Winkel 36^0 beträgt. (Vgl. 14.)
19. Es soll ein Rhomboid gezeichnet werden, in welchem eine Seite der grössere Abschnitt der stetig geteilten gegebenen Diagonale ist und der Winkel zwischen beiden 36^0 beträgt. (Vgl. 14.)
20. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Hypotenuse gegeben ist, und in welchem der eine spitze Winkel 36^0 beträgt. (Vgl. 14.)
21. Es soll (ohne Anwendung des Winkelmessers) ein Dreieck gezeichnet werden aus $\alpha = 72^0$ (36^0) und:
    b, c; b, h_c; a, h_a; a, b; c, r; r, h_a; ϱ, b; ϱ, β; r, m_a; $\sphericalangle\, a m_a, r$; r und die stetig teilende t_a.
22. Über einer gegebenen Strecke soll ein gleichschenkliges Dreieck errichtet werden, dessen Höhe nach der Grundlinie gleich der Hälfte des grösseren Abschnittes des stetig geteilten Schenkels ist. Anal. Man ergänze das gleichschenklige Dreieck zu einem Rhombus. Der Winkel an der Grundlinie ist, wie nun leicht ersichtlich gleich 18^0. Daraus ergiebt sich dann leicht die Konstruktion.
23. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, in welchem die eine Diagonale der grössere Abschnitt der stetig geteilten gegebenen Seite ist.

B.

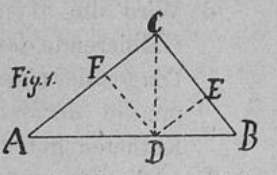
Das rechtwinklige Dreieck.

Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem:

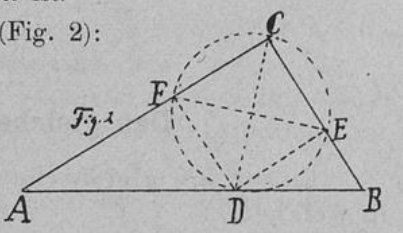
1. die gegebene Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt wird;
2. eine Kathete gleich dem grösseren (oder kleineren) Abschnitt der stetig geteilten, gegebenen Hypotenuse ist;
3. die Höhe gleich dem kleineren (warum nicht grösseren?) Abschnitt der stetig geteilten, gegebenen Hypotenuse ist;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. die Hypotenuse gleich der Summe einer gegebenen Kathete und ihrem grösseren, durch stetige Teilung erzeugten Abschnitt ist;
5. die Katheten sich zueinander verhalten, wie die Abschnitte der stetig geteilten, gegebenen Hypotenuse;
6. die Halbierungslinie des rechten Winkels die Hypotenuse stetig teilt.



7. **Es sind folgende Sätze zu beweisen** (Fig. 1):
   a) Wird die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Höhe stetig geteilt, so ist die dem kleineren Höhenabschnitt anliegende Kathete gleich dem anderen Höhenabschnitt.
   b) Umkehrung zu Satz a.
   c) Wird in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt, so ist die Höhe die mittlere Proportionale zwischen dem kleineren Höhenabschnitt und der ihr anliegenden Kathete.
   d) Wird in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt, so ist die grössere Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und der anderen Kathete.
   e) Wird in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt, so ist der Abstand der grösseren Kathete gleich dem kleineren Höhenabschnitte.
   f) Wird in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt, so werden die Katheten durch die vom Höhenfusspunkte auf sie gefällten Lote stetig geteilt.
8. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Hypotenuse gegeben ist, und in welchem die eine Kathete gleich dem nicht anliegenden Höhenabschnitt ist.



9. **Es sind folgende Sätze zu beweisen** (Fig. 2):
   a) Wird die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Halbierende des rechten Winkels stetig geteilt, so ist die kleinere Kathete der grössere Abschnitt der stetig geteilten anderen Kathete und der kleinere Abschnitt der stetig geteilten grösseren Kathete gleich dem grösseren Abschnitt der stetig geteilten kleineren Kathete.
   b) Wird die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Halbierende des rechten Winkels stetig geteilt, so sind die Abstände der Katheten vom stetigen Teilpunkte der Hypotenuse gleich dem kleineren Abschnitt der stetig geteilten grösseren Kathete oder gleich dem grösseren Abschnitt der stetig geteilten kleineren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

c) Wird die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Halbierende des rechten Winkels stetig geteilt, so teilt der über der Winkelhalbierenden als Durchmesser beschriebene Kreis die Katheten stetig.

d) Wird die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Halbierende des rechten Winkels stetig geteilt, so ist die Halbierende Diagonale eines Quadrates, dessen andere Eckpunkte die Fusspunkte der vom stetigen Teilpunkte der Hypotenuse auf die Katheten gefällten Lote sind.

10. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem die Hypotenuse durch die Halbierende des rechten Winkels stetig geteilt wird, und in welchem die eine der Katheten eine gegebene Länge hat (2 Fälle).
11. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die die Hypotenuse stetig teilende Halbierende des rechten Winkels gegeben ist (Lösung mit Hilfe von II. Aufg. 1 oder 2).
12. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Hypotenuse gegeben ist, und in welchem die eine Kathete der grössere Abschnitt der stetig geteilten anderen ist.
13. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden (vgl. Fig. 2 CDB und ADC), von welchem eine Seite gegeben ist, und in welchem die Höhe auf die eine der anderen Seiten diese stetig teilt und gleich dem grösseren oder kleineren Abschnitt ist (Lösung mit Hilfe von II. Aufg. 1 oder 2).
14. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist:

1. $\alpha = 36^0$ u. b;	3. $a = 36^0$ u. a;	5. $a = 36^0$ u. c;	7. $a = 36^0$ u. ϱ;
2. $\alpha = 72^0$ u. b;	4. $a = 72^0$ u. a;	6. $\alpha = 72^0$ u. c;	8. $a = 72^0$ u. ϱ.

C.

Das gleichschenklige Dreieck.

Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem:

1. ein Schenkel gleich dem grösseren (warum nicht kleineren?) Abschnitt der stetig geteilten, gegebenen Grundlinie ist;
2. die Höhe auf die Grundlinie gleich dem grösseren (oder kleineren) Abschnitt der stetig geteilten, gegebenen Grundlinie ist;
3. der gegebene Schenkel durch die zugehörige Höhe stetig geteilt wird;
4. die Höhe auf die Grundlinie gleich dem grösseren Abschnitt des stetig geteilten, gegebenen Schenkels ist;
5. die Höhe auf den gegebenen Schenkel gleich dem grösseren Abschnitt des stetig geteilten Schenkels ist;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6. das Quadrat über dem Schenkel gleich dem Rechteck aus der gegebenen Grundlinie und der Differenz von Grundlinie und Schenkel ist;
7. das Quadrat über der Grundlinie gleich dem Rechteck aus dem gegebenen Schenkel und der Differenz von Grundlinie und Schenkel ist;
8. das Quadrat über der Grundlinie gleich dem Rechteck aus dem gegebenen Schenkel und der Summe von Grundlinie und Schenkel ist;
9. das Quadrat über der Höhe auf die Grundlinie gleich dem Rechteck aus der gegebenen Grundlinie und: a) der Summe, b) der Differenz von Grundlinie und Höhe ist;
10. das Quadrat über der Grundlinie gleich dem Rechteck aus der gegebenen Höhe auf die Grundlinie und: a) der Summe, b) der Differenz aus beiden ist;
11. das Quadrat über dem Schenkel gleich dem Rechteck aus der zugehörigen, gegebenen Höhe und: a) der Summe, b) der Differenz beider ist;
12. das Quadrat über der zu dem Schenkel gehörigen Höhe gleich dem Rechteck aus dem gegebenen Schenkel und: a) der Summe, b) der Differenz beider ist;
13. die Halbierungslinie des Winkels an der Grundlinie den gegebenen Schenkel stetig teilt.
14. Die Grundlinie der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten, gegebenen Höhe ist;
15. r der grössere (warum nicht kleinere?) Abschnitt des stetig geteilten, gegebenen Schenkels ist;
16. r der grössere (warum nicht kleinere?) Abschnitt der stetig, geteilten, gegebenen Grundlinie ist;
17. ϱ der kleinere (warum nicht grössere?) Abschnitt der stetig geteilten, gegebenen Grundlinie ist;
18. die den Schenkel stetig teilende Transversale der grössere Abschnitt des stetig geteilten, gegebenen Schenkels ist.
19. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem die Höhe auf den Schenkel gleich dem grösseren Abschnitte der stetig geteilten gegebenen Basis ist.
20. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist:

$$\left.\begin{array}{r}\gamma = 36^0 \\ \alpha\,(\beta) = 72^0\end{array}\right\} \text{und: } a\,(b);\ c;\ h_c;\ h_a;\ (h_b);\ p_b^a\,(p_a^b);\ p_b^c\,(p_a^c);\ w_a\,(w_\beta);\ r;\ \varrho.$$

21. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist:

$\alpha\,(\beta) = 36^0$ und: $c;\ a\,(b);\ h_c;\ h_a\,(h_b);\ p_b^a\,(p_a^b);\ p_b^c\,(p_a^c);\ r;\ \varrho.$

22. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist:

$\gamma = 72^0$ und: $a\,(b);\ c;\ h_c;\ h_a\,(h_b);\ p_b^a\,(p_a^b);\ p_b^c\,(p_a^c);\ r;\ \varrho.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

D.

Das schiefwinklige Dreieck.

1. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite und ein Winkel gegeben sind, und in welchem die gegebene Seite durch die zugehörige Höhe stetig geteilt wird.
2. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, in welchem eine Seite und ein Winkel gegeben sind, und von welchem die Höhe auf die gegebene Seite der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Seite ist.
3. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite und ein ihr anliegender Winkel gegeben sind, und in welchem der Radius des Umkreises der grössere Abschnitt der stetig geteilten Seite ist.
4. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben sind, und in welchem der Radius des Inkreises der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Seite ist.
5. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben sind, und in welchem die gegebene Seite durch die zugehörige Winkelhalbierende stetig geteilt wird.
6. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite und die von der sie stetig teilenden Transversalen und den anderen Seiten gebildeten Winkel gegeben sind.
7. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem zwei Seiten und der von der einen von ihnen mit der sie stetig teilenden Transversale gebildete Winkel gegeben sind.
8. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem zwei Seiten und der von einer von ihnen mit der die andere stetig teilenden Transversale gebildete Winkel gegeben sind.
9. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite, ein anliegender (oder der gegenüberliegende) Winkel und die die gegebene Seite stetig teilende Transversale gegeben sind.
10. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite und der Radius des Umkreises gegeben sind, und in welchem die gegebene Seite durch die Höhe stetig geteilt wird.
11. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem der Radius des Umkreises und ein Winkel gegeben sind, und in welchem die Gegenseite des gegebenen Winkels durch die Höhe stetig geteilt wird.
12. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem der Radius des Umkreises und ein Winkel und der von seiner Gegenseite mit der sie stetig teilenden Transversale gebildete Winkel gegeben sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

13. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite, die zugehörige Höhe und die zugehörige stetig teilende Transversale gegeben sind.

14. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite, die zugehörige Höhe und der von der Seite und zugehöriger stetig teilender Transversale gebildete Winkel gegeben sind.

15. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite und ein Winkel gegeben sind, und in welchem die beiden anderen Seiten sich verhalten wie die Abschnitte der stetig geteilten gegebenen Seite.

16. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite, die zugehörige Mittellinie und die stetig teilende Transversale gegeben sind.

17. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite, deren Mittellinie und der von dieser mit der stetig teilenden Transversale gebildete Winkel gegeben sind.

18. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite, deren Mittellinie und der Winkel zwischen einer anderen Seite und der die gegebene stetig teilenden Transversale gegeben sind.

19. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, in welchem das Quadrat über der gegebenen Grundlinie (oder Höhe) gleich ist der Summe aus dem Quadrate der zugehörigen Höhe (oder Grundlinie) und dem Rechteck aus dieser und der Grundlinie (Höhe), und von welchem ausserdem eines der nachfolgenden Stücke gegeben ist:

1. Gegeben a und: α; β; γ; b; c; h_b; h_c; m_a; p_a^c; p_a^b; $\sphericalangle\, m_a a$; $\sphericalangle\, m_a b$; $\sphericalangle\, m_a c$; r; t_a *); $\sphericalangle\, a\, t_a$; $\sphericalangle\, c\, t_a$; $\sphericalangle\, m_a t_a$; $\sphericalangle\, a\, r_2$; $\sphericalangle\, r_2\, h_a$; $\sphericalangle\, r_2\, r_3$.

2. Gegeben b und: α; β; γ; a; c; h_a; h_c; m_b; p_b^c; p_b^a; $\sphericalangle\, m_b b$; $\sphericalangle\, m_b a$; $\sphericalangle\, m_b c$; r; t_b; $\sphericalangle\, b\, t_b$; $\sphericalangle\, a\, t_b$; $\sphericalangle\, c\, t_b$; $\sphericalangle\, m_b t_b$; $\sphericalangle\, b\, r_1$; $\sphericalangle\, r_1\, h_b$; $\sphericalangle\, r_1\, r_3$.

3. Gegeben c und: α; β; γ; a; b; h_b; h_a; m_c; p_c^a; p_c^b; $\sphericalangle\, m_c c$; $\sphericalangle\, m_c a$; $\sphericalangle\, m_c b$; r; t_c; $\sphericalangle\, c\, t_c$; $a\, t_c$; $\sphericalangle\, b\, t_c$; $m_c t_c$; $\sphericalangle\, c\, r_1$; $\sphericalangle\, r_1\, h_c$; $\sphericalangle\, r_1\, r_2$.

4. Die gegebene Grundlinie soll durch die zugehörige Höhe stetig geteilt werden.

20. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, in welchem das Quadrat über der einen, gegebenen Höhe gleich ist der Summe aus dem Quadrate über einer der anderen Höhen und dem Rechteck aus ihr und der gegebenen Höhe, und von welchem eins der nachfolgenden Stücke gegeben ist:

---

*) t_x bezeichnet die Transversale, welche Seite x stetig teilt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Gegeben sei: h_a; die andere Höhe sei h_b:
   a; b; c; α; β; γ; p_a^c; p_b^c; p_b^a; p_a^b; m_a; m_b; $\sphericalangle\, c\, h_a$; $\sphericalangle\, c\, h_b$.
2. Gegeben sei: h_b; die andere Höhe sei h_c:
   a; b; c; α; β; γ; p_c^a; p_c^b; p_a^b; p_a^c; m_b; m_c; $\sphericalangle\, a\, h_c$; $\sphericalangle\, b\, h_a$.
3. Gegeben sei: h_c; die andere Höhe sei h_a:
   a; b; c; α; β; γ; p_c^a; p_c^b; p_a^b; p_a^c; m_a; m_b; $\sphericalangle\, b\, h_c$; $\sphericalangle\, c\, h_a$.

21. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite gegeben ist, in welchem das Rechteck aus ihr und einer anderen Seite gleich der Differenz der Quadrate über beiden Seiten ist, und von welchem ausserdem eins der nachfolgenden Stücke gegeben ist:

   a) Gegeben: a; die andere Seite sei b:
   c; α; β; γ; h_a; h_b; h_c; p_a^c; p_b^a; r; m_b; $\sphericalangle\, a\, m_a$; $\sphericalangle\, a\, m_b$; t_a; $\sphericalangle\, r_2\, a$; $\sphericalangle\, r_2\, h_a$; $\sphericalangle\, r_2\, r_3$.

   b) Gegeben: b; die andere Seite sei c:
   a; α; β; γ; h_a; h_b; h_c; p_b^c; p_b^a; r; m_b; $\sphericalangle\, c\, m_c$; $a\, m_c$; t_b; $\sphericalangle\, r_1\, b$; $\sphericalangle\, r_1\, h_b$; $\sphericalangle\, r_1\, r_3$.

   c) Gegeben: c; die andere Seite sei a:
   b; α; β; γ; h_a; h_b; h_c; p_c^a; p_a^c; r; m_c; $\sphericalangle\, c\, m_c$; $\sphericalangle\, c\, m_a$; t_a; $\sphericalangle\, r_1\, c$; $\sphericalangle\, r_1\, h_c$; $\sphericalangle\, r_1\, r_2$.

22. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite und deren Gegenwinkel gegeben sind, und in welchem die Halbierende des gegebenen Winkels stetig teilende Transversale ist.
23. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem ein Winkel und dessen Halbierende gegeben sind, und in welchem die gegebene Winkelhalbierende stetig teilende Transversale ist.
24. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem eine Seite und einer der ihr anliegenden Winkel gegeben sind, und in welchem die Halbierende des gegebenen Winkels stetig teilende Transversale ist.
25. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem ein Winkel und seine Halbierende, die zugleich stetig teilende Transversale ist, gegeben sind.
26. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem ein Winkel und die Höhe auf die Gegenseite desselben gegeben sind, und in welchem die Halbierende des gegebenen Winkels stetig teilende Transversale ist.
27. **Beweise**: In jedem Dreieck verhalten zwei Seiten sich zueinander wie ihre grösseren (und auch wie die kleineren) durch stetige Teilung erzeugten Abschnitte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

28. **Beweise:** Zieht man von dem stetigen Teilpunkte einer Dreiecksseite zu einer anderen Dreiecksseite die Parallele, so ist diese Parallele gleich dem grösseren Abschnitt der stetig geteilten, ihr parallelen Dreieckseite, wenn diese dem kleineren Abschnitt der ersten Seite anliegt; sie ist gleich dem kleineren Abschnitte, wenn die parallele Dreieckseite dem grösseren Abschnitte der ersten Seite anliegt.

29. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist:

1. $\alpha = 36^0$; c; $r = y$ v. c.
2. $\alpha = 36^0$; c; $\varrho = z$ v. c.
3. $\alpha = 36^0$; c; $p_c^b = y$ v. c.
4. $\beta = 36^0$; a; $r = y$ v. c.
5. $\beta = 36^0$; a; $\varrho = z$ v. c.
6. $\beta = 36^0$; a; $p_a^c = y$ v. c.
7. $\gamma = 36^0$; b; $r = y$ v. c.
8. $\gamma = 36^0$; b; $\varrho = z$ v. c.
9. $\gamma = 36^0$; b; $p_a^b = y$ v. c.

30. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist:

1. $\alpha = 72^0$; c; $w_\alpha = z$ v. c.
2. $\alpha = 72^0$; c; $p_c^a = y$ v. c.
3. $\alpha = 72^0$; c; $h_c = y$ v. c.
4. $\alpha = 72^0$; c; $r = y$ v. c.
5. $\alpha = 72^0$; c; $\varrho = z$ v. c.
6. $\beta = 72^0$; a; $w_\beta = z$ v. a.
7. $\beta = 72^0$; a; $p_a^c = y$ v. a.
8. $\beta = 72^0$; a; $h_a = y$ v. a.
9. $\beta = 72^0$; a; $r = y$ v. a.
10. $\beta = 72^0$; a; $\varrho = z$ v. a.
11. $\gamma = 72^0$; b; $w_\gamma = z$ v. b.
12. $\gamma = 72^0$; b; $p_b^a = y$ v. b.
13. $\gamma = 72^0$; b; $h_b = y$ v. b.
14. $\gamma = 72^0$; b; $r = y$ v. b.
15. $\gamma = 72^0$; b; $\varrho = z$ v. b.

II.

Fundamentalsätze und Aufgaben.

1. **Lehrsatz:** Zieht man von einem Punkte ausserhalb eines Kreises die Tangente an den Kreis und eine Sekante so, dass ihr Sehnenteil der Tangente gleich ist, so wird die Sekante durch den Kreis stetig geteilt, und der Sehnenteil ist der grössere Abschnitt. (Fig. 3.)

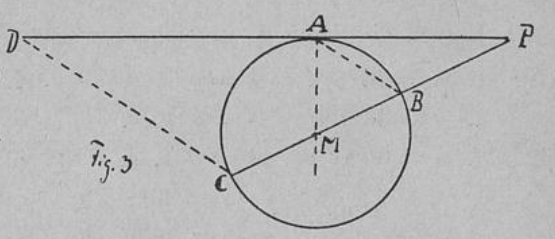
Beweis: Es sei die Sekante gleich p; ihr Sehnenteil $= y$, die Tangente gleich $t = y$. Dann ist $t^2 = y^2 = p \cdot (p - y)$, d. h. y der grössere Abschnitt der stetig geteilten Sekante.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Lehrsatz: Der kleinere Abschnitt einer stetig geteilten Strecke ist der grössere Abschnitt des stetig geteilten grösseren Abschnittes.

1. Aufgabe: Es soll eine Strecke gezeichnet werden, von welcher eine gegebene Strecke PA der durch stetige Teilung erzeugte grössere Abschnitt ist.

Lösung: (Fig. 3.) Ich errichte in A auf AP das Lot $AM = \frac{AP}{2}$ und beschreibe um M mit MA den Kreis. Darauf ziehe ich von P die Mittelpunktssekante PBC; diese ist die verlangte Strecke.



2. Aufgabe: Es soll eine Strecke gezeichnet werden, von welcher eine gegebene Strecke PA der kleinere durch stetige Teilung erzeugte Abschnitt ist.

Lösung: (Fig. 3.) Ich errichte in A auf AP das Lot $AM = \frac{AP}{2}$ beschreibe um M mit MA den Kreis und ziehe die Mittelpunktssekante PBC. Darauf verbinde ich B mit A und ziehe durch C zu BA die Parallele, welche PA in D schneidet. PD ist die verlangte Strecke.

Beweis:
$$DA : AP = CB : PB$$
$$CB : PB = CP : CB$$
$$CP : CB = DP : DA$$
$$DA : AP = DP : DA$$
$DA^2 = DP \cdot AP$, d. h. DP ist in A stetig geteilt und AP der kleinere Abschnitt.*)

3. Aufgabe: Es soll eine Strecke gezeichnet werden so, dass die Summe aus ihr und ihrem grösseren, durch stetige Teilung erzeugten Abschnitt einer gegebenen Strecke gleich ist.

Anal.: Die gegebene Strecke sei s, die gesuchte p, ihr grösserer Abschnitt y, dann ist:
$$y^2 = p \cdot (p - y)$$
$$p^2 = y \ (y + p)$$
$p^2 = s \ (s - p)$, d. h. p der grössere Abschnitt der stetig geteilten Strecke s.

---

*) Wird A mit C verbunden und durch B die Parallele zu CA gezogen, dann wird AP durch diese stetig geteilt. (Stetige Teilung einer Strecke ohne Abtragung.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Konstruktion: Da die gewöhnlich gegebene Konstruktion der stetigen Teilung wegen der Grösse von s eine sehr grosse Figur erfordert, so möge hier eine etwas andere zur Anwendung kommen: Es sei in Fig. 3a $AD = s$. Ich errichte in A auf AD das Lot, trage auf demselben von A aus eine beliebige Strecke einmal bis M, und von A aus auf der Verlängerung von AD über A zweimal hintereinander ab bis P. Darauf beschreibe ich um M mit MA den Kreis, ziehe von P aus die Mittelpunktssekante PBC, verbinde C mit A und ziehe $BE \parallel AP$ und $EF \parallel DC$. Dann ist $DF = p$ und $AF = y$.

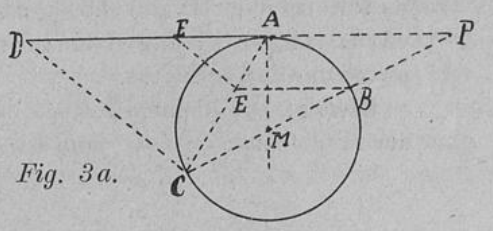


Fig. 3a.

Bemerk.: Verlängert man also eine Strecke um ihren grösseren, durch stetige Teilung erzeugten Abschnitt, so ist sie der grössere Abschnitt der stetig geteilten Summe beider Strecken.

4. Aufgabe: Es soll eine Strecke gezeichnet werden, so dass die Summe aus ihr und ihrem kleineren durch stetige Teilung erzeugten Abschnitte einer gegebenen Strecke gleich ist.

Lösung: Es sei in Fig. 3b $AD = p + z$. Ich errichte in A auf AD das beliebig lange Lot AE, halbiere es in M und beschreibe um M mit $\frac{AE}{2}$ den Kreis. In E lege ich an den Kreis die Tangente $EP = AE$, ziehe die Mittelpunktssekante $PCMBP_1$, ziehe alsdann $CF \parallel EP$ und $FG \parallel CP$, dann ist GA die gesuchte Strecke und DG ihr kleinerer, durch stetige Teilung erzeugter Abschnitt.

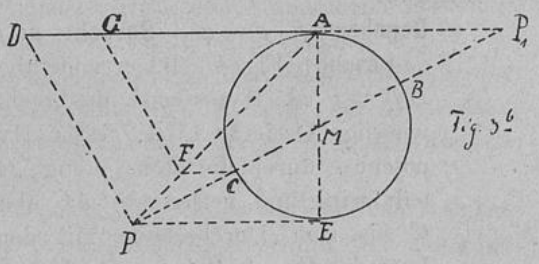


Fig. 3b

Beweis: Es ist: $AG : DG = AF : PF$

$$\underline{AF : PF = P_1C : PC = P_1C : P_1B}$$

$AG : DG = P_1C : P_1B$, d. h. DG ist gleich dem kleineren Abschnitte der stetig geteilten Strecke AG.

5. Aufgabe: Es soll eine Strecke gezeichnet werden, von welcher die Differenz des grösseren und kleineren durch stetige Teilung erzeugten Abschnittes gegeben ist.

Lösung: Es seien y und z der grössere bezüglich der kleinere Abschnitt der stetig geteilten gesuchten Strecke p; ferner sei $y - z = d$. Nun ist: $z^2 = y(y - z) = y \cdot d$. Es ist ferner: $y = d + z$, also: $z^2 = d \cdot (d + z)$ oder $d^2 = z(z - d)$, d. h. d ist der grössere Abschnitt der stetig geteilten Strecke z, die sich nach Aufgabe 1 her-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

stellen lässt. $y = d + z$ und $p = y + z$ ergeben dann die gesuchte Strecke p.*)

3. Lehrsatz: (Fig. 1.) In jedem rechtwinkligen Dreieck, in welchem die Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt wird, ist die kleinere Kathete gleich dem grösseren Hypotenusenabschnitte.

Beweis: Die kleinere Kathete sei a; der grössere Höhenabschnitt der Hypotenuse c sei y; dann ist:

$$a^2 = c \cdot (c - y)$$
$$y^2 = c \quad (c - y)$$
$$a^2 = y^2$$
$$a = y$$

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich sehr leicht der Satz beweisen.

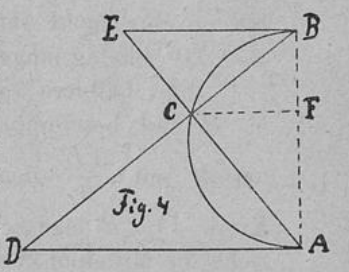
4. Lehrsatz: (Fig. 1.) Wird in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt, so teilen die Lote vom Höhenfusspunkte auf die Katheten diese ebenfalls stetig. —

Diese Sätze über das rechtwinklige Dreieck ermöglichen die Lösung der Aufgaben, aus dem Produkte zweier der drei bei der stetigen Teilung in Frage kommenden Strecken diese selbst und die dritte herzustellen:

6. Aufgabe:

a) **Gegeben:** $p \cdot y = q^2$. **Gesucht:** *p; y und z.*

Lösung: (Fig. 4.) Ich errichte über $AB = q$ als Hypotenuse das rechtwinklige Dreieck ACB, dessen Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt wird und verlängere AC über C bis zum Durchschnitt mit dem Lote in B auf BA im Punkte E. Dann ist $BA^2 = AE \cdot AC$ und AC der grössere EC der kleinere Abschnitt der stetig geteilten Strecke AE. Also $AE = p$; $AC = y$; $EC = z$.



*) Wird eine Strecke stetig geteilt, so ist das Verhältnis der drei dabei in Betracht kommenden Strecken zueinander ein konstantes. Ist dieses nachgewiesen, dann lassen sich die Aufgaben 1 bis 5, indem man das Teilungsverhältnis durch stetige Teilung einer beliebigen Strecke sich verschafft, auf die bekannte Konstruktion der 4. Proportionalen zurückführen. Es sei wieder p die ganze Strecke, y ihr grösserer, z ihr kleinerer Abschnitt und das Teilungsverhältnis $y : z = m : n$, dann ist:

Aufgabe 1: $(y + z) : y = (m + n) : m$, d. h. $y + z = p$ die 4. Prop. zw. m, $(m + n)$ u. y.

Aufgabe 2: $(y + z) : z = (m + n) : n$, d. h. $y + z = p$ die 4. Prop. zw. n, $(m + n)$ u. z.

Aufgabe 3: $(y + z + y) : (y + z) = (2\,m + n) : (m + n)$, d. h. $y + z = p$ die 4. Prop. zw. $(2\,m + n)$, $(m + n)$ u. $p + y$.

Aufgabe 4: $(y + z + z) : (y + z) = (m + 2\,n) : (m + n)$, d. h. $y + z = p$ die 4. Prop. zw. $(m + n)$, $(m + 2\,n)$; $p + z$.

Aufgabe 5: $(y - z) : (y + z) = (m - n) : (m + n)$, d. h. $y + z = p$ die 4. Prop. zw. $(m - n)$, $(m + n)$, $y - z$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) **Gegeben:** $p \cdot z = q^2$. **Gesucht:** *p; z und y.*

Lösung: (Fig. 4.) Ich errichte über $AB = q$ als Hypotenuse das rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt wird und verlängere BC über C bis zum Durchschnitt mit dem Lote in A auf AB in D. Dann ist: $BA^2 = BD \cdot BC$ und BC der kleinere, DC der grössere Abschnitt der stetig geteilten Strecke BD. Also $BD = p$; $DC = y$; $BC = z$. — Da $AB = q = DC$ ist, so ist diese Lösung eine andere Lösung der Aufgabe 1 und ist hier lediglich der Vollständigkeit wegen gegeben.

c) **Gegeben:** $y \cdot z = q^2$. **Gesucht:** *y; z und p.*

Lösung: Genau wie in a). Es ist alsdann: $AC = z$; $AE = y$ und $AC + AE = p$.

A.

Das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck.

1. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Höhe und die Summe aus der Hypotenuse und ihrem grösseren, durch stetige Teilung erzeugten Abschnitte gegeben ist.
2. Es soll ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Summe oder die Differenz der Hypotenuse und ihres grösseren, durch stetige Teilung erzeugten Abschnittes gegeben ist.
3. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Höhe und der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Hypotenuse gegeben sind.
4. Es soll ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Hypotenuse gegeben ist.
5. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die eine Kathete gegeben ist, und in welchem die Differenz der Kathetenquadrate gleich dem Rechteck aus den Katheten ist.
6. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem der eine, gegebene Höhenabschnitt der grössere Abschnitt (oder der kleinere) der stetig geteilten Hypotenuse ist.
7. **Es ist zu beweisen:** Ist die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks stetig teilende Transversale nach der Hypotenuse, so ist die kleinere der Katheten gleich dem grösseren Höhenabschnitt.
8. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem die eine Kathete gleich dem gegebenen, ihr nicht anliegenden Höhenabschnitt ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. **Es ist zu beweisen:** Wird in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt, so ist der Abstand der grösseren Kathete gleich dem kleineren Höhenabschnitt der Hypotenuse.
10. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem der gegebene Abstand der einen Kathete dem dieser nicht anliegenden Höhenabschnitte gleich ist.
11. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Hypotenuse und: α) ein spitzer Winkel; β) die die Hypotenuse stetig teilende Transversale; γ) der Winkel zwischen der Mittellinie und stetig teilenden Transversale der Hypotenuse; δ) der Winkel zwischen Hypotenuse und stetig teilender Transversale gegeben ist.
12. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Summe der Hypotenuse und ihres grösseren, durch stetige Teilung erzeugten Abschnittes und: α) ein spitzer Winkel; β) die Höhe; γ) die stetig teilende Transversale zur Hypotenuse; δ) der Winkel zwischen einer Kathete und der stetig teilenden Transversale zur Hypotenuse; ε) der Winkel zwischen der Hypotenuse und der sie stetig teilenden Transversale gegeben ist.
13. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem eine gegebene Kathete die mittlere Proportionale zur Hypotenuse und der anderen Kathete ist.
14. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Summe der Katheten gegeben ist, und in welchem die eine Kathete der grössere Abschnitt der stetig geteilten anderen ist.
15. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Summe der Hypotenuse und einer Kathete gegeben ist, und in welchem die Kathete der grössere Abschnitt der stetig geteilten Hypotenuse ist.
16. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem die eine gegebene Kathete gleich dem grösseren Höhenabschnitt auf der Hypotenuse ist.
17. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem die Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt wird und von welchem die Summe (das Produkt) der Hypotenuse und: a) des grösseren, b) des kleineren Abschnittes gegeben ist.
18. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem die Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt wird, und von welchem die Differenz (das Produkt) der Höhenabschnitte der Hypotenuse gegeben ist.
19. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, in welchem die eine Seite gleich dem grösseren Abschnitt der durch das Lot von einem Eckpunkte stetig geteilten, gegebenen Diagonale ist.
20. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, in welchem die eine gegebene Seite der grössere Abschnitt der durch das Lot von einem Eckpunkte aus stetig geteilten Diagonale ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

21. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem die Hypotenuse durch die Höhe stetig geteilt wird, und von welchem das Produkt aus der Hypotenuse und dem grösseren (oder kleineren) Höhenabschnitt gegeben ist.
22. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, in welchem die eine Seite der grössere Abschnitt der stetig geteilten anderen, und dessen Inhalt einem gegebenen Quadrate gleich ist.
23. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem das Produkt der Katheten gegeben ist, und in welchem die eine Kathete der grössere Abschnitt der stetig geteilten anderen ist.
24. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die gegebene Grundlinie der grössere (oder kleinere) Abschnitt des stetig geteilten Schenkels ist.
25. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem der gegebene Schenkel die Summe der Grundlinie und ihres grösseren durch stetige Teilung erzeugten Abschnittes ist.
26. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem der gegebene grössere (oder kleinere) Abschnitt des stetig geteilten Schenkels ein Höhenabschnitt desselben ist.
27. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem die gegebene Höhe zur Grundlinie der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Grundlinie ist.
28. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem die gegebene Höhe auf die Grundlinie der grössere (oder kleinere) Abschnitt des stetig geteilten Schenkels ist.
29. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Summe des Schenkels und der Grundlinie gegeben ist, und in welchem die Grundlinie der grössere (oder kleinere) Abschnitt des stetig geteilten Schenkels ist.
30. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, von welchem der Schenkel gegeben ist, und in welchem die Höhe auf die Grundlinie die mittlere Proportionale zum Schenkel und der halben Grundlinie ist.
31. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, in welchem die Grundlinie der grössere (oder kleinere) Abschnitt des stetig geteilten Schenkels, und das Rechteck aus beiden einem gegebenen Quadrate gleich ist.
32. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, dessen Schenkel durch die zugehörige Höhe stetig geteilt wird, wenn das Produkt der Höhenabschnitte (oder eines von ihnen und des Schenkels) gegeben ist.
33. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist:
    1. c u. $\gamma = 36^0$; 2. $u = a - c$ u. $\gamma = 36^0$; 3. w_a u. $\gamma = 36^0$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

34. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist:

1. F u. $c = y$ v. h_c; 3. F u. $h_c = y$ v. c; 5. F u. $h_a = y$ v. a;
2. F u. $c = z$ v. h_c; 4. F u. $h_c = z$ v. c; 6. F u. $h_a = z$ v. a.

35. Es soll ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist:

1. F u. $a = y$ v. b; 3. F u. $h_c = y$ v. c;
2. F u. $a = z$ v. b; 4. F u. $h_c = z$ v. c.

B.

Das schiefwinklige Dreieck.

1. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, in welchem das Quadrat über einer gegebenen Höhe gleich ist der Differenz des Quadrates über der zugehörigen Seite und dem Rechteck aus der Höhe und Seite, und von welchem eins der nachfolgenden Stücke gegeben ist:

a) Gegeben h_a und: α; β; γ; m_a; p_a^c; p_a^b; $\sphericalangle a\, m_a$; $\sphericalangle b\, m_a$; $\sphericalangle c\, m_a$; r; t_a; $\sphericalangle a\, t_a$; $\sphericalangle b\, t_a$; $\sphericalangle c\, t_a$; $\sphericalangle m_a\, t_a$; $\sphericalangle a\, r_2$; $\sphericalangle r_2\, h_a$; $\sphericalangle r_2\, r_3$.

b) Gegeben h_b und: α; β; γ; m_b; p_b^c; p_b^a; $\sphericalangle a\, m_b$; $\sphericalangle b\, m_b$; $\sphericalangle c\, m_b$; r; t_b; $\sphericalangle b\, t_b$; $\sphericalangle a\, t_b$; $\sphericalangle m_b\, t_b$; $\sphericalangle b\, r_1$; $\sphericalangle r_1\, h_b$; $\sphericalangle r_1\, r_3$.

c) Gegeben h_c und: α; β; γ; m_c; p_c^b; p_c^a; $\sphericalangle m_c\, b$; $\sphericalangle c\, m_c$; $\sphericalangle a\, m_c$; r; t_c; $\sphericalangle c\, t_c$; $\sphericalangle a\, t_c$; $\sphericalangle b\, t_c$; $\sphericalangle c\, r_1$; $\sphericalangle r_1\, h_c$; $\sphericalangle r\, r_2$.

2. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem gegeben ist:

$a - b = d$ und: c; α; β; γ; h_a; h_b; h_c; p_a^c; p_b^a; r; m_a; $\sphericalangle a\, m_a$; $\sphericalangle a\, m_b$; $\sphericalangle a\, r_2$; $\sphericalangle r_2\, h_a$; $\sphericalangle r_2\, r_3$; t_a; $\sphericalangle b\, t_a$.

$a - c = d$ und: b; α; β; γ; h_a; h_b; h_c; p_c^a; p_a^c; r; m_a; $\sphericalangle c\, m_c$; $\sphericalangle c\, m_a$; t_c; $\sphericalangle a\, t_c$; $\sphericalangle b\, r_1$; $\sphericalangle r_1\, h_b$; $\sphericalangle r_1\, r_3$.

$b - c = d$ und: a; α; β; γ; h_a; h_b; h_c; p_b^c; p_b^a; r; m_c; $\sphericalangle c\, m_c$; $\sphericalangle a\, m_c$; t_b; $\sphericalangle c\, t_b$; $\sphericalangle c\, r_1$; $\sphericalangle r_1\, h_c$; $\sphericalangle r_1\, r_2$

und in welchem:

α) das Quadrat über der gegebenen Differenz gleich ist der Differenz des Quadrates über der einen Seite und dem Rechteck aus ihr und der gegebenen Differenz;

β) das Quadrat über der einen Seite gleich ist der Summe des Quadrates über der gegebenen Differenz und dem Rechteck aus ihr und der Seite;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

γ) die Summe der Quadrate über den Seiten, deren Differenz gegeben ist, gleich ist dem dreifachen Rechteck aus ihnen;

δ) die gegebene Differenz der Seiten die mittlere Proportionale zu ihnen ist.

3. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Summe zweier Seiten und eins der in 2 angegebenen Stücke gegeben sind, und in welchem:

α) das Quadrat über der gegebenen Summe gleich ist der Summe aus dem Quadrate einer der Seiten und dem Rechteck aus ihr und der gegebenen Summe;

β) das Quadrat über einer der Seiten gleich ist der Differenz des Quadrates über der gegebenen Summe und dem Rechteck aus ihr und der Seite.

4. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Differenz einer Seite (Höhe) und der zugehörigen Höhe (Seite) und eins der nachfolgenden Stücke gegeben sind:

$$\left.\begin{matrix} a-h_a \\ \text{o.} \\ h_a-a \end{matrix}\right\} = d \text{ und: } \left\{\begin{matrix} c; & b; & \alpha; & \beta; & \gamma; & m_a; \\ \sphericalangle b\,m_a; & \sphericalangle c\,m_a; & \sphericalangle h_a\,m_a; & \sphericalangle a\,m_a; & r; & p_a^b; \\ h_b; & h_c; & t_a; & \sphericalangle a\,r_2; & \sphericalangle r_2 h_a; & \sphericalangle r_1 r_3 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} b-h_b \\ \text{o.} \\ h^b-b \end{matrix}\right\} = d \text{ und: } \left\{\begin{matrix} a; & c; & \alpha; & \beta; & \gamma; & m_b; \\ \sphericalangle b\,m_b; & \sphericalangle a\,m_b; & \sphericalangle h_b\,m_b; & r; & t_b; & h_a; \\ h_c; & p_b^c; & \sphericalangle a\,t_b; & \sphericalangle b\,r_1; & \sphericalangle r_1 h_b; & \sphericalangle r_1 r_3 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} c-h_c \\ \text{o.} \\ h_c-c \end{matrix}\right\} = d \text{ und: } \left\{\begin{matrix} a; & b; & \alpha; & \beta; & \gamma; & m_c; \\ t_c; & \sphericalangle c\,m_c; & \sphericalangle h_c\,m_c; & r; & h_a; & h_b; \\ p_c^a; & \sphericalangle c\,t_c; & \sphericalangle c\,r_1; & \sphericalangle r_1 h_c; & \sphericalangle r_1 r_2 & \end{matrix}\right.$$

und in welchem:

α) das Quadrat über der gegebenen Differenz gleich ist der Differenz aus dem Quadrate über der Höhe (Seite) und dem Rechteck aus dieser und der Differenz;

β) das Quadrat über der Seite (Höhe) gleich ist der Summe aus dem Quadrate der Differenz und dem Rechteck aus ihr und der Differenz;

γ) die gegebene Differenz die mittlere Proportionale zwischen Seite und Höhe ist;

δ) die gegebene Differenz der kleinere Abschnitt der stetig geteilten Seite (Höhe) ist.

5. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Summe einer Seite und der zugehörigen Höhe und eins der anderen in 4 zusammengestellten Stücke gegeben sind, und in welchem:

α) das Quadrat über der gegebenen Summe gleich ist der Summe aus dem Quadrate über der Seite (Höhe) und dem Rechteck aus ihr und der Summe ist;

β) das Quadrat über der Seite (Höhe) gleich der Differenz aus dem Quadrate über der gegebenen Summe und dem Rechteck aus ihr und der Seite (Höhe).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Differenz zweier Höhen und eins der nachfolgenden Stücke gegeben sind:
   1. $h_a - h_b = d$ und: a; b; c; α; β; γ; h_c; w_c; p_a^c; p_b^c; $\sphericalangle b\, m_a$
   2. $h_b - h_c = d$ und: a; b; c; α; β; γ; h_a; w_a; p_b^a; p_a^b; $\sphericalangle b\, m_c$
   3. $h_c - h_a = d$ und: a; b; c; α; β; γ; h_b; w_b; p_c^b; p_a^b; $\sphericalangle c\, m_a$

   und in welchem:
   α) die kleinere der Höhen gleich dem grösseren Abschnitt der stetig geteilten anderen Höhe ist;
   β) die gegebene Differenz der kleinere Abschnitt der stetig geteilten einen Höhe ist;
   γ) die grössere der Höhen die mittlere Proportionale zwischen der gegebenen Differenz und der Summe aus ihr und der grösseren Höhe ist;
   δ) die gegebene Differenz die mittlere Proportionale zwischen der kleineren Höhe und der Summe aus ihr und der Differenz ist;
   ε) die gegebene Differenz die mittlere Proportionale zwischen der grösseren Höhe und der Summe aus ihr und der gegebenen Differenz ist.

7. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Summe zweier Höhen und eins der in 6 zusammengestellten Stücke gegeben sind, und in welchem:
   α) die kleinere der Höhen gleich dem grösseren Abschnitt der stetig geteilten anderen Höhe ist;
   β) die eine der Höhen die mittlere Proportionale zwischen der gegegebenen Summe und der Differenz aus dieser und der Höhe ist.

8. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, in welchem der gegebene Höhenabschnitt einer Seite der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Seite und eins der nachfolgenden Stücke gegeben ist:

   Gegeben: p_a^c und: b; c; α; β; γ; r; m_a; $\sphericalangle c\, h_a$; $\sphericalangle b\, h_a$; h_a; h_b; h_c; $\sphericalangle a\, m_a$; $\sphericalangle b\, m_a$; $\sphericalangle a\, r_2$; $\sphericalangle r_2\, h_a$; $\sphericalangle r_2\, r_3$.

   „ p_b^a und: a; c; α; β; γ; r; m_b; $\sphericalangle c\, h_b$; $\sphericalangle a\, h_b$; h_a; h_b; h_c; $\sphericalangle b\, m_b$; $\sphericalangle c\, m_b$; $\sphericalangle b\, r_1$; $\sphericalangle r_1\, h_b$; $\sphericalangle r_1\, r_3$.

   „ p_c^b und: a; b; α; β; γ; r; m_c; $\sphericalangle a\, h_c$; $\sphericalangle b\, h_c$; h_a; h_b; h_c; $\sphericalangle c\, m_c$; $\sphericalangle a\, m_c$; $\sphericalangle c\, r_1$; $\sphericalangle r_1\, h_c$; $\sphericalangle r_1\, r_2$.

9. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, in welchem die Höhe auf eine Seite der grössere Abschnitt der stetig geteilten Seite ist, in welchem ferner die Summe der Höhe und Seite und eins der nachfolgenden Stücke gegeben ist:

   Gegeben: $a + h_a = s$ und: b; c; α; β; γ; p_a^c; p_b^a; m_a; h_b; h_c; r; $\sphericalangle a\, m_a$; $\sphericalangle b\, m_a$; $\sphericalangle a\, r_2$; $\sphericalangle r_2\, h_a$; $\sphericalangle r_2\, r_3$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gegeben: $b + h_b = s$ und: a; c; α; β; γ; p_b^c; p_b^a; m_b; h_c; h_a; r; $\sphericalangle b\, m_b$; $\sphericalangle a\, m_b$; $\sphericalangle b\, r_1$; $\sphericalangle r_1\, h_b$; $\sphericalangle r_1\, r_3$.

„ $c + h_c = s$ und: a; b; α; β; γ; p_c^b; p_c^a; m_c; h_a; h_b; r; $\sphericalangle a\, m_c$; $\sphericalangle b\, m_c$; $\sphericalangle c\, r_1$; $\sphericalangle r_1\, h_c$; $\sphericalangle r_1\, r_2$.

10. Von einem Dreieck ist die Summe einer Seite und der Projektion einer anderen auf sie, welche der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Seite ist und eins der beigefügten Stücke gegeben:

$a + p_a^b = s$ und: b; c; α; β; γ; h_a; m_a; r; $\sphericalangle b\, h_a$; $\sphericalangle r_2\, r_3$; $\sphericalangle r_2\, h_a$.

$b + p_b^a = s$ und: a; c; β; γ; α; h_a; m_b; r; $\sphericalangle b\, h_b$; $\sphericalangle r_1\, h_b$; $\sphericalangle r_1\, r_3$.

$c + p_c^a = s$ und: a; b; α; β; γ; h_b; m_c; r; $\sphericalangle h_c\, h_b$; $\sphericalangle h_a\, h_b$; $\sphericalangle r_1\, r_2$.

11. Von einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten, von denen die eine der grössere Abschnitt der stetig geteilten anderen ist, und eins der in 2 angegebenen Stücke gegeben.

12. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, in welchem eine gegebene Seite der grössere Abschnitt der stetig geteilten zweiten, und der kleinere Abschnitt der stetig geteilten dritten Seite ist.

13. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem ein Winkel und dessen Halbierende gegeben sind, und in welchem diese Halbierende stetig teilende Transversale ist. (Vgl. I D 28.)

14. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, in welchem die Höhe auf eine der Seiten der grössere (y) oder kleinere (z) Abschnitt der stetig geteilten zugehörigen Seite ist. Es ist also gegeben:

1. $h_a = y\ (z)$ v. a; F und: α; β; γ; h_b; h_c; p_a^b; p_a^c; r; $\sphericalangle a\, m_a$; $\sphericalangle b\, m_a$; m_a; c.
2. $h_b = y\ (z)$ v. b; F und: α; β; γ; h_a; h_c; p_b^c; p_b^a; r; $\sphericalangle b\, m_b$; $\sphericalangle a\, m_b$; m_b; a.
3. $h_c = y\ (z)$ v. c; F und: α; β; γ; h_a; h_b; p_c^b; p_c^a; r; $\sphericalangle c\, m_c$; $\sphericalangle b\, m_c$; m_c; b.

Anal.: $a \cdot h_a = p \,.\, y$ (oder $p \cdot z$) $= 2\,F$ also p u. y d. h. a u. h_a herstellbar.

15. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, wenn gegeben ist:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ a = y\,(z) \text{ v. } h_a;\ F \\ 2.\ b = y\,(z) \text{ v. } h_b;\ F \\ 3.\ c = y\,(z) \text{ v. } h_c;\ F \end{array}\right\} \text{und eins der weiteren in 14 angegebenen St.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

C.

Das Parallelogramm.

1. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, von welchem die Summe zweier Seiten gegeben ist, von denen die eine der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten anderen ist.
2. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, in welchem die eine gegebene Seite der grössere (kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Diagonale ist.
3. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, von welchem die Summe einer Seite und der Diagonale gegeben ist, und in welchem die Seite der grössere (kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Diagonale ist.
4. Es soll ein Rhomboid gezeichnet werden, von welchem ein Winkel und die Summe der beiden anstossenden Seiten gegeben sind, von denen die eine der grössere Abschnitt der stetig geteilten anderen ist.
5. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, von welchem die Summe der Diagonalen, von denen die kleinere der grössere Abschnitt der stetig geteilten anderen, gegeben ist.
6. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, von welchem die Summe einer Diagonale und der Höhe, welche letztere der grössere Abschnitt der stetig geteilten Diagonale, gegeben ist.
7. Es soll ein Rhomboid gezeichnet werden, von welchem zwei anstossende Seiten gegeben sind, von denen die eine der grössere Abschnitt der stetig geteilten einen Diagonale ist.
8. Es soll ein Rhomboid gezeichnet werden, von welchem ein Winkel und eine Seite, welche der grössere (kleinere) Abschnitt der stetig geteilten einen Diagonale ist, gegeben sind.
9. Es soll ein Rhomboid gezeichnet werden, von welchem eine Seite und die zugehörige Höhe, welche der grössere Abschnitt der stetig geteilten einen Diagonale ist, gegeben sind.
10. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, in welchem ein Winkel 36^0 beträgt, und die diesem Winkel gegenüberliegende Diagonale eine gegebene Länge hat.
11. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, in welchem ein Winkel 36^0 beträgt, und von welchem das Produkt der kleineren Diagonale und der Seite gegeben ist.
12. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, in welchem die eine Diagonale der grössere (oder kleinere) Abschnitt der anderen ist, und das Produkt beider eine gegebene Grösse hat.
13. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, in welchem die Diagonalen sich zu einander verhalten wie der grössere Abschnitt einer Strecke zum kleineren, und ihr Produkt eine gegebene Grösse hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

14. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, von welchem das Produkt einer Diagonale und Höhe, welche letztere der grössere (kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Diagonale, gegeben ist.
15. Es soll ein Rhomboid gezeichnet werden, von welchem eine Seite und das Produkt der anderen Seite und einer der Diagonalen, welche der grössere (kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Seite, gegeben ist (die Seite der grössere oder kleinere Abschnitt der stetig geteilten Diagonale).
16. Es soll ein Rhomboid gezeichnet werden, in welchem die Höhe auf eine der Seiten der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Seite ist, und von welchem ausserdem ein Winkel (eine Diagonale) und der Flächeninhalt gegeben sind.

D.

Der Kreis.

1. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt, und dessen Halbmesser der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten Zentrale ist.
2. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher einen gegebenen Kreis berührt und durch einen Punkt P geht, so dass die Zentrale durch den Berührungspunkt stetig geteilt wird.
3. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt, so dass sein Berührungshalbmesser durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises stetig geteilt wird.
4. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt, so dass sein Berührungshalbmesser durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises stetig geteilt wird.
5. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher einen gegebenen Kreis unter einer gegebenen Sehne schneidet, so dass die Zentrale durch die gemeinschaftliche Sehne stetig geteilt wird.
6. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, und einen gegebenen Kreis unter einer Sehne mit gegebenem Peripheriewinkel schneidet, so dass die gemeinschaftliche Sehne die Zentrale stetig teilt.
7. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher durch einen innerhalb eines gegebenen Kreises liegenden Punkt geht, den Kreis berührt und seinen Berührungsradius stetig teilt.
8. Durch einen gegebenen Kreis soll eine Sekante so gezogen werden, dass sie durch einen gegebenen Punkt geht und den grösseren (oder kleineren) Abschnitt des stetig geteilten Radius zum Abstande vom Mitttelpunkte hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. Es soll eine Gerade so gezogen werden, dass sie den einen von zwei gegebenen Kreisen berührt und den anderen unter einer Sehne schneidet, welche den durch ihren Mittelpunkt gehenden Halbmesser stetig teilt.
10. Es soll eine Gerade so gezogen werden, dass sie den einen von zwei gegebenen Kreisen unter einer Sehne mit gegebenen Peripheriewinkel und den anderen unter einer Sehne so schneidet, dass der durch ihren Mittelpunkt gezogene Halbmesser durch sie stetig geteilt wird.
11. Durch einen Punkt innerhalb eines Kreises soll eine Sehne gezogen werden, welche dem grösseren (oder kleineren) Abschnitte des stetig geteilten Durchmessers (oder Halbmessers) gleich ist.
12. Durch einen Punkt ausserhalb eines Kreises soll eine Sekante durch den Kreis gezogen werden, deren Sehnenteil dem grösseren (oder kleineren) Abschnitte des stetig geteilten Durchmessers (Halbmessers) gleich ist.
13. Durch einen Punkt innerhalb eines Kreises soll eine Sehne gezogen werden, deren Mittelpunktsabstand dem grösseren (oder kleineren) Abschnitte des stetig geteilten Halbmessers (Durchmessers) gleich ist.
14. Durch einen Punkt ausserhalb eines Kreises soll eine Sekante gezogen werden, deren Mittelpunktsabstand dem grösseren (oder kleineren) Abschnitte des stetig geteilten Halbmessers (Durchmessers), gleich ist.
15. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt, so dass der Halbmesser des gegebenen Kreises der kleinere (oder grössere) Abschnitt des stetig geteilten Halbmessers (oder Durchmessers) des gesuchten Kreises ist.
16. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt, so dass der Halbmesser des gegebenen Kreises der grössere (oder kleinere) Abschnitt des stetig geteilten Halbmessers (Durchmessers) des gesuchten Kreises ist.
17. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt, so dass der Halbmesser des gegebenen Kreises der grössere (oder kleinere) Abschnitt des stetig geteilten Halbmessers des gesuchten Kreises ist.
18. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher einen gegebenen Kreis unter einer gegebenen Sehne (oder einer Sehne mit gegebenem Umfangs- oder Mittelpunktswinkel) schneidet und durch einen gegebenen Punkt geht, so dass der Halbmesser des gegebenen Kreises der grössere (odere kleinere) Abschnitt des stetig geteilten Halbmessers des gesuchten Kreises ist.
19. Es sollen durch zwei Punkte zwei Kreise der Art gelegt werden, dass der Halbmesser des einen der grössere Abschnitt des stetig geteilten anderen, und die Differenz der beiden Radien einer gegebenen Strecke (dem Abstande der beiden Punkte) gleich ist.

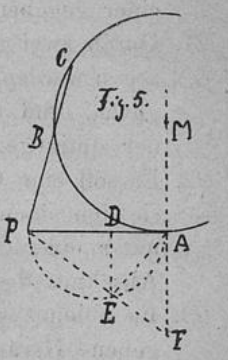
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

20. Durch zwei Punkte sollen zwei Kreise der Art gelegt werden, dass der Halbmesser des einen der grössere (oder kleinere) Abschnitt des stetig geteilten anderen ist, und dass die Summe der Halbmesser einer gegebenen Strecke gleich ist.
21. Durch zwei gegebene Kreise soll eine gemeinschaftliche Sekante gezogen werden, so dass die Summe der Sehnen einer gegebenen Strecke gleich, und die eine Sehne der grössere (oder kleinere) Abschnitt der stetig geteilten anderen ist.
22. Es soll eine Gerade von gegebener Länge so gezogen werden, dass sie den einen von zwei gegebenen Kreisen berührt und den anderen unter einer Sehne schneidet, welche dem grösseren (oder kleineren) Abschnitt des stetig geteilten Tangentenstücks der Linie gleich ist.
23. Es sollen zwei Kreise gezeichnet werden der Art, dass sie eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, und die gegebene Differenz ihrer Halbmesser die mittlere Proportionale zu ihnen ist.
24. Durch zwei gegebene Punkte sollen zwei Kreise der Art gelegt werden, dass die gemeinschaftliche Sehne Differenz und mittlere Proportionale der Radien ist.
25. Es sollen zwei Ringkreise gezeichnet werden, so dass die gegebene Differenz ihrer Radien die mittlere Proportionale derselben ist.
26. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher einen gegebenen Kreis in einem von zwei gegebenen Punkten berührt, und dass die durch den anderen Punkt gezogene gemeinschaftliche Berührungssekante beider Kreise durch den Berührungspunkt stetig geteilt wird.
27. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt, und dass der grössere (oder kleinere) Abschnitt der durch den Berührungspunkt stetig geteilten Berührungssekante eine gegebene Länge hat.
28. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt, so dass eine der gemeinschaftlichen Berührungssekanten durch den Berührungspunkt stetig geteilt wird und gleich dem Durchmesser des gegebenen Kreises ist.
29. Von einem Punkte ausserhalb eines Kreises soll eine Sekante gezogen werden, dass ihr Sehnenteil der grössere Abschnitt der stetig geteilten Sekante ist.

    Anal.: Es sei y der Sehnenteil, x die ganze Sekante, p die Tangente vom gegebenen Punkte aus. Dann ist $y^2 = x\,(x - y)$; $x \cdot (x - y) = p^2$ also: $y = p$; d. h. die gesuchte Sekante ist Tangente vom gegebenen Punkte an den Abstandskreis der Sehnen gleich p im gegebenen Kreise. (Beschränkte Möglichkeit der Lösung.) (Vgl. II. Lehrs. 1.)
30. Von einem Punkte ausserhalb eines Kreises soll eine Sekante gezogen werden, so dass der äussere Teil derselben der grössere Abschnitt der stetig geteilten Sekante ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lösung: (Fig. 5.) Es sei P der gegebene Punkt. Ich lege von P an den Kreis die Tangente PA, und teile dieselbe in D stetig, so dass PD der grössere Abschnitt ist. Dann errichte ich über PA das rechtwinklige Dreieck PEA, dessen Höhenfusspunkt D ist, verlängere PE bis zum Durchschnitt mit dem Lote in A auf AP in F und beschreibe um P mit PF den Kreis, welcher den gegebenen in C schneidet und ziehe die Sekante PBC. Diese ist die verlangte.



Beweis: $PA^2 = PF \cdot PE$

$PA^2 = PC \cdot PB$

$PF \cdot PE = PC \cdot PB$

$PE = PB$ mithin $PB^2 = PC \cdot BC$.

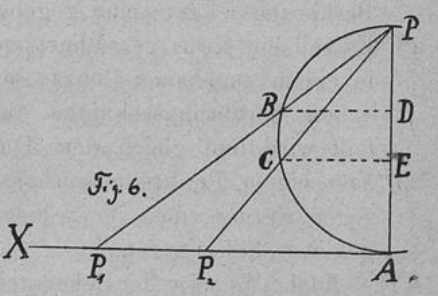
31. **Beweise:** (Fig. 6.)

a) Zieht man von einem beliebigen Punkte der Tangente eines Kreises die Sekante nach dem anderen Endpunkte des Berührungsdurchmessers, so ist der Durchmesser die mittlere Proportionale zur Sekante und ihrem Sehnenteil. Oder:

b) Zieht man von einem beliebigen Punkte der Peripherie eines Kreises eine Sekante bis zum Durchschnitt mit der in dem anderen Endpunkte des durch den angenommenen Punkt gehenden Durchmessers an den Kreis gelegten Tangente, so ist der Durchmesser die mittlere Proportionale zur Sekante und ihrem Sehnenteil.

32. Von dem einen Endpunkte eines Kreisdurchmessers soll eine Sekante nach der im anderen Endpunkte an den Kreis gelegten Tangente gezogen werden, welche durch den Kreis stetig geteilt wird.

Lösung: (Fig. 6.) Es sei PA der Durchmesser, AX die Tangente. Ich teile PA in D und E stetig (d. h. einmal ist AD, dann PE der grössere Abschnitt), und errichte in D und E die Lote auf PA, welche den Kreis bezüglich in B und C schneiden. Hierauf verbinde ich P mit B und C und erhalte bezüglich die Schnittpunkte P_1 und P_2 mit AX. Dann sind PP_1 und PP_2 die verlangten Sekanten. (Bemerk. Man erhält 2 Paar Sekanten, bei dem einen ist der äussere Teil, bei dem anderen der Sehnenteil der grössere Abschnitt.)



Beweis: $PA = P_1B$ nach Lehrs. 3 auf Seite 16; $PA^2 = P_1P \cdot BP$ nach Nr. 31 also: $P_1B^2 = P_1P \cdot BP$. Ferner $PC = P_2A$ nach Lehrs. 3 auf Seite 16, also $P_2A^2 = PC^2 = P_2P \cdot P_2C$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

33. Es sollen zwei Kreise gezeichnet werden, welche sich unter einer Sehne von gegebener Länge der Art schneiden, dass der Halbmesser des einen der grössere (oder kleinere) Abschnitt des stetig geteilten anderen und ihr Produkt einem gegebenen Quadrate gleich ist.
34. Um einen gegebenen Punkt sollen zwei Ringkreise so beschrieben werden, dass der innere Kreis den Halbmesser des äusseren stetig teilt und das Produkt der beiden Halbmesser gleich einem gegebenen Quadrate ist. (Zwei Fälle!)
35. Es sollen zwei Kreise gezeichnet werden, welche einander und eine Gerade (Kreis) in einem gegebenen Punkte berühren, so dass der Durchmesser des äusseren Kreises durch den inneren Kreis stetig geteilt wird, und das Produkt der beiden Durchmesser gleich einem gegebenen Quadrate ist. (Zwei Fälle!)
36. Es soll ein regelmässiges Zehneck, von welchem die Seite gegeben ist, mit Zirkel und Lineal hergestellt werden.
37. Durch einen gegebenen Punkt auf dem Umfange eines Kreises soll eine Sehne so gezogen werden, dass der Halbmesser des Kreises ihr grösserer durch stetige Teilung erzeugter Abschnitt ist.
38. Von einem gegebenen Punkte aus soll durch einen Kreis eine Linie gezogen werden, welche den Kreis unter einer Sehne mit dem Peripheriewinkel von 36° (72°) schneidet.
39. Von einem gegebenen Punkte aus soll eine Linie gezogen werden, welche den einen von zwei gegebenen Kreisen unter einer Sehne mit dem Peripheriewinkel von 36°, den anderen
a) unter einer Sehne mit dem Peripheriewinkel von 72° schneidet,
b) in einem gegebenen Punkte berührt.
40. Es soll ein Kreis mit gegebenem Halbmesser gezeichnet werden, welcher einen gegebenen Kreis unter einer Sehne mit dem Peripheriewinkel von 36° (72°) schneidet.
41. Um einen gegebenen Punkt sollen zwei Ringkreise gelegt werden, von denen der innere den Halbmesser des äusseren stetig teilt, so dass das Produkt des grösseren Halbmessers und der Differenz beider Halbmesser einem gegebenen Quadrate gleich ist. (2 Fälle.)
42. Auf einer Linie ist ein Punkt gegeben. Es sollen zwei Kreise gezeichnet werden, welche sich untereinander und die Linie berühren, und zwar der eine von ihnen die Linie in dem gegebenen Punkte, so dass das Produkt aus der durch den Berührungspunkt stetig geteilten Zentrale und einem der Halbmesser einem gegebenen Quadrate gleich ist (2 Fälle) oder so, dass das Produkt der beiden Halbmesser einem gegebenen Quadrate gleich ist.
43. Es soll ein regelmässiges Zehneck gezeichnet werden, so dass das Produkt seiner Seite und des Umkreishalbmessers einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

44. Es soll ein regelmässiges Zehneck gezeichnet werden, von welchem die Summe aus dem Umkreisradius und der Seite gegeben ist.
45. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher einen gegebenen Kreis von innen der Art berührt, dass die Differenz der beiden Durchmesser gleich dem kleineren Abschnitt des stetig geteilten Durchmessers des inneren Kreises ist.
46. Es sollen zwei von aussen sich berührende Kreise gezogen werden, dass die Summe ihrer Durchmesser einer gegebenen Strecke gleich, und der Durchmesser des einen der kleinere Abschnitt des stetig geteilten anderen ist.
47. Von dem einen Endpunkte eines Kreisdurchmessers soll nach der im anderen Endpunkte gezogenen Tangente eine Sekante gezogen werden, deren äusserer Teil gleich dem kleineren Abschnitt des stetig geteilten Sehnenteiles ist.
48. Es ist ein Kreis gegeben; es soll ein Ringkreis gezeichnet werden, so dass die Differenz der Ringkreisradien der kleinere Abschnitt des stetig geteilten Durchmessers des Innenkreises ist.

Ohlenroth'sche Buchdruckerei in Erfurt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

44. Es sol[illegible]et werden, von welchem die Su[illegible]er Seite gegeben ist.

45. Es sol[illegible]er einen gegebenen Kreis von in[illegible]erenz der beiden Durchmesser[illegible]s stetig geteilten Durchmesser[illegible]

46. Es sol[illegible] Kreise gezogen werden, dass d[illegible]egebenen Strecke gleich, und d[illegible]ere Abschnitt des stetig geteilte[illegible]

47. Von d[illegible]chmessers soll nach der im and[illegible]e eine Sekante gezogen werden[illegible]kleineren Abschnitt des stetig [illegible]

48. Es ist [illegible]kreis gezeichnet werden, so dass [illegible] der kleinere Abschnitt des ste[illegible]kreises ist.

[illegible]sche Buchdruckerei in Erfurt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf