Das Hexagrammum mysticum.

„Irgend 6 Punkte eines beliebigen Kegelschnitts bestimmen 60 eingeschriebene einfache Sechsecke; in jedem der letzteren liegen die drei Punkte, in welchen die gegenüberliegenden Seiten sich schneiden, in einer Geraden G, so dass also 60 solcher Geraden G Statt finden; von diesen 60 Geraden gehen drei und drei durch irgend einen Punkt P, so dass 20 solcher Punkte P entstehen; und von diesen 20 Punkten liegen 15 mal 4 in einer Geraden g, so dass jeder in drei solchen Geraden liegt." (Welche Beziehung haben diese 15 Geraden G weiter zu einander?)

Steiner, Syst. Entw. d. Abh. geom. Gestalten.

§. 1.

Dass durch 6 Punkte 60 eingeschriebene, einfache Sechsecke bestimmt sind, ist leicht ersichtlich und werden dieselben in §. 3. angeführt werden.

§. 2.

1. Um darzuthun, dass die drei Schnittpunkte von je zwei gegenüber liegenden Seiten in einer Geraden liegen, darf nur bewiesen werden, dass, wenn man durch drei beliebige Punkte einer Geraden 0 je zwei Gerade 1,4, 6,3, 5,2 zieht, die 6 Schnittpunkte $\overline{1\,2}$, $\overline{2\,3}$, $\overline{3\,4}$, $\overline{4\,5}$, $\overline{5\,6}$, $\overline{6\,1}$ auf einem Kegelschnitte liegen.

Sind die Gleichungen der Geraden 0, 1, 3, 5, resp. $u^0 = 0$, $u^1 = 0$, $u^3 = 0$, $u^5 = 0$, so lassen sich durch diese die Gleichungen der Geraden 2, 4, 6 ausdrücken und man erhält nachstehende Gleichungen:

0. $u^0 = 0$	4. $u^4 = \lambda^4 u^0 + \lambda^1 u^1 = 0$
1. $u^1 = 0$	5. $u^5 = 0$
2. $u^2 = \lambda^2 u^0 + \lambda^5 u^5 = 0$	6. $u^6 = \lambda^6 u^0 + \lambda^3 u^3 = 0$
3. $u^3 = 0$	

in denen die Zahlen rechts oben bei u und λ Indices sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ein Kegelschnitt, welcher durch die Schnittpunkte von $\overline{1\,2}$, $\overline{2\,3}$ und $\overline{3\,4}$ geht, lässt sich ausdrücken durch:

$$1\,.\,3 + 2\,.\,4 + 2\,.\,3 = 0 \qquad (A_1)$$

wenn man der Kürze halber statt der ganzen Gleichungen nur die betreffenden Indices setzt. — Der Kegelschnitt A_1 geht durch $\overline{1\,2}$, weil, wenn 1 und 2 zugleich identisch $= 0$ werden, auch $A_1 = 0$ wird. Er geht durch $\overline{2\,3}$ und $\overline{3\,4}$, weil er ebenso $= 0$ wird, wenn 2 und 3 oder 3 und 4 identisch $= 0$ werden.

Setzt man für 2 und 4 die Werthe, so erhält man

$$1\,.\,3 + (0 + 5)\,.\,(0 + 1) + (0 + 5)\,.\,3 = 0$$

wenn man wieder 0 für $\lambda\,u^0$ etc. setzt. Der Faktor λ kann wegbleiben, da es hier nicht auf die Richtung — sondern einzig auf die Schnittpunkte ankommt. — Die letzte Gleichung lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$1\,.\,5 + (0 + 3)\,.\,(0 + 1) + (0 + 3)\,.\,5 = 0$$

oder

$$1\,.\,5 + 6\,.\,4 + 6\,.\,5 = 0 \qquad (A_2)$$

d. h. der Kegelschnitt A_1 geht auch durch $\overline{4\,5}$, $\overline{5\,6}$ und $\overline{6\,1}$; also liegen die 6 Schnittpunkte $\overline{1\,2}$, $\overline{2\,3}$, $\overline{3\,4}$, $\overline{4\,5}$, $\overline{5\,6}$ und $\overline{6\,1}$ auf demselben Kegelschnitte, dessen Gleichung entweder A_1 oder (w. d. i.) A_2 ist. — Da man aber die 6 Geraden $\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{2\,.\,6} = 60$ mal so permutiren kann, dass keine Permutation einer andern — vor- oder rückwärts gelesen — gleich ist, so gilt auch folgender Satz:

