Untersuchung der in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Curve

$$ax^4 + c^3xy + by^4 = 0.$$

Bei der Untersuchung geometrischer Objekte, deren Gleichungen, auf ein bestimmtes Coordinatensystem bezogenen, zu den sog. impliciten Funktionen gehören, leisten in vielen Fällen die Einführung einer neuen unabhängigen Variabelen in dieselben und die Wahl eines andern Coordinatensystems ausgezeichnete Dienste und führen oft auf eine einfache Weise zum Ziel. Wenn man die Eigenschaften der in Rede stehenden Curve durch Auflösung biquadratischer Gleichungen oder durch Behandlung unentwickelter Funktionen ermitteln wollte, so würde man auf große Schwierigkeiten stoßen und dabei noch mangelhafte Resultate erzielen; wenn man dagegen die vorhin angedeuteten Mittel nicht unbeachtet läßt, so können sämmtliche Eigenschaften dieser Curve sehr leicht gefunden werden.

§ 1. Transformation der Curvengleichung und nähere Betrachtung der transformirten.

Um die Gleichung unserer Curve zu transformiren, nehmen wir

I. ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit dem Mittelpunkte O an und verbinden denselben durch den Strahl r mit einem beliebigen Punkte (x,y) der Curve, so wird, Winkel (X,r) mit φ bezeichnet,

$$y = x \operatorname{tang} \varphi \text{ sein.}$$

Durch Substitution des Werthes für y in die Curvengleichung, erhält man

$$ax^4 + c^3x^2 \operatorname{tang} \varphi + bx^4 \operatorname{tang}^4 \varphi = 0, \text{ oder } x^2 (ax^2 + c^3 \operatorname{tang} \varphi + bx^2 \operatorname{tang}^4 \varphi) = 0,$$

welche Gleichung

1) durch $x^2 = 0$, also $x = 0$ 2) durch $ax^2 + c^3 \operatorname{tg} \varphi + bx^2 \operatorname{tg}^4 \varphi = 0$, also $x = \pm \sqrt{-\frac{c \operatorname{tg} \varphi}{a + b \operatorname{tg}^4 \varphi}}$

befriedigt wird. Da $y = x \operatorname{tang} \varphi$ ist, so ergeben sich

3) $y = 0$ 4) $y = \pm c \operatorname{tg} \varphi \sqrt{-\frac{c \operatorname{tg} \varphi}{a + b \operatorname{tg}^4 \varphi}}$.

Hiermit ist die zu untersuchende Curve durch die beiden Gleichungen

$$x = \pm c \sqrt{-\frac{c \operatorname{tg} \varphi}{a + b \operatorname{tg}^4 \varphi}} \quad y = \pm c \operatorname{tg} \varphi \sqrt{-\frac{c \operatorname{tg} \varphi}{a + b \operatorname{tg}^4 \varphi}}$$

dargestellt, worin φ die unabhängige Variabele ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Behalten wir

II. den Mittelpunkt des rechtwinkligen Systems als Pol eines Polar-Coordinatensystems, sowie den vorhin erwähnten Winkel φ als Anomalie und den Strahl r als Radiusvector bei, so erhalten wir durch Substitution der bekannten Relationen,

$$y = r \sin \varphi, \quad x = r \cos \varphi$$

in die gegebene Curvengleichung, folgende,

$$r^2 (a \cos^4 \varphi + c^3 \sin \varphi \cos \varphi + b r^2 \sin^4 \varphi) = 0, \text{ welcher}$$

$$1)\ r^2 = 0, \text{ also } r = 0 \quad 2)\ r = \pm c \sqrt{-\frac{c \sin \varphi \cos \varphi}{a \cos^4 \varphi + b \sin^4 \varphi}} = \pm c \sec \varphi \sqrt{-\frac{c \operatorname{tang} \varphi}{a + b \operatorname{tang}^4 \varphi}}$$

genügen.

Bemerkung:

die Werthe $r = 0$, $x = 0$ und $y = 0$ werden bei den vielfachen Punkten berücksichtigt werden.

Nachdem wir auch eine Polargleichung für unsere Curve gewonnen, gehen wir zur näheren Betrachtung der Abhängigkeit der Größen x, y, r von dem Winkel φ über.

Wenn wir der Wurzelgröße, $\sqrt{-\frac{c \operatorname{tang} \varphi}{a + b \operatorname{tang}^4 \varphi}}$ d. Form, $\sqrt{-\frac{\frac{c}{a} \operatorname{tang} \varphi}{1 + \frac{b}{a} \operatorname{tang}^4 \varphi}}$ geben und die Zahlenwerthe $\frac{c}{a}$ mit μ, $\frac{b}{a}$ mit ν bezeichnen, so erhalten wir als Curvengleichungen

$$x = \pm c \sqrt{-\frac{\mu \operatorname{tang} \varphi}{1 + \nu \operatorname{tang}^4 \varphi}} \quad y = \pm c \operatorname{tang} \varphi \sqrt{-\frac{\mu \operatorname{tang} \varphi}{1 + \nu \operatorname{tang}^4 \varphi}} \quad r = \pm c \sec \varphi \sqrt{-\frac{\mu \operatorname{tang} \varphi}{1 + \nu \operatorname{tang}^4 \varphi}}$$

von denen eine jede lehrt, daß für die Realität der abhängig Veränderlichen erforderlich sind,

entweder a) $\mu \operatorname{tang} \varphi < 0$ und $1 + \nu \operatorname{tang}^4 \varphi > 0$

oder b) $\mu \operatorname{tang} \varphi > 0$ und $1 + \nu \operatorname{tang}^4 \varphi < 0$.

Diese beiden Hauptbedingungen zerfallen in folgende specielle,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha)\ \mu > 0 \text{ u. } \operatorname{tang} \varphi > 0 \\ \beta)\ \mu > 0 \text{ u. } \operatorname{tang} \varphi < 0 \end{array}\right\} \text{ und dabei entweder } \nu \geqq 0 \text{ oder } 0 \geqq \nu > -\frac{1}{\operatorname{tang}^4 \varphi} \quad \left.\begin{array}{l} \gamma)\ \mu < 0 \text{ und } \operatorname{tang} \varphi < 0 \\ \delta)\ \mu > 0 \text{ und } \operatorname{tang} \varphi > 0 \end{array}\right\} \text{ u. dab. } 0 > \nu < -\frac{1}{\operatorname{tang}^4 \varphi}$$

Es sei die Drehung des Vektors von dem positiven Ende der X Achse nach links als die der positiven Werthe von φ, und die umgekehrte Drehung nach rechts als die der negativen Werthe von φ vorausgesetzt, so erhalten wir mit Rücksicht auf das doppelte Vorzeichen der Wurzelgröße die Curve in allen Quadranten, wenn wir φ nur das Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ nach beiden eben genannten Richtungen durchlaufen lassen. Hiernach dürfen wir tang φ stets positiv nehmen u., wenn wir nur die erste Drehungsrichtung von r berücksichtigen, die Bedingungen für die Realität von x, y, r also aufstellen:

$$\varepsilon)\ \mu < 0 \text{ und } \nu \geqq 0 \quad \zeta)\ \mu < 0 \text{ und } 0 \geqq \nu > -\frac{1}{\operatorname{tang}^4 \varphi} \quad \eta)\ \mu > 0 \text{ und } 0 > \nu < -\frac{1}{\operatorname{tang}^4 \varphi}.$$

Bezeichnen wir im ersten Bedingungsfalle den Werth μ mit $-m'$, den von ν mit n', ebenso in den beiden andern Fällen entsprechend μ mit $-m''$, ν mit $-n''$, μ mit m''', ν mit n''', und beschränken uns der Kürze wegen nur auf die Polargleichung, so nimmt dieselbe folgende Gestalten an:

$$3)\ r = \pm c \sec \varphi \sqrt{\frac{m' \operatorname{tang} \varphi}{1 + n' \operatorname{tang}^4 \varphi}} \quad (\text{wobei } m' > 0,\ n' \geqq 0)$$

$$4)\ r = \pm c \sec \varphi \sqrt{\frac{m'' \operatorname{tang} \varphi}{1 - n'' \operatorname{tang}^4 \varphi}} \quad (\text{wobei } m'' > 0,\ \frac{1}{\operatorname{tang}^4 \varphi} > n'' \geqq 0)$$

$$5)\ r = \pm c \sec \varphi \sqrt{\frac{m''' \operatorname{tang} \varphi}{1 - n''' \operatorname{tang}^4 \varphi}} \quad (\text{wobei } m''' > 0,\ \frac{1}{\operatorname{tang}^4 \varphi} > n''' \geqq 0.)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist leicht einzusehen, daß diese drei Gleichungen nur specielle Fälle der folgenden sind,

$$r = \pm c \sec\varphi \sqrt{\frac{m \operatorname{tang}\varphi}{1 + n \operatorname{tang}^4\varphi}},$$ worin $m > 0$ ist und $n \geqq 0$ genommen werden kann, wenn nur für $n < 0$ die Bedingung $1 + n \operatorname{tang}^4\varphi > 0$ erfüllt wird.

Bemerkung:

Da $\mu \operatorname{tang}(-\varphi) = -\mu \operatorname{tang}\varphi$, so erhält man durch Uebertragung von $(-)$ auf μ die Realitätsbedingungen von r, x, y für die zweite Drehungsrichtung von r.

§ 2. Lauf der Curve und ihre Culminationspunkte.

Nehmen wir

I. die Gleichung $r = \pm c \sec\varphi \sqrt{\frac{m \operatorname{tang}\varphi}{1 + n \operatorname{tang}^4\varphi}}$ oder $= \pm c \sqrt{\frac{m\left(\frac{1}{\operatorname{tang}^3\varphi} + \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi}\right)}{\frac{1}{\operatorname{tang}^4\varphi} + n}}$

in Betracht und setzen

1) $n > 0$ voraus, so gewinnen wir aus derselben die Ueberzeugung, daß, wenn φ das Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ durchläuft, also $\operatorname{tang}\varphi$ die Zahlenwerthe von 0 bis ∞ nach einander annimmt, der Vektor r mit dem Werthe Null beginnend bis zu einer gewissen Grenze wachsen und von da ab wiederum bis Null abnehmen wird. Aus diesem eigenthümlichen Abhängigkeitsverhältnisse des Radiusvektors von der Anomalie folgt, daß im gegenwärtigen Falle $(n > 0)$ die Polargleichung eine geschlossene und durch einen vielfachen Punkt im Pol ausgezeichnete Curve darstellt.

Es sei

2) $n > 0$. Wenn wir $(-n)$ an Stelle von $(+n)$ in die Gleichung I treten lassen, so werden wir sofort einsehen, daß r mit zunehmenden φ wächst und für $\varphi = \operatorname{arc\,tang} \sqrt[4]{n}$ in's Unendliche übergeht.

Wird endlich

3) $n = 0$ angenommen, so finden wir, daß r mit wachsenden φ continuirlich steigt und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ den Werth $\pm\infty$ annimmt. — Es ist nicht weniger als leicht einzusehen, daß in den beiden letzteren Fällen $(n \leqq 0)$ durch die Polargleichung zwei nicht geschlossene und mit einem vielfachen Punkt im Pol charakterisirte Curven dargestellt werden. Der Kürze und Uebersicht wegen mögen diese drei Linien also benannt werden:

Curve A für $n > 0$ Curve B für $n < 0$ Curve C für $n = 0$.

Bevor wir die Frage nach der Potenz des angedeuteten vielfachen Punktes beantworten, wollen wir noch andere Betrachtungen über den Lauf der Curven anstellen. — Nehmen wir vorläufig auf den Werth von n gar keine Rücksicht, so ergiebt sich durch Differenziation der Polargleichung nach φ,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm c \left[\sec\varphi \operatorname{tang}\varphi \sqrt{\frac{m \operatorname{tang}\varphi}{1 + n \operatorname{tang}^4\varphi}} + \frac{m \sec^3\varphi\,(1 - 3\,n \operatorname{tang}^4\varphi)}{2\sqrt{m \operatorname{tang}\varphi\,(1 + n \operatorname{tang}^4\varphi)^3}} \right]$$

$$= \pm m \sec\varphi \frac{3 \operatorname{tang}^2\varphi - 3\,n \operatorname{tang}^4\varphi - n \operatorname{tang}^6\varphi + 1}{2\sqrt{m \operatorname{tang}\varphi\,(1 + n \operatorname{tang}^4\varphi)^3}}.$$

Berücksichtigen wir nur das positive Vorzeichen der Wurzelgröße in der Polargleichung der Curve, indem wir uns auf die Betrachtung der im ersten resp. vierten Quadranten gelegenen Curvenzweige, von denen die in den Scheitelquadranten gelegenen garnicht verschieden sind, beschränken, so werden wir durch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Untersuchung von $\frac{dr}{d\varphi} \gtrless 0$ oder vielmehr von

$\frac{cm \sec\varphi (3 \tang\varphi - 3 n \tang^4\varphi - n \tang^6\varphi + 1}{2 \sqrt{m \tang\varphi (1 + n \tang^4\varphi)^3}} \gtrless 0$ erfahren, für welchen Werth von φ unsere Curvenarten culminiren, daher auch wie lange sie steigen und wann sie zu fallen beginnen.

a) Da für Curve A sowohl der Nenner als auch der Faktor $cm \sec\varphi$ in dem Ausdrucke für $\frac{dr}{d\varphi}$ positiv sind, so reducirt sich die vorhin erwähnte zu untersuchende Relation auf

$$3 \tang^2\varphi - 3 n \tang^4\varphi - n \tang^6\varphi + 1 \gtrless 0 \text{ oder } \frac{3 \tang^2\varphi + 1}{3 \tang^4\varphi + \tang^6\varphi} \gtrless n, \text{ woraus}$$

erhellt, daß die Grenze zwischen der Zu- und Abnahme des Vektors lediglich von der Größe n abhängig ist d. h. durch $n \gtrless 1$ wird die Größe aber nicht die Natur der Curve bedingt. Es sei daher $n = 1$ genommen, so wird die in Rede stehende Relation also lauten,

$$\frac{2 \tang^3\varphi + 1}{3 \tang^4\varphi + \tang^6\varphi} \gtrless 1, \text{ woraus nun für den Culminationspunkt der Curve folgt,}$$

$$\tang^6\varphi + 3 \tang^4\varphi - 3 \tang^2\varphi - 1 = 0 \text{ oder } (\tang^6\varphi - 1) + 3 \tang^2\varphi (\tang^2\varphi - 1) = 0.$$

Da $\tang^6\varphi - 1 = (\tang^2\varphi - 1)(\tang^4\varphi + \tang^2\varphi + 1)$ ist, so erhalten wir zur Bestimmung des fraglichen Punktes folgende Gleichung,

$(\tang^2\varphi - 1)(\tang^4\varphi + 4 \tang^2\varphi + 1) = 0$, welche

1) durch $\tang^2\varphi = 1$, also $\varphi = \arc\tang \pm 1$

2) durch $\tang\varphi = \pm\sqrt{-2 \pm \sqrt{3}}$ also $\varphi = \arc\tang \pm \sqrt{-2 \pm \sqrt{3}}$ befriedigt wird.

Da der zweite Werth für $\tang\varphi$ imaginär ist, so ist nur $\tang\varphi = 1$ (nach der früher gemachten Erörterung über die Drehungsrichtung des Vektors ist hier $\tang\varphi$ positiv genommen) oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$ derjenige Werth, für welchen $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ wird, d. h. r sein Maximum erreicht und zwar, wie die Polargleichung für $\tang\varphi = 1$ zeigt,

$$r = c \sqrt{m}.$$

Anmerkung 1.

Daß für $\tang\varphi = 1$ unsere Curve wirklich culminirt, oder r sein Maximum erreicht, wird später begründet werden.

Anmerkung 2.

Wäre $n > 1$ gewählt worden, so würde um so mehr $\frac{3 \tang^2\varphi + 1}{3 \tang^4\varphi + \tang^6\varphi} > 1$ oder der Nenner im Verhältniß zum Zähler viel kleiner d. h. tang < 1 genommen werden müssen, um den Culminationspunkt der Curve zu erreichen. Wenn hingegen $n < 1$ gewählt wäre, so würde der Culminationspunkt für $\tang\varphi > 1$ eintreten.

b) Da für Curve B, wie leicht zu ersehen,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{cm \sec\varphi (3 \tang^2\varphi + 3 n \tang^4\varphi + \tang^6\varphi + 1)}{2 \sqrt{m \tang\varphi (1 - n \tang^4\varphi)^3}}$$

ist, so sehen wir, daß $n \tang^4\varphi < 1$ sein muß, falls $\frac{dr}{d\varphi}$ reell sein soll und daß für $n \tang^4\varphi = 1$, $\frac{dr}{d\varphi} = \infty$ wird, daß d. h. r für diesen Werth von φ ins Unendliche übergeht. Sollte diese Curve einen angebbaren Culminationspunkt haben, so müßte

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{cm \sec\varphi (3 \tang^2\varphi + 3 n \tang^4\varphi + \tang^6\varphi + 1)}{2 \sqrt{m \tang\varphi (1 - n \tang^4\varphi)^3}} = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder $3 \tang^2 \varphi + 3 n \tang^4 \varphi + \tang^6 \varphi + 1 = 0$ werden. Da dieser Gleichung kein Werth von $\tang \varphi$ genügen kann, so hat diese Curvenart keinen sogenannten Culminationspunkt.

c) Die Bedingungsgleichung für einen etwaigen Culminationspunkt der Curve C:

$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{cm \sec \varphi (3 \tang^2 \varphi + 1)}{2 \sqrt{m \tang \varphi}} = 0$, oder $3 \tang^2 \varphi + 1 = 0$, lehrt, daß auch diese Curve keinen Culminationspunkt hat.

Um noch andere Eigenschaften unserer Curven zu ermitteln, gehen wir

II. von den beiden Gleichungen:

$$x = \pm c \sqrt{\frac{m \tang \varphi}{1 + n \tang^4 \varphi}}, \quad y = \pm c \tang \varphi \sqrt{\frac{m \tang \varphi}{1 + n \tang^4 \varphi}}$$

aus und bilden

1) $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{cm \sec^2 \varphi (1 + n \tang^4 \varphi - 4 n \tang^4 \varphi)}{2 \sqrt{m \tang \varphi (1 + n \tang 4 \varphi)^3}} = \frac{cm \sec^3 \varphi (1 - 3 n \tang^4 \varphi)}{2 \sqrt{m \tang \varphi (1 + n \tang^4 \varphi)^3}}$

Für die Culmination, also auch für die Zu- und Abnahme der Abscisse x ergiebt sich nun folgende Relation:

$\frac{dx}{d\varphi} \gtrless 0$ oder $\frac{cm \sec^2 \varphi (1 - 3 n \tang^4 \varphi)}{2 \sqrt{m \tang \varphi (1 + n \tang^4 \varphi)^3}} \gtrless 0$, welche

a) für Curve A ($n > 0$) ihre Gestalt nicht ändert. Da $\tang \varphi$ positiv vorausgesetzt worden und da in dem vorstehenden Differenzialquotienten sowohl der Nenner als auch der Faktor $cm \sec^2 \varphi$ positiv sind, so reducirt sich unsere Relation auf

$1 - 3 n \tang^4 \varphi \gtrless 0$, woraus für das Maximum von x folgt:

$1 - 3 n \tang^4 \varphi = 0$, also $\tang^4 \varphi = \frac{1}{3n}$ oder $\varphi = \arc \tang \frac{1}{\sqrt[4]{3n}}$. Solange also $\tang^4 \varphi < \frac{1}{3n}$, also $\frac{dx}{d\varphi} > 0$ ist, so lange wächst x mit zunehmendem φ, und solange $\tang^4 \varphi > \frac{1}{3n}$, also $\frac{dx}{d\varphi} < 0$ ist, solange nimmt x mit zunehmendem φ ab. Setzen wir $\tang^4 \varphi = \frac{1}{3n}$ in die Gleichung für x, so wird sich für die Culmination der Abscisse ergeben:

$$x = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{3 m}{\sqrt[4]{3 n}}}$$

b) Da für Curve B ($n < 0$)

$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{cm \sec^2 \varphi (1 + 3 n \tang^4 \varphi)}{2 \sqrt{m \tang \varphi (1 - n \tang^4 \varphi)^3}}$ wird, da ferner $\frac{dx}{d\varphi}$ positiv ist, bei $n \tang^4 \varphi = 1$ unendlich groß wird und nie $1 + 3 n \tang^4 \varphi = 0$ sein kann, so kann bei dieser Curvenart keine Rede von einem Maximum der Abscisse sein.

c) Für Curve C ($n = 0$) wird

$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{cm \sec^2 \varphi}{2 \sqrt{m \tang \varphi}}$, woraus folgt, daß auch bei dieser Curve die Abscisse kein Maximum hat.

Es ist nach gehöriger Ordnung,

2) $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{cm \sec^2 \varphi \tang \varphi (3 - n \tang^4 \varphi)}{2 \sqrt{m \tang \varphi (1 + n \tang^4 \varphi)^3}}$, woraus für die Culmination der Ordinate sich folgende Relationen ergeben.

a) Für Curve A ($n > 0$)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$3 - n \tang^4 \varphi \rangle \leqq 0$, woraus folgt, daß bei $\tang^4 \varphi \angle \frac{3}{n}$ die Ordinate mit wachsendem φ zunimmt, bei $\tang^4 \varphi = \frac{3}{n}$ culminirt und bei $\tang^4 \varphi \rangle \frac{3}{n}$ abnimmt. Der Werth $\tang^4 \varphi = \frac{3}{n}$ liefert für das Maximum von y:

$$y = \frac{c}{2} \sqrt[4]{\frac{3\,m^2}{n}} \sqrt{\frac{3}{n.}}$$

b) Für Curve B ($n \angle 0$) würde, wie leicht zu ersehen, $3 + n \tang^4 \varphi = 0$ stattfinden müssen, wenn y culminiren sollte, was aber nie der Fall sein kann, weil hierin n positiv ist.

c) Für Curve C ($n = 0$) muß $cm \sec^2 \varphi \tang \varphi = 0$ sein, woraus folgt, daß auch in dieser Curve die Ordinate y kein Maximum hat.

Anmerkung 1.

Die Werthe $r = \infty$, $x = \infty$ und $y = \infty$, welche bei Curve B und C, für gewisse Werthe von φ zum Vorschein kommen, fallen hier nicht unter den Begriff der Maxima.

Anmerkung 2.

Daß für die gefundenen Werthe von φ die Coordinaten x und y ihre Maxima wirklich erreichen, wird späterhin begründet werden.

Anmerkung 3.

Nimmt man $n = 1$ und $m = 4$, so die sind Maxima von

$$x = 1,\ 5\,c \text{ und } y = 1,\ 4\,5\,c$$

3) Die beiden Gleichungen für $\frac{dx}{d\varphi}$ und $\frac{dy}{d\varphi}$ liefern

$\frac{dy}{dx} = \frac{\tang \varphi\,(3 - n \tang^4 \varphi)}{1 - 3\,n \tang^4 \varphi,}$ woraus, $\frac{dy}{dx} = 0$ gesetzt, sich für die erste Curvenart die Gleichung ergiebt,

$$\tang \varphi (3 - n \tang^4 \varphi) = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, daß Curve A sowohl von der X Achse im Mittelpunkt des Systems, als auch von der durch den Culminationspunkt der Ordinate zu der X Achse parallel gezogenen geraden Linie tangirt wird. — Aus den für die beiden andern Curvenarten bezüglichen Gleichungen,

$\frac{dy}{dx} = \frac{\tang \varphi\,(3 + n \tang^4 \varphi)}{1 + n \tang^4 \varphi}$ und $\frac{dy}{dx} = 3 \tang \varphi$ folgt, $\frac{dy}{dx} = 0$ gesetzt, daß jede dieser Curven im Mittelpunkte des Systems von der Abscissenachse berührt wird.

Bemerkung 1.

Die Curven A und C werden auch von der Y Achse tangirt, da für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird.

Bemerkung 2.

Für $n = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$ erhält $\frac{dy}{dx}$ für die drei Curvenarten die entsprechenden Werthe (-1), $(+1)$, $(+3)$, woraus die Lage und Construktion der Tangenten in diesem Punkt leicht zu ersehen ist.

4) Die Frage nach der Potenz des früher erwähnten vielfachen Punktes läßt sich nunmehr durch folgende Betrachtung beantworten.

Da für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die Ordinate Y der Curve A annullirt und, wie gezeigt, die Y Achse zur Tangente wird, so gehört der hier in Rede stehende vielfache Punkt der zweiten Potenz an oder er ist ein Doppelpunkt. Was Curve B, für welche bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die Ordinate $y = \infty$ und die Y Achse Tangente

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wird, und ebenso Curve C, die überhaupt nie von der Y Achse tangirt wird, anbelangt, so gehört ihr vielfacher Punkt der ersten Potenz an. Berücksichtigen wir die vier Quadranten des Coordinatensystems und die in § 1 erwähnten Werthe $x^2 = 0$ und $y^2 = 0$ (eigentlich den Anfangspunkt des Systems) so können wir sagen, daß Curve A durch einen vielfachen Punkt der fünften und Curve B und C durch einen der dritten Potenz ausgezeichnet sind.

§ 3. Maxima der Coordinaten und die Inflexions-Punkte.

Als wir in dem vorhergehenden § die Maxima von r, y, x ermittelten, bemerkten wir dabei, daß jene Werthe noch einer Prüfung unterworfen werden müssen. Zu diesem Zwecke gehen wir

I. von der Polargleichung aus, bilden den Differenzialquotienten $\frac{d^2 r}{d\varphi^2}$ und untersuchen das Vorzeichen desselben, nachdem wir φ die früher gefundenen Bestimmungswerthe gegeben.

Um die bereits bekannte Gleichung

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{mc \sec\varphi\,(3\,\mathrm{tang}^2\varphi - n\,\mathrm{tang}^4\varphi - n\,\mathrm{tang}^6\varphi + 1)}{2\sqrt{m\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(1 + n\,\mathrm{tang}^4\varphi)^3}}$$

zu differenziren, setzen wir der Kürze wegen

$$3\,\mathrm{tang}^2\varphi - 3\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi - n\,\mathrm{tang}^6\varphi + 1 = V \text{ und } m\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(1 + n\,\mathrm{tang}^4\varphi)^3 = Z$$

so ergiebt sich, da

$$\frac{dV}{d\varphi} = \sec^2\varphi\,(6\,\mathrm{tang}\,\varphi - 12\,n\,\mathrm{tang}^3\varphi - 6\,n\,\mathrm{tang}^5\varphi)$$

$$\frac{dZ}{d\varphi} = m\sec^2\varphi\,(1 + n\,\mathrm{tang}^4\varphi)^2\,(1 + 13\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi)$$

$$\frac{d\sqrt{Z}}{d\varphi} = \frac{m\sec^2\varphi\,(1 + n\,\mathrm{tang}^4\varphi)^2\,(1 + 13\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi)}{2\sqrt{m\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(1 + n\,\mathrm{tang}^4\varphi)^3}}$$

für die zu suchende Ableitung:

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{mc\sec\varphi}{2}\Big[\Big(V + 6\sec^2\varphi\,(1 - 2\,n\,\mathrm{tang}^2\varphi - n\,\mathrm{tang}^4\varphi)\Big)\,2\,\mathrm{tang}\,\varphi\,Z - m\sec^2\varphi\,(1 + n\,\mathrm{tang}^4\varphi)^2$$
$$(1 + 13\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi)\,V\Big] : 2Z\sqrt{Z}$$

Da, wie früher gefunden, für $\mathrm{tang}\,\varphi = 1$, $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ wird, so wird für Curve A sein: $V = 0$, $Z = 8\,m$ und $\frac{d^2r}{d\varphi^2} = -6\,c\sqrt{m}$. Da hier der Werth für $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$ negativ ist, so ist der im vorigen § angegebene Werth $r = c\sqrt{m}$ wirklich das Maximum des Vektors.

Daß die beiden andern Curvenarten kein Maximum in der Bedeutung des Wortes haben, ist früher gesagt worden.

Wir gehen

II. zur Prüfung der im Vorhergehenden gefundenen Maximalwerthe von x und y über und setzen, um die § 2, II 1 und 2 für $\frac{dx}{d\varphi}$ und $\frac{dy}{d\varphi}$ gefundenen Gleichungen zu differenziren, der Einfachheit halber

$$m\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(1 + n\,\mathrm{tang}^4\varphi)^3 = Z,\ \sec^2\varphi\,(1 - 3\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi) = U,\ \sec^2\varphi\,(3\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,\mathrm{tang}^5\varphi) = W,$$

so erhalten wir, da $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{cm\,U}{2\sqrt{Z}}$ und $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{cm\,W}{2\sqrt{Z}}$ sind, nach einigen Umformungen:

$$\frac{dU}{d\varphi} = 2\sec^2\varphi\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(1 - 6\,n\,\mathrm{tang}^3\varphi - 9\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{dW}{d\varphi} = \sec^2\varphi\,(3 + 9\,\mathrm{tang}^2\varphi - 5\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi - 7\,n\,\mathrm{tang}^6\varphi)$$

$$\frac{d\sqrt{Z}}{d\varphi} = m\sec^2\varphi\,(1 + n\,\mathrm{tang}^4\varphi)^2(1 + 13\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi) : 2\sqrt{Z} \text{ u. daher wird sein}$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = cm\sec^2\varphi\,(4\,\mathrm{tang}\,\varphi\,MZ - m\,NU) : 4\,Z\sqrt{Z}$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = cm\sec^2\varphi\,(2\,PZ - m\,N\,W) : 4\,Z\sqrt{Z} \text{ worin der Kürze wegen,}$$

$1 - 6\,n\,\mathrm{tang}^2\varphi - 9\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi$ mit M
$(1 + n\,\mathrm{tang}^4\varphi)^2(1 + 13\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi)$ mit N
$3 + 9\,\mathrm{tang}^2\varphi - 5\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi - 7\,n\,\mathrm{tang}^6\varphi$ mit P. bezeichnet worden sind.

Es sei $n = 1$ genommen, so ergiebt sich für Curve A und zwar:

1) für $\mathrm{tang}^4\varphi = \frac{1}{3}$, welcher Werth bekanntlich $\frac{dx}{d\varphi} = 0$ macht,

$$M = -2\left(1 + 3\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right),\quad Z = \left(\tfrac{4}{3}\right)^3 m\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},\quad N = 3\left(\tfrac{4}{3}\right)^4,\ U = 0.$$

Da, wie man sich leicht überzeugen kann, die Substitution dieser Werthe in der Gleichung für $\frac{d^2x}{d\varphi^2}$ ein negatives Resultat liefert, so ist der § 2 für $\mathrm{tang}^4\varphi = \frac{1}{3n}$ gefundene Werth für x wirklich ein Maximum der Abscisse.

2) Für $\mathrm{tang}^4\varphi = 3$, welcher Werth $\frac{dy}{d\varphi} = 0$ macht, erhalten wir

$$P = -12\,(1 + \sqrt{3}),\quad Z = 4^3 m\sqrt[4]{3},\quad N = 10.\,4^3 \text{ und } W = 0.$$

Da diese Werthe für $\frac{d^2y}{d\varphi^2}$ einen negativen Werth liefern, so ist der im vorigen § bei $\mathrm{tang}^4\varphi = 3n$ gefundene Werth für y wirklich ein Maximum der Ordinate.

Anmerkung.

Daß Curve B und C kein Maximum für x und y in dem üblichen Sinne des Wortes haben, wurde schon früher erwähnt.

III. Zum Schlusse dieses § soll die Frage nach der Krümmung unserer Curven hinsichtlich der X Achse erledigt werden.

Wenn eine Curve beim Steigen ihre convexe Seite der X Achse zukehrt, so wächst mit zu nehmendem x auch der Winkel, welchen die auf einander folgenden Tangenten mit dieser Achse bilden. Bezeichnen wir diesen veränderlichen Winkel mit τ so ist

$$\mathrm{tang}\,\tau = \frac{dy}{dx} \text{ oder } \tau = \mathrm{arc\,tang}\,\frac{dy}{dx} = \mathrm{arc\,tang}\,\frac{\mathrm{tang}\,\varphi\,(3 - n\,\mathrm{tang}^4\varphi)}{1 - 3\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi} \quad (\S\ 2,\ \mathrm{II},\ 3.)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{\sec^2\varphi\,[(3 - 5\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi)\,(1 - 3\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi) + 12\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi\,(3 - n\,\mathrm{tang}^4\varphi)]}{(1 - 3\,n\,\mathrm{tang}^4\varphi) + \mathrm{tang}^3\varphi\,(3 - n\,\mathrm{tang}^4\varphi)^2}$$

Der Winkel τ wird nun mit wachsendem φ wachsen, wenn $\frac{d\tau}{d\varphi} > 0$ ist. Da in dem Ausdrucke für $\frac{d\tau}{d\varphi}$ sowohl der Nenner als auch der Faktor $\sec^2\varphi$ positiv sind, so wird

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{d\tau}{d\varphi} > 0, \text{ wenn } (3 - 5\,n \operatorname{tang}^4\varphi)(1 - 3\,n \operatorname{tang}^4\varphi) > -12\,n \operatorname{tang}^4\varphi\,(3 - n \operatorname{tang}^4\varphi),$$

woraus $3 + 22\,n \operatorname{tang}^4\varphi + 3\,n^2 \operatorname{tang}^8\varphi > 0$ folgt, d. h. Curve A kehrt beim Steigen ihre convexe Seite der X Achse zu.

Wenn aber τ mit zunehmendem φ wächst, so muß φ auch einmal einen Werth annehmen, für den $\tau = \frac{\pi}{2}$ wird. Weil ferner die Abscisse nur bis zu einer gewissen Grenze wächst und dann abnimmt, so muß für das Maximum derselben die zugehörige Ordinate eine Tangente an die Curve sein, also $\tau = \frac{\pi}{2}$ werden. Sonach ergiebt sich für den Inflexions-Punkt der Curve A:

$$\frac{\pi}{2} = \text{arc tang}\,\frac{\operatorname{tang}\varphi\,(3 - n \operatorname{tang}^4\varphi)}{1 - 3\,n \operatorname{tang}^4\varphi}, \text{ woraus } \frac{\operatorname{tang}\varphi\,(3 - n \operatorname{tang}^4\varphi)}{1 - 3\,n \operatorname{tang}^4\varphi} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{2} = \infty,$$

also $\operatorname{tang}^4\varphi = \frac{1}{3n}$ folgt. Geben wir dem Ausdrucke:

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi\,3 - n \operatorname{tang}^4\varphi)}{1 - 3\,n \operatorname{tang}^4\varphi} \text{ die Form: } \frac{\frac{1}{n \operatorname{tang}^3\varphi} - \frac{\operatorname{tang}\varphi}{3}}{\frac{1}{3\,n \operatorname{tang}^4\varphi} - 1}, \text{ so wird die Gleichung}$$

$\frac{\operatorname{tang}\varphi\,(3 - n \operatorname{tang}^4\varphi)}{1 - 3\,n \operatorname{tang}^4\varphi} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{2} = \infty$ auch für $\varphi = \frac{}{2}$ erfüllt, d. h. im Mittelpunkte des Systems erhält x ein zweites Maximum, welches aber $= 0$ ist, weil die Abscisse von ihrem ersten Maximum (für $\operatorname{tang}^4\varphi = \frac{1}{3n}$) ab negativ zunimmt. In d. Mittelpunkte d. Systems ist die Y Achse eine Tangente d. Curve.

Anmerkung.

Auch Curve B und C steigen convex gegen die X Achse gerichtet auf.

§ 4. Bestimmung einiger Punkte der Curven durch Rechnung und ihre Zeichnung.

Nehmen wir $m = 4$ und beschränken uns nur auf die Polargleichung,

$$r = \pm c \sec\varphi \sqrt{\frac{m \operatorname{tang}\varphi}{1 + n \operatorname{tang}^4\varphi}}$$

so erhalten wir zur Bestimmung einiger Punkte der drei Curvenarten und zu ihrer Zeichnung folgende Tabellen:

Tafel I Curve A ($n = 1$).

φ	tang φ	$\pm$ r	φ	tang φ	$\pm$ r
0°	0,00	0,00 c	45°	1,00	2,00 c
10°	0,17	0,83 c	50°	1,19	1,95 c
20°	0,36	1,26 c	60°	1,73	1,66 c
30°	0,57	1,85 c	70°	2,74	1,27 c
40°	0,86	1,96 c	80°	5,87	0,83 c

Tafel II Curve B ($n = -1$).

φ	tang φ	$\pm$ r	φ	tang φ	$\pm$ r
0°	0,00	0,00 c	30°	0,57	1,84 c
10°	0,17	0,83 c	40°	0,86	3,63 c
20°	0,36	1,28 c	45°	1,00	∞

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel III Curve C (n = 0).

φ	tang φ	± r	φ	tang φ	± r
0°	0,00	0,00 c	45°	1,00	2,82 c
10°	0,17	0,83 c	50°	1,19	3,39 c
20°	0,36	1,27 c	60°	1,73	5,25 c
30°	0,57	1,73 c	70°	2,74	9,63 c
40°	0,86	2,44 c	80°	5,87	28,86 c

Mit Hilfe der in diesen drei Tafeln für r gefundenen Nährungswerthe lassen sich unsere Curven auf folgende Weise zeichnen.

1. Curve A Fig. 1.

Man beschreibe mit einer willkürlich gewählten und in zwanzig gleiche Theile getheilten Geraden 2 c (Maximum von r) aus dem Anfangspunkte der rechtwinkligen Achsen X und Y als Radius einen Kreis, theile die Peripherie desselben im ersten und vierten Quadranten in Theile von 10 zu 10 Grad ein, verbinde die einzelnen Punkte mit 0 durch Strahlen, verlängere dieselben auch über 0 hinaus und trage auf ihnen von 0 aus die aus Tafel I entnommenen bezüglichen Werthe für r ab, so erhält man durch Verbindung der somit gewonnenen Endpunkte der Vectoren mit einander das Bild der Curve A.

2. Curve B Fig. 2.

Man beschreibe, wie bei der Zeichnung der Curve A, um 0 mit 2 c einen Kreis, theile die Peripherie desselben im ersten und letzten Octanten in Theile von 10 zu 10 Grad ein, verbinde die einzelnen Theilungspunkte mit 0, verlängere diese Verbindungslinien vorwärts und rückwärts soweit, daß man auf ihnen von 0 aus die aus Tafel II entnommenen bezüglichen Werthe für r abtragen kann, so erhält man eine Anzahl Punkte, welche, mit einander verbunden, das Bild der Curve B liefern.

3. Curve C Fig. 3.

Das Bild dieser Curve erhält man, wenn man den ersten und letzten Quadranten in Theile von 10 zu 10 Grad theilt und wie bei Curve B verfährt.

Anmerkung 1.

Der Uebersicht und Kürze wegen wurden die drei Curvenarten nur in den ersten und dritten Quadranten gezeichnet.

Anmerkung 2.

Ähnliche Tabellen, wie für r, lassen sich auch für die Coordinaten x und y aufstellen.

Eine Etatsüberschreitung zu vermeiden, mußte die Figuren-Tafel zurückbleiben und hier abgebrochen werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf