Bemerkungen über die analytischen Facultäten.

§. 1.

Die analytischen Facultäten sind, nach Vandermonde und Kramp, in neuerer Zeit vorzüglich von Grelle *) nach eigenthümlicher Methode bearbeitet worden. Grelle definiert die analytische Facultät als eine von 3 Elementen, der Basis u , der Differenz x und dem Exponenten y abhängige und durch $(u, + x)^y$ bezeichnete Function, deren Grundeigenschaften in den Gleichungen

$$1. (u, + x)^{y+k} = (u, + x)^y (u + yx, + x)^k$$

$$2. (ku, + kx)^y = k^y (u, + x)^y$$

$$3. (u, + x)^1 = u$$

ausgesprochen werden. Aus diesen Gleichungen werden alle übrigen Eigenschaften der Facultät, so wie auch Formeln zur Berechnung ihrer Werthe für beliebige Werthe von u , x , y auf einfache Weise abgeleitet.

Diese Behandlungsart der Facultäten hat vielfach Beifall gefunden, wie denn namentlich Grunert in dem Artikel „Facultät“ der Supplemente zu dem Klügel'schen Wörterbuche ihr ganz folgt. Gegen sie aber finden sich in den Schriften Dhm's einige gelegentliche Aeußerungen, welche ich, obwohl sie größtentheils aus Mißverständnissen hervorgegangen zu sein scheinen, hier anzuführen nicht umhin kann, weil sie mir Veranlassung zu einer genaueren Untersuchung der bisherigen Facultäten-Theorien gegeben haben, als deren Ergebnis ich allerdings die Ueberzeugung aussprechen muß, daß sich auch in der Grelle'schen Darstellung, wenn auch nicht in dem Sinne Dhm's, noch einige Schwierigkeiten finden, die aufgeheilt und beseitigt werden müssen.

*) Theorie der analytischen Facultäten, 1824.

Mémoire sur la théorie des puissances, de fonctions angulaires et des facultés analytiques, 1831. (Ursprünglich im 7ten Bande des Journals für Mathematik erschienen). Diese Abhandlung wird im Folgenden durch Th. a. f. bezeichnet.

Dhm stellt (System der Mathematik, Thl. 2, S. 340) für Facultäten, deren Exponenten ganze Zahlen sind, fünf Gleichungen auf, von denen die erste mit Anwendung der Crelle'schen Bezeichnungsweise

$$4. (u, + x)^y = (u + yx - x, - x)^y$$

heißt, die zweite und die fünfte mit den obigen Gleichungen (1, 2) übereinkommen, die dritte und die vierte aber aus der zweiten folgen, und fügt dann folgende Note hinzu:

„Es ist nicht möglich, einen Begriff der gebrochenen Factorielle (Facultät) hinzustellen, wofür alle fünf Nummern des S. 340 noch geltend bleiben. Und namentlich ist der Begriff der gebrochenen Factoriellen, wie solche in den Anwendungen von Vandermonde und Kramp gebraucht werden, von der Art, daß für diese gebrochenen Factoriellen nur die Formeln (Nr. 1 u. 2) [d. h. der hiesigen 1, 4], also natürlich auch die mit (Nr. 2) [hier 1] zugleich gegebenen (Nr. 3 und 4 des S. 340) noch stattfinden, nicht aber die Formel (Nr. 5) [hier (2)]. Wenn daher zuerst von Kramp stillschweigend, dann von Crelle ausdrücklich die allgemeine Factorielle als ein Ding bezeichnet wird, welches die in den (Nrn. 1, 2, 5 des S. 340) [in den Gleichungen 1, 2, 4] ausgesprochenen Eigenschaften hat, so rächt sich dies unlogische Verfahren sogleich dadurch, daß bei Kramp (*Réfractions astronomiques et terrestres*, 1799) sehr bedeutende, von ihm selbst zugestandene und ihm unbegreifliche Widersprüche hervorgehen, während bei Crelle (*Theorie der analytischen Facultäten*, 1824) die wenigsten Formeln wahr sind, ohne daß solches von dem Verfasser bemerkt wird, weil sich derselbe nicht, wie Kramp gethan, auf specielle Untersuchungen einläßt, sondern nur allgemeine Formeln auf allgemeine Formeln gehäuft hat, welche daher als solche größtentheils für todtgeborene gehalten werden müssen u. s. w.“

In ähnlichem Sinne spricht sich Dhm noch an andern Stellen aus, namentlich in seiner analytischen Geometrie in einer Anmerkung, in der es heißt, daß die Definition der Facultät, wie sie Crelle gegeben, ihm selbst unbewußt einen Widerspruch aufgenommen habe.

Diese Einwendungen Dhm's, so weit sie die Crelle'sche Theorie betreffen, lassen sich jedoch leicht beseitigen. Denn die obige Gleichung (4), welche für gebrochene Werthe von y mit den übrigen (1, 2, 3) allerdings nicht vereinbar ist, wird von Crelle keineswegs, wie Dhm es ausagt, zur Definition der Facultät mit benutzt. Daß es aber eine Function giebt, welche den Gleichungen (1, 2, 3) genügt, ist nicht schwer nachzuweisen.

Denn setzt man mit Gauß *)

$$5. \Pi(u) = \frac{1}{u+1} \cdot \frac{2^n}{1^n u+2} \cdot \frac{3^n}{2^n u+3} \cdots \frac{n^n}{(n-1)^n u+n} \cdots \infty,$$

$$*) \text{ Disquisitiones generales circa seriem infinitam } 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2\cdot\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

Comment. recent. Soc. Gotting., Vol. II.

so ist

$$6. (u, + x)^y = x^y \frac{\Pi \left(\frac{u}{x} - 1 + y \right)}{\Pi \left(\frac{u}{x} - 1 \right)}$$

eine Function, welche die in den genannten Gleichungen ausgedrückten Eigenschaften hat. (S. den folgenden §.)

Größeres Gewicht aber hat eine andere Angabe Dhm's. Nachdem er (Syst. d. Mathem., Thl. 2, S. 89) den sogenannten binomischen Lehrsatz für ganze Facultäten, nämlich (nach der hier gebrauchten Bezeichnung) die Formel

$$7. (u + k, + x)^y = (u, + x)^y + y_1 (u, + x)^{y-1} (k, + x)^1 + y_2 (u, + x)^{y-2} (k, + x)^2 + \dots$$

bewiesen hat, fügt er hinzu, man würde sich sehr irren, wenn man mit Kramp, Crelle und so vielen Andern annehmen wollte, daß dieser binomische Lehrsatz für Facultäten auch dann noch gelten müsse, wenn y eine gebrochene Zahl, oder gar, wenn y allgemein sei. Im Gegentheil finde man, daß, wenn y eine ganze oder gebrochene Zahl sei, und wenn im letztern Falle die Reihe convergire, dann

$$8. (u, + 1)^y + y_1 (u, + 1)^{y-1} (k, + 1)^1 + y_2 (u, + 1)^{y-2} (k, + 1)^2 + \dots = \frac{\sin u\pi \sin(u+k+y)\pi}{\sin(u+y)\pi \sin(k+y)\pi} (u+k, + 1)^y$$

sein müsse.

Dieses Resultat fand ich bei näherer Prüfung vollkommen bestätigt, aber, was nach den angeführten Äußerungen Dhm's, wonach derselbe unter einer Facultät etwas ganz anderes zu verstehen scheint als Crelle, auffallen muß, grade unter der Voraussetzung, daß man für den Ausdruck der Facultät $(u, + 1)^y$ die Formel $1^y \cdot \frac{\Pi(u + y - 1)}{\Pi(u - 1)}$ nehme, welche der Crelle'schen Definition entspricht.

Somit erschien mir die Facultäten-Theorie Crelle's gegen die Behauptung Dhm's, daß schon in den Grundgleichungen derselben ein Widerspruch liege, völlig gerechtfertigt, und nur insofern einer Berichtigung bedürftig, als an die Stelle der Formel (7) die Gleichung (8) treten mußte. Aber bei weiterer Untersuchung überzeugte ich mich gleichwohl, daß sie, auch nach der neuen Bearbeitung, die sie in dem angeführten Mémoire erfahren, noch an verschiedenen andern, wie es mir scheint, nicht unwesentlichen Mängeln leiden. Von dem hochverehrten Verfasser der eben genannten Schrift, dem ich mündlich meine Bemerkungen mittheilte, zur Veröffentlichung derselben aufgefordert, glaube ich die gegenwärtige Gelegenheit dazu benutzen zu dürfen.

§. 2.

Die Definition der Facultät durch die drei Gleichungen (1, 2, 3) ist nach dem Vorhergehenden in so weit zulässig, als sie mit einander nicht im Widerspruche stehen. Aber es läßt sich zeigen, daß sie allein zur Bestimmung der Facultät gar nicht hinreichen, sondern daß es vielmehr unendlich viele, ganz von einander verschiedene Functionen giebt, welche die in ihnen ausgesprochenen Eigenschaften besitzen. Aus den Gleichungen (1, 2) ergibt sich nämlich (Th. d. f., 55.)

$$9. (u, + x)^y = x^y \frac{(1, + 1)^{\frac{u}{x} + y - 1}}{(1, + 1)^{\frac{u}{x} - 1}},$$

oder wenn man $(1, + 1)$ durch $F(y)$ bezeichnet,

$$10. (u, + x)^y = x^y \frac{F(\frac{u}{x} + y - 1)}{F(\frac{u}{x} - 1)}.$$

Aber in dieser Formel kann, wenn $(u, + x)^y$ zunächst nur in so weit bestimmt werden soll, daß den Gleichungen (1, 2) genügt werde, die Function F ganz willkürlich angenommen werden. Denn welche Form man ihr auch geben mag, man hat

$$11. (u, + x)^{y+k} = x^{y+k} \frac{F(\frac{u}{x} + y + k - 1)}{F(\frac{u}{x} - 1)} \\ = x^y \frac{F(\frac{u}{x} + y - 1)}{F(\frac{u}{x} - 1)} \cdot x^k \frac{F(\frac{u+yx}{x} + k - 1)}{F(\frac{u+yx}{x} - 1)} = (u, + x)^y (u + yx, + x)^k,$$

und

$$12. (ku, + kx)^y = (kx)^y \frac{F(\frac{ku}{ka} + y - 1)}{F(\frac{ku}{ka} - 1)} = k^y x^y \frac{F(\frac{u}{x} + y - 1)}{F(\frac{u}{x} - 1)} = k^y (u, + x)^y.$$

Damit nun ferner auch der Bedingung (3) Genüge geschehe, hat man in (10) $y = 1$ zu setzen, wodurch man findet, daß

$$13. u = x \frac{F(\frac{u}{x})}{F(\frac{u}{x} - 1)},$$

oder wenn man y für $\frac{u}{x}$ schreibt

$$14. F(y) = y F(y - 1)$$

sein muß. Eine Function, welche diese Eigenschaft besitzt, ist $\Pi(y)$. Wird nun, um die allgemeinste Form von F zu bestimmen,

$$15. F(y) = \psi(y) \Pi(y)$$

gesetzt, so findet sich

$$16. \psi(y) \Pi(y) = \psi(y - 1) \cdot y \Pi(y - 1),$$

woraus, weil

$$17. \Pi(y) = y \Pi(y - 1)$$

$$18. \psi(y) = \psi(y - 1)$$

folgt, d. h. die Function $\psi(y)$ oder $\frac{F(y)}{\Pi(y)}$ muß für jede zwei Werthe ihres Arguments, deren

Differenz $= 1$ ist, denselben Werth haben. Dies findet z. B. statt, wenn $\psi(y)$ eine willkürliche eindeutige Function von $\cos(2y\pi)$ und $\sin(2y\pi)$ ist.

Das Resultat, welches sich aus dem Vorstehenden ergibt, läßt sich nun so aussprechen. Wird durch $\psi(y)$ irgend eine Function bezeichnet, welche der Bedingung (18) genügt, und wird

$$19. (u, + x)^y = x^y \frac{\psi(\frac{n}{x} + y - 1)}{\psi(\frac{n}{x} - 1)} \frac{\Pi(\frac{n}{x} + y - 1)}{\Pi(\frac{n}{x} - 1)}$$

gesetzt, so besitzt diese Function die durch die Gleichungen (1, 2, 3) ausgedrückten Eigenschaften.

Es kann daher $(u, + x)^y$, ohne aufzuhören, den genannten Gleichungen zu genügen, gleich wie $\psi(y)$ unendlich viele verschiedene Formen annehmen. Zugleich ist aber auch durch die Formel (19) die allgemeinste Bestimmung von $(u, + x)^y$ gegeben.

Hierdurch ist nicht nur die ausgesprochene Behauptung, es seien die Gleichungen (1, 2, 3) nicht hinreichend, um $(u, + x)^y$ vollständig zu bestimmen, gerechtfertigt, und die Nothwendigkeit nachgewiesen, in die Definition der Facultät noch eine, in jenen Gleichungen nicht enthaltene Bestimmung aufzunehmen; sondern es ergibt sich auch daraus, daß die Entwicklungen, durch die man aus den Gleichungen (1, 2, 3) völlig bestimmte Darstellungen von $(u, + x)^y$ hergeleitet hat, nicht ganz fehlerfrei sein können, und daher einer Revision bedürfen.

§. 3.

Ehe ich aber die verschiedenen von Crelle u. a. entwickelten Formeln in dieser Rücksicht durchgehe, will ich auf einen bisher, wie es scheint, ganz übersehenen Umstand aufmerksam machen, aus dessen Nichtbeachtung große Irrthümer hervorgehen können und wirklich hervorgegangen sind. Ich bemerke zuvor, daß ich mich bei allen folgenden Entwicklungen auf reelle Werthe der Basis, der Differenz und des Exponenten beschränke. Denn wenn es auch nicht schwer ist, auch imaginäre Werthe dieser Veränderlichen mit in Betracht zu ziehen, so würde das doch einige vorläufige Erörterungen nöthig machen, die hier der Raum nicht gestattet.

Setzt man in den Gleichungen (1, 3) $x = 0$, so erhält man

$$20. (u, + 0)^{y+k} = (u, + 0)^y (u, + 0)^k$$

$$21. (u, + 0)^1 = u.$$

Hieraus ergibt sich, daß

$$22. (u, + 0)^y = u^y$$

sein muß. Aber man darf daraus nicht schließen, daß $(u, + x)^y$, wenn der numerische Werth von x unendlich klein wird, nothwendig der Potenz u^y unendlich nahe komme. Vielmehr läßt sich zeigen, daß jede Function, welche den Gleichungen (1, 2, 3) genügt, in der Nähe von $x = 0$,

sich nicht stetig ändert. Setzt man nämlich $x = \frac{1}{p}$, unter p eine positive Veränderliche verstanden, so erhält man nach (19)

$$23. \left(1 + \frac{1}{p}\right)^y = \frac{\psi(p+y-1)}{\psi(p-1)} \cdot p^{-y} \frac{\pi(p+y-1)}{\pi(p-1)}$$

oder wegen (17, 18)

$$24. \left(1 + \frac{1}{p}\right)^y = \frac{\psi(p+y)}{\psi(p)} \frac{\pi(p+y-1)}{p^{y-1} \pi(p)}$$

Nun ist bekanntlich (s. die angeführte Abhandlung von Gauß) für einen unendlich großen positiven Werth von p

$$25. \frac{\pi(p+y)}{p^y \pi(p)} = 1,$$

oder richtiger wegen der Vieldeutigkeit von p^y

$$26. \frac{\pi(p+y)}{p^y \pi(p)} = 1^y$$

Der Factor $\frac{\psi(p+y)}{\psi(p)}$ ist aber der Formel (18) gemäß eine periodische Function von p , und nähert sich deshalb, wenn p unendlich groß wird, keiner bestimmten Grenze, wosfern nicht etwa die Function ψ eine bloße Constante ist. Daher nähert sich auch $\left(1 + \frac{1}{p}\right)^y$ nur in diesem Falle einer bestimmten Grenze.

Setzt man ferner in der Formel (19) $-x$ für x , so erhält man

$$27. (u, -x)^y = (-1)^y \frac{\psi(-\frac{u}{x} + y - 1)}{\psi(-\frac{u}{x} - 1)} x^y \frac{\pi(-\frac{u}{x} + y + 1)}{\pi(-\frac{u}{x} - 1)}$$

Es ist aber, wie bekannt,

$$28. \pi(-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi \cdot \pi(x-1)},$$

daher, wenn $\frac{(-1)^{\frac{u}{x}}}{(-1)^{\frac{u}{x} - y}}$ für $(-1)^y$ gesetzt wird

$$29. (u, x)^y = \frac{(-1)^{\frac{u}{x}} \sin \frac{u}{x}\pi \cdot \psi(-\frac{u}{x} + y - 1)}{(-1)^{\frac{u}{x} - y} \sin(\frac{u}{x} - y)\pi \cdot \psi(-\frac{u}{x} - 1)} \cdot x^y \frac{\pi(\frac{u}{x})}{\pi(\frac{u}{x} - y)},$$

oder wenn man

$$30. \frac{\psi(-y-1)}{(-1)^y \sin y\pi} = \frac{\psi(-y)}{(-1)^y \sin y\pi} = \varphi(y)$$

setzt, wo denn φ gleich wie ψ der Bedingung

genügt,

$$31. \varphi(y) = \varphi(y-1)$$

Within

$$32. (u, -x)^y = \frac{\varphi\left(\frac{n}{x} - y\right)}{\varphi\left(\frac{n}{x}\right)} \cdot x^y \frac{\pi\left(\frac{n}{x}\right)}{\pi\left(\frac{n}{x} - y\right)}$$

$$33. \left(1, -\frac{1}{p}\right)^y = \frac{\varphi(p-y)}{\varphi(p)} \cdot p^{-y} \frac{\pi(p)}{\pi(p-y)}$$

Hieraus ergibt sich ebenso wie vorhin, daß $\left(1, -\frac{1}{p}\right)^y$, wenn p unendlich groß wird, nur dann einer bestimmten Grenze sich nähert, wenn die Function φ sich auf eine Constante reducirt.

Da nun φ und ψ nicht zugleich constant sein können, so folgt, daß der Werth von $(1, +x)^y$, und daher auch der von $(u, +x)^y = u^y \left(1, +\frac{x}{u}\right)^y$ jedenfalls entweder für einen positiven, oder für einen negativen unendlich kleinen Werth von x unbestimmt bleibt. Die Function $(u, +x)^y$ ändert sich also in der Nähe von $x=0$ nicht stetig.*)

Zu bemerken ist jedoch hierbei, daß dies nur gilt, wenn y keine ganze Zahl ist. Denn in diesem Falle ergibt sich aus (18 und 31)

$$34. \psi(u \pm y) = \psi(u), \varphi(u \pm y) = \varphi(u),$$

und die Functionen ψ, φ fallen aus den Ausdrücken für $(u, +x)^y$ und $(u, -x)^y$ fort.

§. 4.

Nach dem im §. 2 Gesagten ist es zur vollständigen Definition der Facultät noch nöthig, hinsichtlich der Function ψ eine Bestimmung zu treffen. Eine solche ist, wie so eben nachgewiesen, enthalten in der Annahme, daß $(1, +x)^y$ entweder für einen positiven oder negativen Werth von x , wenn dieser ohne Ende abnimmt, der Grenze 1 sich nähert, indem im ersten Falle ψ , im zweiten die Function φ sich auf eine Constante reduciren muß. Eine dieser Annahmen ist, wie sich ergeben wird, nothwendig, wenn die Analogie der Facultäten und der Potenzen durchgehend behauptet werden soll. Ohne für jetzt näher zu untersuchen, welche von diesen beiden Annahmen zweckmäßiger sei, obwohl mir die letztere aus mehreren Rücksichten den Vorzug zu verdienen scheint,

*) Die hierdurch als unzulässig sich herausstellende Voraussetzung, es sei $(u, +x)^y$ sowohl für einen positiven als negativen unendlich kleinen Werth von x unendlich wenig von u^y verschieden, hat zum Theil Schuld an den Widersprüchen und paradoxen Resultaten, auf die man in der Theorie der Facultäten gerathen ist. — Auch ergibt sich aus dem Gesagten die Unmöglichkeit, $(u, +x)^y$ nach ganzen Potenzen von x in eine convergirende Reihe zu entwickeln.

will ich beide Arten von Facultäten, die sich aus ihnen ergeben, in Betracht ziehen. Die erste Art, für welche allein fortan die Bezeichnung $(u, +x)^y$ bestimmt bleiben soll, hat die in den obigen Gleichungen (1, 2, 3) ausgedrückten Grundeigenschaften, und ist ferner dadurch charakterisirt, daß für einen unendlich kleinen positiven Werth von x $(1, +x)^y$ der Potenz 1^y unendlich nahe kommt. Man hat für sie den Ausdruck (gemäß 19.)

$$35. (u, +x)^y = x^y \frac{\Pi(\frac{u}{x} + y - 1)}{\Pi(\frac{u}{x} - 1)}$$

Für die andere Art soll, mit Aenderung des Zeichens von x , die Bezeichnung $[u, -x]^y$ gebraucht werden. Sie wird demnach definirt durch die Grundgleichungen

$$36. [u, -x]^{y+k} = [u, -x]^y [u - yx, -x]^k,$$

$$37. [ku, -kx]^y = k^y [u, -x]^y$$

$$38. [u, -x] = u,$$

und die Bestimmung, daß ebenfalls für einen unendlich kleinen positiven Werth von x $[1, -x]^y$ von der Potenz 1^y unendlich wenig verschieden sei. Ihr Ausdruck ist (nach 32.)

$$39. [u, -x]^y = x^y \frac{\Pi(\frac{u}{x})}{\Pi(\frac{u}{x} - y)}$$

§. 5.

Ich gehe jetzt zunächst über zu den Entwicklungen von $(u+k, +x)^y$ und $[u+k, -x]^y$. Crelle entwickelt in dem erwähnten Mémoire (§. 41, Nr. 373) die Formel

$$40. (u+k, +x)^y = (u, +x)^y \left\{ 1 + y_1 \frac{k}{u} + y_2 \frac{k(k-x)}{u(u+x)} + \dots + y_n \frac{(k, -x)^n}{(u, +x)^n} \right\} + R_n,$$

wo durch y_1, y_2 u. s. w. die Binomial-Coefficienten bezeichnet sind. Der nach dem n ten Gliede hinzugefügte Rest R_n ist ein Ausdruck, welcher entwickelt die vorstehende Gleichung zu einer identischen macht. In so fern ist sie, die einzig aus den Gleichungen (1, 2, 3) hergeleitet worden, für alle möglichen Arten von Facultäten, welche diesen Gleichungen entsprechen, gültig. In wie fern sie aber gerade für die besondere Art, die hier betrachtet wird, eine convergirende Entwicklung gebe, bedarf noch einer nähern Untersuchung. Diese kann aber nicht nach den von Crelle (Th. d. f., §. 23) gegebenen Bestimmungen durchgeführt werden. Nach derselben würde die von ihm mit dem Namen der allgemeinen Taylor'schen Reihe bezeichnete Formel

$$41. F(x+k) = F(x) + \frac{k}{a} \Delta F(x) + \frac{k(k-a)}{2a^2} \Delta^2 F(x) + \dots + \frac{(k-a)^n}{(1+a)^n a} \Delta^n F(x) + R_n,$$

wo $\Delta x = a$ gesetzt ist, immer dann eine convergirende Entwicklung von $F(x+k)$ geben, sobald der größte und der kleinste Werth des $(n+1)$ ten Gliedes dieser Reihe für die verschiedenen Werthe des Arguments der Function F von x bis $x+k$ beide für $n = \infty$ auf Null sich reduciren. Dieser Satz ist aber hergeleitet aus einer Bestimmung der Grenzen von R_n , welche, wie Crelle selbst in einer spätern Abhandlung über diesen Gegenstand bemerkt hat, nur dann gültig ist, wenn $\frac{k}{a}$ eine ganze positive Zahl ist. Seine Anwendbarkeit ist daher zweifelhaft, wie sich auch leicht auf folgende Weise nachweisen läßt. Denn gesetzt, die Reihe (41) sei, nachdem für a ein bestimmter Werth gewählt worden, für eine gewisse Form der Function F wirklich convergent, und es sei $\psi(x)$ eine Function, die für keinen Werth von x unendlich groß wird, und der Bedingung

$$42. \psi(x+a) = \psi(x)$$

genügt, z. B. eine ganze Function von $\cos \frac{2x}{a}\pi$ und $\sin \frac{2x}{a}\pi$; so würde die Reihe für $\psi(x+k) F(x+k)$, da man alsdann

$$43. \Delta^n \cdot \psi(x) F(x) = \psi(x) \Delta^n F(x)$$

hat, zugleich mit der für $F(x+k)$ convergiren, wenn der in Rede stehende Satz allgemein richtig wäre. Man würde daher erhalten

$$44. \psi(x+k) F(x+k) = \psi(x) \left\{ F(x) + \frac{k}{a} \Delta F(x) + \frac{k(k-a)}{2a^2} \Delta^2 F(x) + \dots \infty \right\}.$$

Aus (41, 44) würde sich dann für jeden Werth von k , für den die Reihe (41) convergirt, ergeben

$$45. \psi(x+k) = \psi(x),$$

ein offenbar falsches Resultat.

Die Frage nach der Convergenz der Reihe wird indeß leicht auf einem andern Wege entschieden.

Setzt man mit Gauß in der angeführten Abhandlung

$$46. F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} + \dots \infty,$$

welche Reihe eine endliche Summe hat, wenn $\alpha + \beta - \gamma$ negativ ist, so hat man, wie Gauß a. a. O. bewiesen,

$$47. F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1) \Pi(\gamma - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1) \Pi(\gamma - \beta - 1)}$$

Setzt man in dieser Formel $\gamma = \frac{n}{x}$, $\alpha = -y$, $\beta = -\frac{k}{x}$, so erhält man

$$48. F\left(-y, -\frac{k}{x}, -\frac{n}{x}\right) = \frac{\Pi\left(\frac{n+k}{x} + y - 1\right) \Pi\left(\frac{n}{x} - 1\right)}{\Pi\left(\frac{n}{x} + y - 1\right) \Pi\left(\frac{n+k}{x} - 1\right)}$$

Mithin gemäß (35)

$$\frac{(u+k, +x)^y}{(u, +x)^y} = F\left(-y, -\frac{k}{x}, \frac{u}{x}\right),$$

oder

$$49. \frac{(u+k, +x)^y}{(u, +x)^y} = 1 + y_1 \frac{k}{u} + y_2 \frac{k(k-x)}{u(u+x)} + \dots + y_n \frac{(k, -x)^n}{(u, +x)^n} \dots \infty,$$

welche Reihe, da $\gamma - \alpha - \beta = \frac{u+k}{x} + y$ ist, convergirt, sobald $\frac{u+k}{x} + y$ positiv ist.

Die Reihe (40) giebt demnach in allen Fällen, wo sie eine endliche Summe hat, den richtigen Werth von $(u+k, +x)^y$. Anders verhält es sich aber mit der andern, von Crelle im §. 40 entwickelten Reihe.

Setzt man nämlich $\gamma = -\frac{u}{x} - y + 1$, $\alpha = -y$, $\beta = \frac{k}{x}$, so ist

$$50. F\left(-y, \frac{k}{x}, -\frac{u}{x} - y + 1\right) = \frac{\Pi\left(-\frac{u+k}{x}\right) \Pi\left(-\frac{u}{x}\right)}{\Pi\left(-\frac{u}{x} - y\right) \Pi\left(-\frac{u+k}{x} - y\right)},$$

woraus nach (28)

$$51. F\left(-y, \frac{k}{x}, -\frac{u}{x} - y + 1\right) = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x} + y\right)\pi \sin\left(\frac{u}{x} + y\right)\pi \Pi\left(\frac{u+k}{x} + y - 1\right) \Pi\left(\frac{u}{x} + y - 1\right)}{\sin\left(\frac{u+k}{x}\right)\pi \sin\left(\frac{u}{x}\right)\pi \Pi\left(\frac{u+k}{x} - 1\right) \Pi\left(\frac{u}{x} - 1\right)}$$

folgt. Daher (35)

$$52. \frac{(u+k, +x)^y}{(u, +x)^y} = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x}\right)\pi \sin\left(\frac{u}{x}\right)\pi}{\sin\left(\frac{u+k}{x} + y\right)\pi \sin\left(\frac{u}{x} + y\right)\pi} \cdot F\left(-y, \frac{k}{x}, -\frac{u+k}{x} + 1\right)$$

oder

$$53. \frac{(u+k, +x)^y}{(u, +x)^y} = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x}\right)\pi \sin\left(\frac{u}{x}\right)\pi}{\sin\left(\frac{u+k}{x} + y\right)\pi \sin\left(\frac{u}{x} + y\right)\pi} \cdot \left\{ 1 + y_1 \frac{k}{u+yx-x} + y_2 \frac{k(k+x)}{(u+yx-x)(u+yx-2x)} + \dots \infty \right\}$$

oder

$$54. (u+k, +x)^y = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x}\pi\right) \sin\frac{u}{x}\pi}{\sin\left(\frac{u+k}{x}+y\right)\pi \sin\left(\frac{u}{x}+y\right)\pi} \cdot \left\{ (u, +x)^y + y_1 (u, +x)^{y-1} (k, +x)^1 + y_2 (u, +x)^{y-2} (k, +x)^2 + \dots \infty \right\}$$

Diese Reihe convergirt, wenn $\gamma - \alpha - \beta = 1 - \frac{u+k}{x}$ positiv ist.

Wenn y eine ganze Zahl ist, so erhält man hieraus die bereits von Kramp aufgestellte Binomial-Formel, welche demnach, wie oben (§. 1) bemerkt worden, für gebrochene Werthe von y ihre Gültigkeit nicht behält.

§. 6.

Zum Behufe der Entwicklung von $[u+k, -x]^y$ mögen zuvörderst folgende, aus den Gleichungen (36, 37, 38) sich ergebende Formeln hier ihren Platz finden.

$$55. [u, -x]^{y-k} = \frac{[u, -x]^y}{[u-yx+kx, -x]^k}$$

$$56. [u, -x]^y = u(u-x)(u-2x)\dots(u-yx+x),$$

und

$$57. [u, -x]^{-y} = \frac{1}{(u+x)(u+2x)\dots(u+yx)},$$

wenn y eine ganze positive Zahl ist.

Setzt man nun in der Formel (47) $\alpha = -y$, $\beta = -\frac{k}{x}$, $\gamma = \frac{u}{x} - y + 1$, so erhält man

$$58. F\left(-y, -\frac{k}{x}, \frac{u}{x} - y + 1\right) = \frac{\Pi\left(\frac{u+k}{x}\right) \Pi\left(\frac{u}{x} - y\right)}{\Pi\left(\frac{u+k}{x} - y\right) \Pi\left(\frac{u}{x}\right)},$$

oder vermöge (39)

$$59. F\left(-y, -\frac{k}{x}, \frac{u}{x} - y + 1\right) = \frac{[u+k, -x]^y}{[u, -x]^y},$$

oder

$$60. \frac{[u+k, -x]^y}{[u, -x]^y} = 1 + y_1 \frac{k}{u-yx+x} + y_2 \frac{k(k-x)}{(u-yx+x)(u-yx+2x)} + \dots + y_n \frac{[k, -x]^n}{[u-yx+nx, -x]^n} \dots \infty,$$

woraus endlich (nach 55, 56)

$$61. [u+k, -x]^y = [u, -x]^y + y_1 [u, -x]^{y-1} [k, -x]^1 + \dots + y_n [u, -x]^{y-n} [k, -x]^n + \dots \infty$$

2*

Diese Reihen (60, 61) convergiren, wenn $\gamma - \alpha - \beta = \frac{u+k}{x} + 1$ positiv ist. Die Formel (61) hat die größte Aehnlichkeit mit der Binomial-Formel

$$62. (u+k)^y = u^y + y_1 u^{y-1} k + \dots + y_n u^{y-n} k^n + \dots \infty,$$

welche aus ihr hervorgeht, wenn man $x=0$ setzt. Ebenso stellt sich die Aehnlichkeit der Formel (40) mit derselben heraus, wenn man der letzteren die Form

$$63. (u+k)^y = u^y \left\{ 1 + y_1 \frac{k}{u} + y_2 \frac{k^2}{u^2} + \dots + y_n \frac{k^n}{u^n} + \dots \infty \right\}$$

gibt. Diese Analogie der Facultäten und der Potenzen würde aber, wie aus der vorhergehenden Darstellung erhellt, verloren gehen, wenn man hinsichtlich der Functionen ψ , φ eine andere Bestimmung trafe. Die Reihe (40) für $(u+k, +x)^y$ würde alsdann noch mit dem Factor

$$\frac{\psi\left(\frac{u+k}{x} + y\right) \psi\left(\frac{u}{x}\right)}{\psi\left(\frac{u+k}{x}\right) \psi\left(\frac{u+k}{x} + y\right)}, \text{ und die Reihe (61) für } [u+k, -x]^y \text{ noch mit dem Factor}$$

$$\frac{\varphi\left(\frac{u+k}{x}\right) \varphi\left(\frac{u}{x} - y\right)}{\varphi\left(\frac{u+k}{x} - y\right) \varphi\left(\frac{u}{x}\right)} \text{ zu multipliciren sein.}$$

§. 7.

Crelle entwickelt ferner im §. 43 seiner Schrift eine bemerkenswerthe Reihe für $\log(u+x)^y$. Dabei fällt es jedoch sogleich auf, daß dieselbe einzig aus den Gleichungen (1, 2, 3) hergeleitet wird, während doch bewiesen ist, daß diese allein zur Bestimmung von $(u+x)^y$ oder $\log(u+x)^y$ nicht hinreichend sind. Dieser scheinbare Widerspruch findet aber darin seine Erklärung, daß die Convergenz der Reihe auf die im §. 5 als unzuverlässig nachgewiesene Weise bestimmt wird. Die Formel selbst ist jedoch richtig, und kann auf folgende Art hergeleitet werden.

Setzt man in der Formel (40) $x=1$, und nimmt an, daß $u+y$ positiv sei; so kann man den Werth von k so klein nehmen, daß die Reihe (40) convergirt und nach ganzen Potenzen von k entwickelt werden kann. Bestimmt man in dieser Entwicklung den Coefficienten von k , so findet sich

$$64. \frac{d(u+1)^y}{du} = (u+1)^y \left\{ y_1 \frac{1}{u} - y_2 \frac{1}{u(u+1)} + \dots + (-1)^{n-1} y_n \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{u(u+1) \dots (u+n-1)} \dots \infty \right\}$$

Es ist aber, wie bekannt,

$$65. \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \dots (n-1)}{u(u+1) \dots (u+n-1)} = \Delta^{n-1} \left(\frac{1}{u} \right) \text{ für } \Delta u = 1,$$

daher

$$66. \frac{d(u+1)^y}{du} = (u+1)^y \left\{ y_1 \frac{1}{u} + y_2 \Delta \left(\frac{1}{u} \right) + \dots + y_n \Delta^{n-1} \left(\frac{1}{u} \right) + \dots \infty \right\},$$

oder 67. $\frac{d \log(u+1)}{du} = y_1 \frac{1}{u} + y_2 \Delta \left(\frac{1}{u} \right) + \dots + y_{n+1} \Delta^n \left(\frac{1}{u} \right) + \dots \infty,$

Hieraus folgt durch Integration, wenn man auch u als positiv annimmt, und bemerkt, daß

$$\begin{aligned} 68. \Delta^n \left(\frac{1}{u} \right) &= \frac{1}{u+n} - \frac{n_1}{u+n-1} + \frac{n_2}{u+n-2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{u} \\ &= \frac{d}{du} \left\{ \log(u+n) - n_1 \log(u+n-1) + n_2 \log(u+n-2) - \dots + (-1)^n \log u \right\} \\ &= \frac{d \cdot \Delta^n \log u}{du} \end{aligned}$$

ist,

$$69. \log(u+1)^y = C + y_1 \log u + y_2 \Delta \log u + \dots + y_{n+1} \Delta^n \log u + \dots \infty,$$

wo C eine noch zu bestimmende Constante bedeutet.

Es ist $\log(u+1)^y = \log u^y \left(1 + \frac{1}{u}\right)^y = y \log u + \log \left(1 + \frac{1}{u}\right)^y$, daher

$$70. \log \left(1 + \frac{1}{u}\right) = C + y_2 \log u + \dots + y_{n+1} \Delta^n \log u + \dots \infty$$

Nun ist aber $\Delta^n \log u = 0$ für $n = \infty$, also

$$71. \Delta^n \log u = \int_u^\infty \Delta^n \left(\frac{1}{u} \right) \cdot du,$$

und daher auch

$$72. y_2 \Delta \log u + \dots + y_{n+1} \Delta^n \log \left(\frac{1}{u} \right) + \dots \infty = \int_u^\infty \left\{ y_2 \Delta \left(\frac{1}{u} \right) + \dots + y_{n+1} \Delta^n \left(\frac{1}{u} \right) + \dots \infty \right\} du.$$

Die Summe der Reihe $y_2 \Delta \log u + u$ f. w. verschwindet also für $u = \infty$, und da $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^y = 1$ wird für $u = \infty$, so verschwindet auch $\log \left(1 + \frac{1}{u}\right)^y$ für $u = \infty$; es muß daher $C = 0$ sein. Man hat daher

$$73. \log(u+1)^y = y_1 \log u + y_2 \Delta \log u + \dots + y_{n+1} \Delta^n \log u + \dots \infty.$$

Aus dieser Formel ergibt sich sofort unter der Bedingung, daß $\frac{u}{x}$ und $\frac{u}{x} + y$ beide positiv sind,

$$74. \log(u+x)^y = y_1 \log u + y_2 \Delta \log u + \dots + y_{n+1} \Delta^n \log u + \dots \infty,$$

wo $\Delta u = x$ zu nehmen ist. Diese Formel stimmt überein mit der von Crelle a. a. D. unter No. 399 aufgestellten.

Bemerkt man, daß

75. $(u, +x)^y = (u, +x)^{n+y-u} = (u, +x)^n (u + nx, +x)^{y-n}$
 ist, so sieht man, wie man aus der Formel (74) immer eine andere herleiten kann, welche zur Berechnung von $\log(u, +x)^y$ dient, sobald nur $\frac{u}{x} + y$ positiv ist. Zu dem Ende braucht man nur für n eine so große positive ganze Zahl zu setzen, daß auch $\frac{u + nx}{x} = \frac{u}{x} + n$ positiv wird.

Setzt man in der Formel (35) $-u$ für u und $-y$ für y , so erhält man

$$76. (-u, +x)^{-y} (u + x, +x)^y = \frac{\Pi(-\frac{u}{x} - y - 1) \Pi(\frac{u}{x} + y)}{\Pi(-\frac{u}{x} - 1) \Pi(\frac{u}{x})},$$

oder vermöge (28)

$$77. (-u, +x)^{-y} (u + x, +x)^y = \frac{\sin \frac{u}{x} \pi}{\sin(\frac{u}{x} + y) \pi}.$$

Aus dieser Formel sieht man, daß die Facultät $(u, +x)^y$ für den Fall, daß $\frac{u}{x} + y$ negativ ist, auf eine andere, für die $\frac{u}{x} + y$ positiv ist, zurückgeführt werden kann. Die Reihe (74) reicht also für alle Fälle zur Berechnung von $(u, +x)^y$ aus.

§. 8.

Aus der Formel (60) erhält man, nachdem $x = 1$ gesetzt worden, unter der Voraussetzung, daß $u + 1$ positiv sei

$$78. \frac{d \log [u, -1]^y}{du} = y_1 \frac{1}{u-y+1} - y_2 \frac{1}{(u-y+1)(u-y+2)} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(u-y+1)(u-y+2) \cdots (u-y+n)} \cdots \infty$$

Setzt man hier $u-y$ für u , und $-y$ für y , so findet sich, wenn $u-y+1$ positiv ist,

$$79. \frac{d \log [u-y, -1]^{-y}}{du} = -y \frac{1}{u+1} + \frac{y(y+1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{(u+1)(u+2)} - \dots - (-1)^{n-1} \frac{y(y+1) \cdots (y+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(u+1)(u+2) \cdots (u+n)} \cdots \infty$$

Aber es ist

$$80. [u-y, -1]^{-y} = \frac{1}{[u, -1]^y}$$

$$81. \log [u-y, -1]^{-y} = -\log [u, -1]^y$$

Hiernach ergibt sich aus (79) durch Integration auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden §., wenn auch $u+1$ als positiv angenommen wird,

$$82. \log[u, -1]^y$$

$$= y \log(u+1) + \frac{y(y+1)}{1 \cdot 2} \Delta \log(u+1) + \dots + \frac{y(y+1) \dots (y+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \Delta^{n-1} \log(u+1) + \dots \infty$$

und hieraus, unter der Bedingung, daß $\frac{u}{x} + 1$ und $\frac{u}{x} - \gamma + 1$ beide positiv sind,

$$83. \log[u, -x]^y$$

$$= y \log(u+x) + \frac{y(y+1)}{1 \cdot 2} \Delta \log(u+x) + \dots + \frac{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \Delta^{n-1} \log(u+x) + \dots \infty,$$

wo $\Delta u = x$ zu setzen ist.

Da man

$$84. [u, -x]^y = [u, -x]^{-n} [u + nx, -x]^{\gamma+n}$$

hat, so läßt sich, indem man für n eine ganze Zahl so wählt, daß $\frac{u}{x} + n$ positiv wird, aus (83)

immer eine Reihe zur Berechnung von $[u, -x]^y$ herleiten, sobald $\frac{u}{x} - \gamma + 1$ positiv ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so kann man die Formel

$$85. [u, -x]^y [-u-x, -x]^{-\gamma} = \frac{\sin\left(\frac{u}{x} - \gamma\right)\pi}{\sin \frac{u}{x} \pi},$$

die sich aus (28, 39) ergibt, anwenden, um die Fakultät $[u, -x]^y$ auf eine andere zurückzuführen, die sich mit Hilfe der Reihe (83) berechnen läßt.

In dem Vorstehenden glaube ich nun meine im Anfange ausgesprochene Ansicht über die bisherige Theorie der Fakultäten gehörig begründet, und die wichtigsten Formeln für beide in Betracht gezogene Arten dieser Functionen streng bewiesen zu haben. Es ist jedoch, da es mir zunächst nur darauf ankam, sichere Resultate festzustellen, und diese so viel als möglich aus bekannten Sätzen herzuleiten, der Gang der Entwicklung nicht immer derjenige, welcher bei einer systematischen Darstellung des Gegenstandes zu befolgen sein würde. Ich gedenke, da die Grenzen dieses Aufsatzes keine größere Ausführlichkeit gestatten, bei einer andern Gelegenheit auf die analytischen Fakultäten zurückzukommen.

Dt. Crone, im August 1843.

Karl Weierstraß.