„Legt man durch drei Punkte, die in einer Geraden liegen, „je zwei Gerade, so liegen von den 15 möglichen Schnittpunkten „60 mal 6 auf einem Kegelschnitte, so dass also jeder in 24 dieser „Kegelschnitte liegt."

(Da obiger Beweis indirect ist, so möge noch ein directer nachfolgen.)

2. Bezeichnet man die Seiten eines beliebigen jener 60 Sechsecke der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, deren Gleichungen

$$1.\ u^1 = 0, \qquad 3.\ u^3 = 0 \qquad 5.\ u^5 = 0,$$
$$2.\ u^2 = 0, \qquad 4.\ u^4 = 0, \qquad 6.\ u^6 = 0$$

sein mögen, so lässt sich ein Kegelschnitt durch $\overline{1\,2}$, $\overline{2\,3}$, $\overline{3\,4}$ gehend ausdrücken:

$$1\,.\,3 + 2\,.\,4 + 2\,.\,3 = 0 \qquad (B_1)$$

desgl. ein Kegelschnitt durch $\overline{4\,5}$, $\overline{5\,6}$ und $\overline{6\,1}$ gehend durch:

$$1\,.\,5 + 4\,.\,6 + 5\,.\,6 = 0 \qquad (B_2)$$

Soll jeder durch alle 6 Punkte gehen, d. h. mit dem ursprünglich gegebenen identisch sein, so muss auch B_1 und B_2 identisch sein. Dieses aber ist nur möglich, wenn die Gleichungen der Geraden 2, 4 und 6 folgende sind:

$$2.\ u^2 = \lambda^2 u^0 + \lambda^5 u^5 = 0. \quad 4.\ u^4 = \lambda^4 u^0 + \lambda^1 u^1 = 0. \quad 6.\ u^6 = \lambda^6 u^0 + \lambda^3 u^3 = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder, da es nicht auf Richtungen ankommt:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = 0 + 5 = 0 \\ 4 = 0 + 1 = 0 \\ 6 = 0 + 3 = 0 \end{array}\right\} \quad (B_3)$$

wo 0 die Gleichung ($u^0 = 0$) irgend einer Geraden vorstellt.

Als Gleichung des ursprünglichen Kegelschnitts kann also entweder B_1 oder B_2 gelten, wenn nur zugleich B_3 Statt findet. Die Gleichungen B_3 sagen aber aus, dass $\overline{2\,5}$, $\overline{1\,4}$, $\overline{3\,6}$ in der Geraden 0 liegen.

Da man von irgend einem der 6 Punkte ausgehend auf 60fachem Wege zu demselben zurückkehren kann, so wird es auch 60 Sechsecke und folglich auch 60 solcher Geraden 0 (G) geben.

§. 3.

„Von diesen 60 Geraden G gehen drei und drei durch irgend einen Punkt P, so dass 20 solcher Punkte P entstehen."

Nimmt man von den 60 Sechsecken ein beliebiges und bezeichnet, indem man von einer Ecke aus das ganze Sechseck durchgeht, die auf diesem Wege nach einander berührten Ecken mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, so erhält man

1. die Gleichungen der 6 Seiten:

$\overline{1\,2}$, $u^1 = 0$ $\qquad$ $\overline{4\,5}$, $u^4 = (0 + 1) = 0$

$\overline{2\,3}$, $u^2 = (0 + 5) = 0$ $\qquad$ $\overline{5\,6}$, $u^5 = 0$

$\overline{3\,4}$, $u^3 = 0$ $\qquad$ $\overline{6\,1}$, $u^6 = (0 + 3) = 0$

und hiezu die Gerade G

$$\alpha, \quad \mathbf{u^0 = 0.}$$

Aus den zum Sechseck 1 2 3 4 5 6 (α) gehörigen Gleichungen lassen sich noch die zweier anderer (und nicht mehrerer) Sechsecke ableiten. Diese beiden andern Sechsecke (β und γ) erhält man, wenn man die Zahlen in α versetzt, wie β und γ angiebt.

α, 1 2 3 4 5 6

β, 1 4 5 2 3 6

γ, 1 2 5 6 3 4

2. Für β hat man (da es wieder nicht auf Richtungen ankommt):

$\overline{1\,4}$, $1 + (0 + 3) = 0$

$\overline{2\,3}$, $0 + 5 = 0$

$\overline{3\,6}$, $5 + (0 + 3) = 0$

$\overline{4\,5}$, $0 + 1 = 0$

$\overline{5\,2}$, $1 + (0 + 5) = 0$

$\overline{6\,1}$, $0 + 3 = 0$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine Gerade durch die Schnittpunkte von $\overline{14}$ und $\overline{23}$ $(\overline{\overline{14},\ \overline{23}})$ gehend, ist:

$$[1 + (0 + 3)] + (0 + 5) = 2 \,.\, 0 + 1 + 3 + 5 = 0;$$

eine Gerade durch $\overline{\overline{36},\ \overline{45}}$:

$$[5 + (0 + 3)] + (0 + 1) = 2 \,.\, 0 + 1 + 3 + 5 = 0;$$

desgleichen durch $\overline{52},\ \overline{61}$:

$$[1 + (0 + 5)] + (0 + 3) = 2 \,.\, 0 + 1 + 3 + 5 = 0.$$

Jede dieser drei Geraden geht aber durch alle drei Schnittpunkte, und sind also dieselbe Gerade, wie die drei identischen Gleichungen angeben. Die Gerade G für das Sechseck 1 4 5 2 3 6 ist also

$$\beta,\quad \mathbf{2 \,.\, 0 + 1 + 3 + 5 = 0.}$$

3. Für das Sechseck γ (1 2 5 6 3 4) ergiebt sich:

$$\overline{12},\quad (1) = u^1 = 0$$
$$\overline{63},\quad 5 + (0 + 3) = 0$$
$$\overline{34},\quad (3) = u^3 = 0$$
$$\overline{25},\quad 1 + (0 + 5) = 0$$
$$\overline{56},\quad (5) = u^5 = 0$$
$$\overline{41},\quad 1 + (0 + 3) = 0$$

Wie früher ergeben sich die drei durch die Schnittpunkte gehende Geraden, nämlich:

durch $\overline{\overline{12},\ \overline{63}}$

$$1 + [5 + (0 + 3)] = 0 + 1 + 3 + 5 = 0$$

durch $\overline{\overline{34},\ \overline{25}}$

$$3 + [1 + (0 + 5)] = 0 + 1 + 3 + 5 = 0$$

durch $\overline{\overline{56},\ \overline{41}}$

$$5 + [1 + (0 + 3)] = 0 + 1 + 3 + 5 = 0$$

Jede geht wieder durch alle drei Punkte und sind dieselbe Gerade, deren Gleichung

$$\gamma,\quad \mathbf{0 + 1 + 3 + 5 = 0.}$$

ist.

4. Die Gleichungen der drei Geraden G sind demnach

$$\alpha,\quad (0)\, u^0 = 0$$
$$\beta,\quad 2 \,.\, 0 + 1 + 3 + 5 = 0$$
$$\gamma,\quad 0 + 1 + 3 + 5 = 0$$

$\beta - \gamma$ ergiebt α; folglich gehen alle drei durch denselben Punkt P. Ist dieses der n^{te} Punkt (P_n), so sind die drei Geraden G, die sich in ihm schneiden, folgende:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\alpha_n,\quad 0_n = 0$$
$$\beta_n,\quad 2 \cdot 0_n + 1_n + 3_n + 5_n = 0$$
$$\gamma_n,\quad 0_n + 1_n + 3_n + 5_n = 0$$

Bezeichnet man die 6 Punkte des Kegelschnittes der Reihe nach mit a, b, c, d, e, f, so müssen nach obigem Schema

$$\alpha,\quad 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$$
$$\beta,\quad 1\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6$$
$$\gamma,\quad 1\ 2\ 5\ 6\ 3\ 4$$

die Geraden G folgender je drei Sechsecke durch denselben Punkt P gehen:

P_1	a b c d e f	P_6	a b d c f e	P_{11}	a c d b e f	P_{16}	a b d e c f
	a d e b c f		a c f b d e		a b e c d f		a e c b d f
	a b e f c d		a b f e d c		a c e f d b		a b c f d e
P_2	a d b e c f	P_7	a b c d f e	P_{12}	a e b c d f	P_{17}	a c f d b e
	a e c d b f		a d f b c e		a c d e b f		a d b c f e
	a d c f b e		a b f e c d		a e d f b c		a c b e f d
P_3	a b e c f d	P_8	a e d b c f	P_{13}	a b c e f d	P_{18}	a d b f c e
	a c f b e d		a b c e d f		a e f b c d		a f c d b e
	a b f d e c		a e c f d b		a b f d c e		a d c e b f
P_4	a e b c f d	P_9	a c b d e f	P_{14}	a c b f e d	P_{19}	a c e b f d
	a c f e b d		a d e c b f		a f e c b d		a b f c e d
	a e f d b c		a c e f b d		a c e d b f		a c f d e b
P_5	a c d f e b	P_{10}	a c b e d f	P_{15}	a b f c d e	P_{20}	a b e d c f
	a f e c d b		a e d c b f		a c d b f e		a d c b e f
	a c e b d f		a c d f b e		a b d e f c		a b c f e d

Die Gleichungen dieser 60 Geraden sind zu je drei, wie sie der Reihe nach in P_n folgen, α_n, β_n und γ_n, wenn man für n den betreffenden Punkt-Index setzt.

§. 4.

„Und von diesen 20 Punkten liegen 15 mal 4 in einer Geraden g, so dass jeder in drei solcher Geraden liegt.“

Anm. Nach dem vorigen §. findet man zu dem n^{ten} Sechsecke (1 2 3 4 5 6) leicht die beiden andern, deren Geraden G mit der des n^{ten} durch denselben Punkt P gehen. Da aber jede Gerade G nur durch einen bestimmten der 20 Punkte geht, so soll im Nachfolgenden durch jede vorkommende Gerade (G) — oder vielmehr durch deren Sechseck — derjenige der 20 Punkte bezeichnet werden, durch welchen sie geht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Unter den 20 Punkten P giebt es je dreimal 3 von der Beschaffenheit, dass, wenn man von einem bestimmten vierten nach den je 3 andern Gerade zieht, sich alle diese Gleichungen auf denselben Punkt-Index bringen lassen. Nachstehendes Schema giebt die betreffenden Punkte an.

	1	2	3	4
I.		1 4 6 3 5 2	1 4 6 3 2 5	1 4 2 5 3 6
II.	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 6 5	1 2 4 3 6 5	1 2 5 6 4 3
III.		1 6 3 2 4 5	1 6 5 4 2 3	1 6 4 5 2 3

Es wird sich beweisen lassen, dass stets die vier Punkte 1, 2, 3, 4 in einer Geraden liegen, so dass sich also die Geraden I, II und III in 1 oder P_1 schneiden.

Anm. 1. Da es, wie in den früheren §§., auch hier wiederum nicht auf Richtungen der Geraden ankommt, so können die in andern Fällen nöthigen unbestimmten Faktoren ebenfalls wegbleiben.

Anm. 2. Der Kürze wegen ist in diesem §. der Index, welcher die Geraden I, II und III unterscheidet, weggelassen; er kann aber aus dem betreffenden α, β oder γ leicht hinzugedacht werden.

II.

Nach §. 3. sind die drei Geraden, welche durch P_1 gehen, folgende:

$$\overset{\mathrm{I}}{\alpha_1},\quad 0_1 = 0$$

$$\overset{\mathrm{I}}{\beta_1},\quad 2 \,.\, 0_1 + 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0$$

$$\overset{\mathrm{I}}{\gamma_1},\quad 0_1 + 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0$$

1. Durch denselben Punkt geht aber auch

$$(1_1) \quad 3 \,.\, 0_1 + 2 \,.\, (1_1 + 3_1 + 5_1) = 0 \qquad (\overset{\mathrm{I}}{\beta_1} + \overset{\mathrm{I}}{\gamma_1})$$

2. Ebenso eine Gerade durch P_2 (1 4 6 3 5 2) gehend:

$$1_2 + 3_2 + 5_2 = 0 \qquad (\overset{\mathrm{I}}{\gamma_2} - \overset{\mathrm{I}}{\alpha_2})$$

Es ist aber

$$1_2 = 0_1 + 1_1 + 3_1 = 0 \qquad (\overline{1\,4})$$

$$3_2 = 0_1 + 3_1 + 5_1 = 0 \qquad (\overline{6\,3})$$

$$5_2 = 0_1 + 1_1 + 5_1 = 0 \qquad (\overline{5\,2})$$

folglich

$$(1_2) \quad 1_2 + 3_2 + 5_2 = 3 \,.\, 0_1 + 2 \,.\, (1_1 + 3_1 + 5_1) = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da diese Gleichung mit I_1 identisch ist, so geht die Gerade, der sie angehört, durch beide Punkte zugleich.

3. Eine Gerade durch P_3 (1 4 6 3 2 5) ist auch

$$1_3 + 3_3 + 5_3 = 0 \qquad (\gamma_3^{I} - \alpha_3^{I})$$

doch

$$1_3 = 0_1 + 1_1 + 3_1 = 0 \qquad (\overline{1\,4})$$
$$3_3 = 0_1 + 3_1 + 5_1 = 0 \qquad (\overline{6\,3})$$
$$5_3 = 0_1 + 1_1 + 5_1 = 0 \qquad (\overline{2\,5})$$

also

$$(I_3) \quad 1_3 + 3_3 + 5_3 = 3 \,.\, 0_1 + 2 \,.\, (1_1 + 3_1 + 5_1) = 0$$

Also liegt auch P_3 mit P_1 und P_2 in derselben Geraden g.

4. Desgleichen eine Gerade durch P_4 (1 4 2 5 3 6):

$$1_4 + 3_4 + 5_4 = 0 \qquad (\gamma_4^{I} - \alpha_4^{I})$$

Aber:

$$1_4 = 0_1 + 1_1 + 3_1 = 0 \qquad (\overline{1\,4})$$
$$3_4 = 0_1 + 1_1 + 5_1 = 0 \qquad (\overline{2\,5})$$
$$5_4 = 0_1 + 3_1 + 5_1 = 0 \qquad (\overline{3\,6})$$

daher

$$(I_4) \quad 1_4 + 3_4 + 5_4 = 3 \,.\, 0_1 + 2 \,.\, (1_1 + 3_1 + 5_1) = 0$$

Es liegt also auch P_4 mit P_1, P_2, P_3 in derselben Geraden g, deren Gleichung

$$\mathbf{I,\ 3 \,.\, 0_1 + 2 \,.\, (1_1 + 3_1 + 5_1) = 0}$$

ist.

Anm. Für obige Gleichungen I liessen sich immer dieselben Ausdrücke für 1, 3, 5 aufstellen, was in keinem andern Falle mehr möglich ist.

II.

Nach obigem Schema sollen mit P_1 auch die Punkte (1 2 3 4 6 5), (1 2 4 3 6 5), (1 2 5 6 4 3) in einer Geraden liegen.

1. Eine Gerade durch P_1 gehend, ist ausser allen früheren nach

$$(II_1) \quad 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0 \qquad (\gamma_1^{II} - \alpha_1^{II})$$

2. Desgleichen eine Gerade durch II_2 (1 2 3 4 6 5) gehend:

$$1_2 + 3_2 + 5_2 = 0 \qquad (\gamma_2^{II} - \alpha_2^{II})$$

Es ist aber

$$1_2 = 1_1 = 0 \qquad (\overline{1\,2})$$
$$3_2 = 3_1 = 0 \qquad (\overline{3\,4})$$
$$5_2 = 5_1 = 0 \qquad (\overline{6\,5})$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

daher

$$(\mathrm{II}_2) \quad 1_2 + 3_2 + 5_2 = 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0$$

3. In derselben Weise geht durch II_3 (1 2 4 3 6 5) nach

$$1_3 + 3_3 + 5_3 = 0 \quad (\gamma_3^{\mathrm{II}} - \alpha_3^{\mathrm{II}})$$

aber

$$1_3 = 1_1 = 0 \quad (\overline{1\,2})$$
$$3_3 = 3_1 = 0 \quad (\overline{4\,3})$$
$$5_3 = 5_1 = 0 \quad (\overline{6\,5})$$

also

$$(\mathrm{II}_3) \quad 1_3 + 3_3 + 5_3 = 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0$$

4. Endlich ist auch eine Gerade durch II_4 (1 2 5 6 4 3) gehend folgende:

$$1_4 + 3_4 + 5_4 = 0 \quad (\gamma_4^{\mathrm{II}} - \alpha_4^{\mathrm{II}})$$

aber

$$1_4 = 1_1 = 0 \quad (\overline{1\,2})$$
$$3_4 = 5_1 = 0 \quad (\overline{5\,6})$$
$$5_4 = 3_1 = 0 \quad (\overline{4\,3})$$

folglich

$$(\mathrm{II}_4) \quad 1_4 + 3_4 + 5_4 = 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0$$

Da diese 4 Gleichungen (II_1), (II_2), (II_3) und (II_4) identisch sind, so gehören sie derselben Geraden an; und es liegen die oben gedachten 4 Punkte wirklich in einer Geraden g, deren Gleichung ist:

$$\mathbf{II,} \quad 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0.$$

III.

Mit P_1 sollen endlich noch die Punkte III_2 (1 6 3 2 4 5), III_3 (1 6 5 4 2 3) und III_4 (1 6 4 5 2 3) in einer Geraden liegen.

1. Durch P_1 geht ferner noch:

$$(\mathrm{III}_1) \quad 3 \,.\, 0_1 + 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0 \quad (\alpha_1^{\mathrm{III}} + \beta_1^{\mathrm{III}})$$

2. Durch III_2 (1 6 3 2 4 5) ebenso:

$$1_2 + 3_2 + 5_2 = 0 \quad (\gamma_2^{\mathrm{III}} - \alpha_2^{\mathrm{III}})$$

da aber

$$1_2 = 6_1 = 0_1 + 3_1 = 0 \quad (\overline{1\,6})$$
$$3_2 = 2_1 = 0 \quad + 5 = 0 \quad (\overline{3\,2})$$
$$5_2 = 4_1 = 0 \quad + 1 = 0 \quad (\overline{4\,5})$$

so ist

$$(\mathrm{III}_2) \quad 1_2 + 3_2 + 5_2 = 3 \,.\, 0_1 + 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Durch III_3 (1 6 5 4 2 3) geht

$$1_3 + 3_3 + 5_3 = 0 \quad (\gamma_3^{III} - \alpha_3^{III});$$

wiederum ist

$$1_3 = 6_1 = 0, \quad 3_3 = 4_1 = 0, \quad 5_3 - 2_1 = 0,$$

daher auch

$$(III_3) \quad 1_3 + 3_3 + 5_3 = 3 \,.\, 0_1 + 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0.$$

4. Durch III_4 (1 6 4 5 2 3) geht

$$1_4 + 3_4 + 5_4 = 0 \quad (\gamma_4^{III} - \alpha^{III}).$$

Wie vorhin ist

$$1_4 = 6_1 = 0, \quad 3_4 = 4_1 = 0, \quad 5_4 = 2_1 = 0,$$

also auch

$$(III_4) \quad 1_4 + 3_4 + 5_4 = 3 \,.\, 0_1 + 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0.$$

Folglich liegen wieder die 4 genannten Punkte in einer Geraden g, deren Gleichung

$$\mathbf{III,\ 3 \,.\, 0_1 + 1_1 + 3_1 + 5_1 = 0}$$

ist. — Die Gleichungen der drei durch P_n gehenden Geraden g sind also:

$$I, \quad 3 \,.\, 0_n + 2 \,.\, (1_n + 3_n + 5_n) = 0$$
$$II, \quad 1_n + 3_n + 5_n = 0$$
$$III, \quad 3 \,.\, 0_n + 1_n + 3_n + 5_n = 0.$$

Obiges Schema ist nun als richtig bewiesen. Da das Sechseck 1 2 3 4 5 6 jedes beliebige der 60 Sechsecke bedeuten kann, so kann man auch zu jedem beliebigen Punkte nach dem Schema die übrigen 9 Punkte finden, welche mit jenem zu je vier in denselben drei Geraden liegen. Demnach liegen stets folgende je 3 mal 4 aus §. 3 genommene Punkte in einer Geraden, welche in der gegebenen Reihenfolge den obigen drei Gleichungen I, II und III entsprechen, wenn man statt **n** den betreffenden Punkt-Index setzt. (Für P_n ist **n** gesetzt.)

P_1	2, 3, 4	(g_1)	P_4	9, 11, 15	(g_8)	P_7	9, 18, 19	(g_{12})
	8, 9, 10	(g_2)		7, 12, 16	(g_9)		1, 5, 6	
	5, 6, 7	(g_3)		1, 2, 3			4, 12, 16	
P_2	10, 15, 13	(g_4)	P_5	2, 14, 16		P_8	3, 11, 13	
	1, 3, 4			10, 17, 19	(g_{10})		6, 17, 18	
	5, 14, 15	(g_5)		1, 6, 7,			1, 9, 10	
P_3	6, 12, 14	(g_6)	P_6	3, 12, 14		P_9	7, 18, 19	
	8, 11, 13	(g_7)		1, 5, 7			4, 11, 15	
	1, 2, 4			8, 17, 18	(g_{11})		1, 8, 10	

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

P_{10}	2, 15, 13 5, 17, 19 1, 8, 9	P_{14}	2, 5, 16 3, 6, 12 13, 17, 20	P_{18}	11, 12, 20 7, 9, 19 6, 8, 17
P_{11}	3, 8, 13 4, 9, 15 12, 18, 20 (g_{13})	P_{15}	4, 9, 11 16, 19, 20 (g_{15}) 2, 10, 13	P_{19}	15, 16, 20 5, 10, 17 7, 9, 18
P_{12}	3, 6, 14 4, 7, 16 11, 18, 20	P_{16}	4, 7, 12 15, 19, 20 2, 5, 14	P_{20}	13, 14, 17 15, 16, 19 11, 12. 18
P_{13}	2, 10, 15 3, 8, 11 14, 17, 20 (g_{14})	P_{17}	13, 14, 20 5, 10, 19 6, 8, 18		

§. 5.

Welche Beziehung haben diese 15 Geraden g weiter zu einander?

1. Legt man in drei sich in einem Punkte schneidender Geraden die Ecken dreier beliebiger Dreiecke, so schneiden sich die verlängerten ähnlichen Seiten in drei sich in einem Punkte treffender Geraden.

2. Aus §. 2, 1 folgt:

Die 15 Geraden g sind zu je 6 die Seiten von 15 . 60 = 900 einfachen Sechsecken in ebenso vielen Kegelschnitten, oder w. d. i. die 20 Punkte P liegen zu je 6 auf 900 Kegelschnitten, so dass jeder in 270 solcher Kegelschnitte liegt.

Krause.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf