Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck in algebraischer Behandlung.

Der innige Zusammenhang, welcher zwischen der Geometrie und der Arithmetik besteht, welcher sie als Wurzeln eines und desselben Stammes, der Mathematik, erscheinen läfst, kann den Schülern nicht früh genug zum Bewufstsein gebracht werden. Schon in den beiden ersten Jahrgängen des mathematischen Unterrichtes findet sich oft Gelegenheit auf die mannigfachen Berührungspunkte jener beiden scheinbar sehr verschiedenen Unterrichtszweige hinzuweisen. Möglichst bald beginne man mit der Berechnung von Stücken an geradlinigen Figuren und am Kreise. Die Sätze über die Winkelbeziehungen bei geraden Linien, an Dreiecken, Vierecken und am Kreise lassen sich benutzen, um auf elementare Weise aus gegebenen Winkeln andere Winkel zu berechnen, zunächst in Zahlenwerten, später in Buchstabenausdrücken. Durch derartige einfache Rechnungen kann der Schüler oft zu neuen Winkelbeziehungen, zu neuen Lehrsätzen geführt werden.

Schwieriger ist die Berechnung von Strecken und Flächeninhalten aus vorgegebenen Strecken oder Streckenverbindungen. Denn zu derartigen Rechnungen ist in geometrischer Hinsicht die Kenntnis von Proportions- und Flächensätzen, besonders des pythagoräischen Lehrsatzes, erforderlich, ferner mufs sich der Schüler eine gewisse Fertigkeit im Rechnen mit Potenz- und Wurzelausdrücken, sowie im Lösen von Gleichungen der beiden ersten Grade angeeignet haben. Mit der eigentlichen algebraischen Lösung von planimetrischen Aufgaben kann daher nicht früher als in der Obertertia begonnen werden. Es ist aber in hohem Grade zweckmäfsig, bereits auf dieser Stufe einfache Berechnungen von Strecken an ebenen Figuren vorzunehmen, auch wenn dies in den neuen Lehrplänen nicht direkt vorgeschrieben ist. Solche algebraisch-planimetrischen Aufgaben geben nämlich reichlich Gelegenheit zur gründlichen Befestigung und Einübung des Klassenpensums sowohl in der Geometrie wie in der Arithmetik. Sie führen ferner den Schüler in leichter Weise zum Verständnis der Lösung trigonometrischer Aufgaben hinüber und bilden, genau genommen, die Grundlage für stereometrische Berechnungen.

Auch in den oberen Klassen sollte die rein algebraische Behandlung planimetrischer Aufgaben nicht vernachlässigt werden. Denn sie bieten wiederum ein ausgezeichnetes und reichhaltiges Übungsmaterial für die Aufstellung und Lösung von quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, sowie von kubischen und biquadratischen Gleichungen. In zweifelhaften Fällen giebt sodann die algebraische Rechnung ein sicheres Mittel an die Hand zu entscheiden, ob eine irgendwie vorliegende Aufgabe sich durch Konstruktion lösen läfst oder nicht. Nur solche Aufgaben lassen sich nämlich mit Zirkel und Lineal ausführen, welche, algebraisch behandelt, auf lineare oder quadratische Gleichungen führen. Falls die planimetrische Lösung der gestellten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe noch unbekannt sein sollte, so leiten obendrein die Wurzeln ihrer Endgleichungen, wenn sie I. oder II. Grades sind, an, dieselbe ausfindig zu machen. Auch kann man die Grenzen der Konstruierbarkeit (die Determination) auf das Genaueste ermitteln. Von der Konstruktion ausgeschlossen sind alle diejenigen Aufgaben, deren algebraisches Endergebnis eine Gleichung vom dritten oder von einem noch höheren Grade ist, vorausgesetzt, dafs eine Reduktion auf eine quadratische Gleichung unmöglich ist. Immerhin aber sind diejenigen Aufgaben wenigstens algebraisch lösbar, welche auf den dritten oder vierten Grad führen. Gelangt man bei derartigen Untersuchungen zu Gleichungen von noch höheren Graden, so ist dies im allgemeinen ein Zeichen dafür, dafs die Aufgabe völlig unlösbar ist.

Nach diesen Vorbemerkungen mag der Versuch gerechtfertigt erscheinen, durch Kombination solcher Stücke, welche sich im planimetrischen Unterricht eingebürgert haben, möglichst viele geometrische Aufgaben zu bilden, sie auf ihre Lösbarkeit zu prüfen und die Ergebnisse dieser Untersuchung in einer nach den Regeln der Kombinatorik geordneten Sammlung von Aufgaben wiederzugeben. Eine derartige Sammlung würde dem Fachgenossen die Möglichkeit bieten, sich jederzeit leicht über die Verwendbarkeit irgend einer hierher gehörigen Aufgabe für seine Unterrichtszwecke zu orientieren, und ihn zur gelegentlichen Behandlung einer Anzahl ihm neuer Aufgaben anregen. Bei Dreiecken pflegt man aufser den Seiten (a, b, c) und den Winkeln (α, β, γ) die Höhen (h_a, h_b, h_c), die Mitteltransversalen (m_a etc.), die Winkelhalbierungslinien (w_a etc.), den Flächeninhalt J, die Radien des Umkreises, des Inkreises und der Ankreise (r, ϱ, ϱ_a etc.), ferner die auf a durch die zugehörige Höhe, bezw. Winkelhalbierungslinie erzeugten Abschnitte (p, q, bezw. u, v), endlich auch wohl die Höhenabschnitte (die oberen f_a etc., die unteren g_a etc.) für Aufgaben zu benutzen. Hierzu kann man noch Summen, Differenzen, Verhältnisse, Produkte und Quadratsummen oder -differenzen von verwandten Strecken fügen. Für Vierecke etc. liefsen sich die gebräuchlichsten Stücke in ähnlicher Weise festlegen.

Wollte man aus derartigen Stücken eine einigermafsen erschöpfende Aufgabensammlung aufstellen, so würde für dieselbe der Rahmen einer Programmabhandlung bei weitem zu eng sein, auch wenn man sich auf das Dreieck beschränken würde. Um aber wenigstens eine Probe davon zu geben, in welcher Weise man sich eine allgemeinere algebraisch-planimetrische Aufgabensammlung in besagtem Sinne vorzustellen hat, empfahl es sich für den Verfasser die Grenzen seiner Abhandlung auf das gleichschenklige Dreieck einzuengen. Falls dieses Bruchstück bei Liebhabern planimetrischer Schulaufgaben Interesse finden sollte, so würde dies für den Verfasser ein Sporn sein, in der kundgegebenen Weise weiterzuarbeiten und die ihm in der Hauptsache bereits vorliegenden Ergebnisse gelegentlich später zu veröffentlichen.

Es erübrigt noch zu bemerken, dafs hier ein für alle mal der Buchstabe a die Basis des gleichschenkligen Dreiecks bedeuten soll, und dafs sich die Bezeichnungen p, q, u, v auf die durch h_b bezw. w_b erzeugten Abschnitte eines Schenkels b beziehen mögen. An Stelle der Winkel, die sich auch trigonometrisch einführen liefsen, sind hier Verhältnisse von Strecken benutzt. Der Grad der Gleichungen, zu welchen die jeweils vorliegenden Aufgaben gelangen lassen, ist durch beigesetzte römische Ziffern gekennzeichnet. Die auf Gleichungen IV. Grades führenden Aufgaben sind gröfstenteils, die auf noch höhere Grade führenden gänzlich fortgelassen, da sie für den Unterricht belanglos sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1.

Aufgaben mit h_a, h_b, p, q, J.

Formeln:

I. $h_a^2 = \frac{1}{4}(4b^2 - a^2)$; II. $h_b = \frac{a h_a}{b}$; $h_b^2 = \frac{a^2}{4b^2}(4b^2 - a^2)$; III. $a^2 = 2bp = 2b(b-q)$.

IV. $h_b^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2$; V. $16J^2 = a^2(4b^2 - a^2)$.

Gleichschenkliges Dreieck: VI. $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; VII. $J = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck: VIII. $h = \frac{a}{2}$; IX. $a^2 = 2b^2$; X. $J = \frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{2}$.

Aufgaben:

1) Gegeben ist a, b. $h_a = ?$, $p = ?$, $q = ?$, $h_b = ?$, $J = ?$; 2) $a, h_a II^a$*); 3) $b, h_a II^a$;

4) $a, h_b II^a$; 5) $b, h_b II$; 6) $h_a, h_b II^a$; 7) a, pI; 8) $\underbrace{p, q}_{b} II$; 9) $h_a \left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right. II$; 10) h_b, pII^a;

11) a, qII; 12) h_b, qII; 13) a, JII^a; 14) b, JII; 15) h_a, JII^a; 16) h_b, JII; 17) $J, pIII$;
18) J, qII.

Gleichseitiges Dreieck aus:

19) a, $h = ?$, $J = ?$; 20) hII^a; 21) JII^a.

Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck aus:

22) a, $b = ?$, $J = ?$; 23) bII^a; 24) hII^a; 25) JII^a.

§ 2.

Aufgaben mit Verhältnissen von Strecken und zweiten Stücken, wie z. B.

$\frac{a}{b}$, $\frac{h_a}{a}$, $\frac{h_a}{b}$, $\frac{h_b}{a}$, $\frac{h_b}{b}$, $\frac{p}{q}$ und a bezw. b oder h_a, h_b, p, q, J.

Dieselben führen auf I oder II.

§ 3.

Aufgaben mit Summen oder Differenzen von Strecken.

$a \pm b$, $2b \pm a$, $p - q$, $h_b \pm h_a$, $a \pm h_a$, $b \pm h_a$, $a \pm h_b$, $b \pm h_a$.

Formeln:

I. $p - q = \frac{a^2 - b^2}{b}$; II. $(h_b \pm h_a)^2 = \frac{(a \pm b)^2(4b^2 - a^2)}{4b^2}$.

Aufgaben:

$a \pm b$ mit

1) $h_a II$; 2) $h_b IV$; 3) $\left. \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} II$; 4) JIV; 5) $\frac{a}{b} I$; 6) $\frac{h_a}{a} II$.

$2b \pm a$ mit

7) $h_a II^a$; 8) $h_b III$; 9) $\left. \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} II$; 10) $JIII$; 11) $\frac{a}{b} I$; 12) $\frac{h_a}{a} II$.

*) II^a bedeutet rein quadratisch, ebenso wie III^a rein kubisch.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$p - q$ mit

13) $a\,II$; 14) $h_a\,II$; 15) $h_b\,II$; 16) $J\,IV$; 17) $a \pm b\,I$; 18) $2b \pm a\,II$.

$h_b \pm h_a$ mit

19) $a\,IV$; 20) $b\,IV$; 21) $p\,IV$; 22) $\frac{a}{b}\,II^a$; 23) $a \pm b\,II$; 24) $2b \pm a\,III$.

$a \pm h_a$ mit

25) $b\,II$; 26) $J\,II$; 27) $\frac{a}{b}\,II^a$; 28) $a \pm b\,II$; 29) $2b \pm a\,II$.

$b \pm h_a$ mit

30) $a\,I$; 31) $h_b\,III$; 32) $a \pm b\,II$; 33) $\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} II$; 34) $2b \pm a\,II$; 35) $p - q\,II$.

$a \pm h_b$ mit

36) $b\,IV$; 37) $p\,II^a$; 38) $\frac{h_a}{a}\,II$; 39) $b \pm h_a\,II$.

$b \pm h_b$ mit

40) $a\,IV$; 41) $p\,II$; 42) $q\,II^a$; 43) $J\,II$; 44) $\frac{h_a}{a}$.

Gleichseitiges Dreieck aus:

45) $a \pm h$.

Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck aus:

46) $a \pm b\,II^a$; 47) $a \pm h\,II^a$; 48) $b \pm h\,II^a$.

§ 4.

Aufgaben mit Produkten und Quadratsummen von Strecken.

Formeln:

$$\text{I. } pq = \frac{a^2(2b^2 - a^2)}{4b^2}; \quad \text{II. } p^2 + q^2 = \frac{a^4 - 2a^2b^2 + 2b^4}{2b^2}; \quad \text{III. } p^2 - q^2 = a^2 - b^2;$$

$$\text{IV. } h_a h_b = \frac{4J^2}{ab} = \frac{a(4b^2 - a^2)}{4b}; \quad \text{V. } h_b^2 \pm h_a^2 = \frac{4J^2(a^2 \pm b^2)}{a^2b^2} = \frac{(a^2 \pm b^2)(4b^2 - a^2)}{4b^2}.$$

Aufgaben:

ab mit

1) $h_a\,II$; 2) $h_b\,III$; 3) $p\,III^a$; 4) $q\,IV$; 5) $J\,II^a$; 6) $\frac{a}{b}\,II^a$; 7) $\frac{h_a}{a}\,II^a$; 8) $a \pm b\,II$; 9) $2b \pm a\,II$; 10) $b \pm h_a\,III$.

$a^2 \pm b^2$ mit

11) $h_a\,II^a$; 12) $h_b\,II$; 13) $\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} II$; 14) $J\,II$; 15) $\frac{a}{b}\,II^a$; 16) $\frac{h_a}{a}\,II^a$; 17) $a \pm b\,II$; 18) $2b \pm a\,II$; 19) $p - q \left\{\begin{matrix} II \\ II^a \end{matrix}\right.$; 20) $a \pm h_a\,II$; 21) $b \pm h_a\,II$; 22) $ab\,II$.

pq mit

23) $a\,II^a$; 24) $b\,II$; 25) $h_a\,II$; 26) $h_b\,II^a$; 27) $J\,III$; 28) $\frac{a}{b}\,II^a$; 29) $a \pm b\,IV$; 30) $p - q\,II$; 31) $ab\,III$; 32) $a^2 \pm b^2\,II$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$p^2 + q^2$ mit

33) $a\,II$; 34) $b\,II$; 35) $h_a\,II$; 36) $h_b\,II$; 37) $J\,IV$; 38) $\frac{a}{b}\,II^a$; 39) $p - q\,II$;
40) $a^2 \pm b^2\,II$; 41) $pq\,II$.

$p^2 - q^2$ s. Aufgaben mit $a^2 - b^2$.

$h_a h_b$ mit

42) $a\,II$; 43) $b\,III$; 44) $p\,III$; 45) $J\,II^a$; 46) $\frac{a}{b}\,II^a$; 47) $a \pm b\,III$; 48) $2b \pm a\,II$;
49) $h_b \pm h_a\,II$; 50) $ab\,II^a$; 51) $a^2 \pm b^2\,III$; 52) $pq\,III$; 53) $p^2 - q^2\,III$.

$h_b^2 \pm h_a^2$ mit

54) $a\,II$; 55) $b\,II$; 56) $p\,II$; 57) $q\,II$; 58) $J\,III$; 59) $\frac{a}{b}\,II^a$; 60) $2b \pm a\,III$; 61) $p - q\,II$;
62) $h_b \pm h_a\,II$; 63) $a^2 \pm b^2\,II^a$; 64) $a^2 \mp b^2\,IV$; 65) $pq\,II$; 66) $p^2 \pm q^2\,II$; 67) $h_a h_b\,II$;
68) $a \pm b \begin{cases} IV \\ III \end{cases}$.

§ 5.

Aufgaben mit m_a, m_b, $\frac{m_a}{m_b}$, $m_a m_b$, $m_a^2 \pm m_a^2$.

Formeln:

I. $m_a = h_a$; II. $4m_b^2 = 2a^2 + b^2$; III. $\left(\frac{m_a}{m_b}\right)^2 = \frac{4b^2 - a^2}{b^2 + 2a^2}$; IV. $16 m_a^2 m_b^2 = -2a^4 + 7a^2b^2 + 4b^4$;

V. $4(m_a^2 + m_b^2) = a^2 + 5b^2$; VI. $m_b^2 - m_a^2 = \frac{3}{4}(a^2 - b^2)$.

Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck: VI. $m_b = \frac{b}{2}\sqrt{5}$.

Aufgaben:

m_b mit

1) $a\,II^a$; 2) $b\,II^a$; 3) $h_a\,II^a$; 4) $h_b\,II$; 5) $\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\}\,II$; 6) $J\,II$; 7) $\frac{a}{b}\,II^a$; 8) $\frac{h_a}{a}\,II^a$; 9) $\frac{p}{q}\,II$;
10) $a \pm b\,II$; 11) $2b \pm a\,II$; 12) $p - q\,II$; 13) $h_b \pm h_a\,IV$; 14) $ab\,II$; 15) $a^2 \pm b^2\,II^a$;
16) $a \pm h_a\,II$; 17) $b \pm h_a\,II$; 18) $pq\,II$; 19) $p^2 \pm q^2\,II$; 20) $h_a h_b\,III$; 21) $h_b^2 \pm h_a^2\,II$.

$m_b \pm m_a$ mit

22) $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\}\,II$; 23) $\frac{a}{b}\,II$; 24) $a \pm b\,II$; 25) $p - q\,II$; 26) $a^2 \pm b^2\,II$; 27) $p^2 - q^2\,II$.

$m_a m_b$ mit

28) $a\,II$; 29) $b\,II$; 30) $h_a\,II$; 31) $h_b\,III$; 32) $J\,II$; 33) $\frac{a}{b}\,II$; 34) $\frac{p}{q}\,II$; 35) $2b \pm a\,III$;
36) $ab\,II$; 37) $a^2 \pm b^2\,II$; 38) $h_b^2 \pm h_a^2\,III$.

$m_b^2 + m_a^2$ mit zweiten Stücken vgl. m_b,
$m_b^2 - m_a^2$ „ „ „ „ Aufgaben mit $a^2 - b^2$.

Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck:

39) m_b.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 6.

Aufgaben mit u, v, $u-v$, uv, u^2+v^2, u^2-v^2, w_b.

Formeln:

$$\text{I. } u=\frac{ab}{a+b},\quad v=\frac{b^2}{a+b};\quad \text{II. } u-v=\frac{b(a-b)}{a+b};\quad uv=\frac{ab^3}{(a+b)^2},\quad u^2+v^2=\frac{b^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2},$$

$$u^2-v^2=\frac{b^2(a-b)}{a+b};\quad \text{III. } w_a=h_a,\quad w_b^2=\frac{a^2b(2b+a)}{(a+b)^2}.$$

Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck:

$$\text{IV. } u=b(2-\sqrt{2})=a(\sqrt{2}-1),\quad v=b(\sqrt{2}-1)=\frac{a}{b}(2-\sqrt{2});$$

$$\text{V. } u-v=b(3-2\sqrt{2})=\frac{a}{2}(3\sqrt{2}-4),\quad u^2+v^2=3b^2(3-2\sqrt{2}),\quad u^2-v^2=b^2(3-2\sqrt{2}),$$

$$\text{VI. } w_b^2=2b^2(2-\sqrt{2})=a^2(2-\sqrt{2}).$$

Aufgaben:

$\left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\}$ mit

1) $a\,I$; 2) $\left.\begin{matrix}b\\u\end{matrix}\right\}I$; 3) $p\left\{\begin{matrix}II\\III\end{matrix}\right.$; 4) $\frac{a}{b}\,I$; 5) $\frac{h_a}{a}\,II$; 6) $a\pm b\,II$; 7) $2b\pm a\,II$; 8) $p-q\,III$;

9) $ab\left\{\begin{matrix}II\\III\end{matrix}\right.$; 10) $\left.\begin{matrix}v\\u\end{matrix}\right\}I$; 11) $b+h_a\left\{\begin{matrix}III\\IV\end{matrix}\right.$.

$u-v$ mit

12) $a\,II$; 13) $b\,I$; 14) $p\,III$; 15) $\frac{a}{b}\,I$; 16) $a\pm b\left\{\begin{matrix}II\\I\end{matrix}\right.$; 17) $2b\pm a\,II$; 18) $p-q\,II$;

19) $ab\,III$; 20) $a^2-b^2\,III$.

uv mit

21) $a\,III$; 22) $b\,II$; 23) $\frac{a}{b}\,II$; 24) $ab\,II^a$.

u^2+v^2 mit

25) $a\,IV$; 26) $b\,II$; 27) $\frac{a}{b}\,II$; 28) $ab\,III$; 29) $a^2+b^2\,II$.

u^2-v^2 mit

30) $a\,III$; 31) $b\,I$; 32) $h_a\,III$; 33) $\frac{a}{b}\,II^a$; 34) $a\pm b\left\{\begin{matrix}III\\II\end{matrix}\right.$; 35) $2b\pm a\,III$;

36) $h_b-h_a\,II$; 37) $ab\,II$; 38) $a^2+b^2\,III$; 39) $a^2-b^2\,II^a$; 40) $p^2-q^2\,II^a$; 41) $m_b\,III$;

42) $m_a^2+m_b^2\,III$; 43) $m_b^2-m_a^2\,II^a$.

$\frac{u}{v}$ mit zweiten Stücken vgl. Aufgaben mit $\frac{a}{b}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

w_b mit

44) $a\,II$; 45) $b\,III$; 46) $h_a\,III$; 47) $h_b\,III$; 48) $\frac{a}{b}\,II^a$; 49) $a \pm b\,IV$; 50) $2b + a\,III$; 51) $2b - a\,IV$; 52) $ab\,II$; 53) $m_b\,IV$; 54) $u\,I$; 55) $v\,III$; 56) $u - v\,III$; 57) $w_a\,III$; 58) $uv\,II$; 59) $u^2 \pm v^2\,III$.

Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck aus:

60) $\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} II^a$; 61) $u - v\,II^a$; 62) $uv\,II^a$; 63) $n^2 \pm v^2\,II^a$; 64) $w_b\,II^a$.

§ 7.

Aufgaben mit $f_a, f_b, g_a, g_b, f_b \pm f_a, f_a f_b, f_b^2 \pm f_a^2$.

Formeln:

I. $f_a^2 = \frac{(2b^2 - a^2)^2}{4b^2 - a^2}$, $f_b^2 = \frac{a^2 b^2}{4b^2 - a^2}$; II. $(f_b + f_a)^2 = (a+b)^2 \frac{2b - a}{2b + a}$, $(f_b - f_a)^2 = (a-b)^2 \frac{2b + a}{2b - a}$;

III. $f_a \cdot f_b = \frac{ab(2b^2 - a^2)}{4b^2 - a^2}$, $\frac{f_a}{f_b} = \frac{2b^2 - a^2}{ab}$; IV. $f_b^2 + f_a^2 = \frac{a^4 - 3a^2 b^2 + 4b^4}{4b^2 - a^2}$, $f_b^2 - f_a^2 = a^2 - b^2$;

V. $g_a^2 = \frac{a^4}{4(4b^2 - a^2)} = \frac{a^4}{16h^2}$, $g_b^2 = \frac{a^2(2b^2 - a^2)^2}{4b^2(4b^2 - a^2)}$.

Aufgaben:

f_a mit

1) $a\,II$; 2) $b\,II$; 3) $h_a\,II$; 4) $h_b\,III$; 5) $p\,III$; 6) $q\,II$; 7) $J\,IV$; 8) $\frac{a}{b}\,II$; 9) $a \pm b\,IV$; 10) $2b \pm a\,IV$; 11) $ab\,IV$; 12) $p - q\,III$; 13) $a^2 \pm b^2\,II$; 14) $pq\,II$; 15) $p^2 + q^2\,III$; 16) $p^2 - q^2\,II$; 17) $h_b^2 \pm h_a^2\,III$; 18) $m_b\,II$.

f_b mit

19) $a\,II^a$; 20) $b\,II^a$; 21) $h_a\,II$; 22) $h_b\,II$; 23) $p\,II$; 24) $q\,III$; 25) $J\,III$; 26) $\frac{a}{b}\,II$; 27) $a \pm b\,IV$; 28) $2b \pm a\,IV$; 29) $ab\,II$; 30) $pq\,II$; 31) $a^2 \pm b^2\,II$; 32) $p^2 + q^2\,III$; 33) $p^2 - q^2\,II$; 34) $h_b^2 \pm h_a^2\,III$; 35) $m_b\,II$; 36) $u\,II$; 37) $\left.\begin{matrix} v \\ u - v \end{matrix}\right\} IV$; 38) $uv\,III$; 39) $w_b\,III$; 40) $f_a\,II$.

$f_b \pm f_a$ mit

41) $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} III$; 42) $h_a\,II^a$; 43) $h_b\,II$; 44) $J\,II$; 45) $\frac{a}{b}\,II^a$; 46) $a \pm b \left\{\begin{matrix} II^a \\ III \end{matrix}\right.$; 47) $2b \pm a\,II$ od. III; 48) $p - q\,III$; 49) $h_b \pm h_a\,II$; 50) $ab\,III$; 51) $a^2 + b^2\,III$; 52) $a^2 - b^2\,II$; 53) $h_a h_b\,III$; 54) $h_b^2 - h_a^2\,III$ od. IV; 55) $m_b\,III$; 56) $u - v \left\{\begin{matrix} V \\ III \end{matrix}\right.$; 57) $u^2 - v^2 \left\{\begin{matrix} IV \\ III \end{matrix}\right.$.

$\frac{f_a}{f_b}$ S. Aufgaben mit $\frac{a}{b}\,II$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$f_a f_b$ mit

58) $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} III$; 59) $\frac{a}{b} II^a$; 60) $ab\, II^a$; 61) $pq\, III$; 62) $h_a h_b\, II$; 63) $J\, III$.

$f_b^2 + f_a^2$ mit

64) $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} II$; 65) $h_a\, II$; 66) $h_b\, III$; 67) $\begin{matrix} p \\ q \end{matrix} III$; 68) $\frac{a}{b} II^a$; 69) $p - q\, III$; 70) $a^2 \pm b^2\, II$;
71) $pq\, III$; 72) $p^2 + q^2\, III$; 73) $h_b^2 \pm h_a^2\, III$; 74) $m_b\, II$; 75) $m_b^2 \pm m_a^2\, II$.

$f_b^2 - f_a^2$ S. Aufgaben mit $a^2 - b^2$.

g_a mit

76) $a\, II^a$; 77) $b\, II$; 78) $h_a\, II^a$; 79) $h_b\, II$; 80) $p\, II^a$; 81) $q\, III$; 82) $J\, III^a$; 83) $\frac{a}{b} II$;
84) $p - q\, III$; 85) $ab\, III$; 86) $a^2 \pm b^2\, II$; 87) $pq\, II$; 88) $p^2 \pm q^2\, III$; 89) $p^2 - q^2\, II$;
90) $h_b^2 \pm h_a^2\, III$; 91) $m_b\, II$; 92) $m_b^2 + m_a^2\, II$; 93) $f_a\, II^a$; 94) $f_b\, II^a$; 95) $f_b \pm f_a\, II$;
96) $f_a f_b\, III$; 97) $f_b^2 \pm f_a^2\, II$.

g_b mit

98) $a\, II$; 99) $b\, III$; 100) $h_a\, III$; 101) $h_b\, II^a$; 102) $p\, II$; 103) $q\, II^a$; 104) $\frac{a}{b} II$;
105) $p - q\, III$; 106) $a^2 \pm b^2\, III$; 107) $h_b \pm h_a\, III$; 108) $pq\, II^a$; 109) $p^2 \pm q^2\, III$;
110) $h_b^2 \pm h_a^2\, III$; 111) $m_b\, III$; 112) $f_a\, II^a$; 113) $f_b\, II$; 114) $f_b \pm f_a\, III$; 115) $f_a f_b\, III$;
116) $f_b^2 \pm f_a^2\, III$; 117) $g_a\, II$.

Gleichseitiges Dreieck aus:

118) $f_a\, II^a$; 119) $g_a\, II^a$.

§ 8.

Aufgaben mit r, $\frac{a}{r}$, $h_a \pm r$.

Formeln:

$$\text{I. } r = \frac{b^2}{2h_a}; \quad \text{II. } r^2 = \frac{b^4}{4b^2 - a^2}; \quad \text{III. } \frac{a}{r} = \frac{2h_b}{b};$$

$$\text{IV. } (h_a + r)^2 = \frac{(6b^2 - a^2)^2}{4(4b^2 - a^2)}, \quad (h_a - r)^2 = \frac{(2b^2 - a^2)^2}{4(4b^2 - a^2)} = \frac{f_a^2}{4}.$$

Gleichseitiges Dreieck: $r = \frac{2}{3} h = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

Aufgaben:

r mit

1) $a\, II$; 2) $b\, II^a$; 3) $h_a\, II^a$; 4) $p\, III$; 5) $J\, IV$; 6) $h_b\, III$; 7) $\frac{a}{b} II^a$; 8) $\frac{h_a}{a} II$;
9) $a \pm b\, IV$; 10) $2b \pm a\, IV$; 11) $p - q\, III$; 12) $h_b \pm h_a\, III$; 13) $ab\, III$; 14) $a^2 \pm b^2\, II$;
15) $a \pm h_a\, II$; 16) $b \pm h_a\, II$; 17) $pq\, III$; 18) $p^2 + q^2\, III$; 19) $p^2 - q^2\, II$; 20) $h_b^2 \pm h_a^2\, III$;
21) $m_b\, II$; 22) $u\, IV$; 23) $v\, II$; 24) $u - v\, IV$; 25) $uv\, III$; 26) $u^2 + v^2\, IV$; 27) $u^2 - v^2\, III$;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

28) $w_b V$; 29) $f_a II^a$; 30) $f_b II^a$; 31) $f_b \pm f_a II$; 32) $f_a f_b III$; 33) $f_b^2 + f_a^2 II$; 34) $g_a II$; 35) $g_b III$.

$\frac{a}{r} = \frac{2h_b}{b}$ führt mit zweiten Stücken auf I oder II.

$h_a \pm r$ mit

36) $a II$; 37) $b II$; 38) $h_b III$; 39) $m_b II$; 40) $p - q III$; 41) $a^2 \pm b^2 II$; 42) $h_b^2 \pm h_a^2 III$; 43) $f_a II^a$; 44) $f_b II$; 45) $f_b \pm f_a II$; 46) $f_b^2 \pm f_a^2 II$; 47) $g_a II$; 48) $g_b \begin{cases} III \\ II \end{cases}$.

Gleichseitiges Dreieck aus:

49) r; 50) $a \pm r$; 51) $h \pm r$.

§ 9.

Aufgaben mit ϱ, ϱ_a, $\varrho_a \pm \varrho$, $h_a \pm \varrho$, $h_a \pm \varrho_a$ etc.

Formeln:

I. $\varrho = \frac{a(2b-a)}{4h_a}$; $\qquad \varrho^2 = \frac{a^2(2b-a)}{4(2b+a)}$;

$\varrho_a = \frac{a(2b+a)}{4h_a}$; $\qquad \varrho_a^2 = \frac{a^2(2b+a)}{4(2b-a)}$;

$\varrho_b = \varrho_c = h_a$.

II. $\varrho_a + \varrho = \frac{ab}{h_a} = \frac{a^2}{h_b}$; $\qquad (\varrho_a + \varrho)^2 = \frac{4a^2b^2}{4b^2 - a^2}$;

$\varrho_a - \varrho = \frac{a^2}{2h_a}$; $\qquad (\varrho_a - \varrho)^2 = \frac{a^4}{4b^2 - a^2}$;

$\frac{\varrho_a}{\varrho} = \frac{2b+a}{2b-a}$; $\qquad \varrho_a \cdot \varrho = \frac{a^2}{4}$;

$\varrho_a^2 + \varrho^2 = \frac{a^2(4b^2 + a^2)}{2(4b^2 - a^2)}$; $\qquad \varrho_a^2 - \varrho^2 = \frac{2a^3b}{4b^2 - a^2}$.

III. $h_a - \varrho = \frac{b(2b-a)}{2h_a} = \frac{a(2b-a)}{2h_b}$; $\qquad (h_a - \varrho)^2 = \frac{b^2(2b-a)}{2b+a}$;

$h_a + \varrho_a = \frac{b(2b+a)}{2h_a} = \frac{a(2b+a)}{2h_b}$; $\qquad (h_a + \varrho_a)^2 = \frac{b^2(2b+a)}{2b-a}$;

$h_a + \varrho = \frac{-a^2 + ab + 2b^2}{2h_a}$; $\qquad (h_a + \varrho)^2 = \frac{(-a^2 + ab + 2b^2)^2}{4b^2 - a^2}$;

$\varrho_a - h_a = \frac{a^2 + ab - 2b^2}{2h_a}$; $\qquad (\varrho_a - h_a)^2 = \frac{(a^2 + ab - 2b^2)^2}{4b^2 - a^2}$;

$\frac{h_a}{\varrho} = \frac{2b+a}{a}$; $\qquad \frac{h_a}{\varrho_a} = \frac{2b-a}{a}$;

$h_a \varrho = \frac{a(2b-a)}{4}$; $\qquad h_a \varrho_a = \frac{a(2b+a)}{4}$;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$h_a^2 + \varrho^2 = \frac{(a^2 + 2ab + 2b^2)(2b - a)}{2(2b + a)}; \qquad h_a^2 - \varrho^2 = \frac{(b^2 + ab)(2b - a)}{2b + a};$$

$$h_a^2 + \varrho_a^2 = \frac{(a^2 - 2ab + 2b^2)(2b + a)}{2(2b - a)}; \qquad \varrho_a^2 - h_a^2 = \frac{(ab - b^2)(2b + a)}{2b - a};$$

IV. e*) $= \frac{b(b-a)}{2h_a}$; $\qquad e^2 = \frac{b^2(b-a)^2}{4b^2 - a^2}$;

e_a*) $= \frac{b(b+a)}{2h_a}$; $\qquad e_a^2 = \frac{b^2(b+a)^2}{4b^2 - a^2}$;

Gleichseitiges Dreieck: $\varrho = \frac{1}{3}h = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, $\varrho_a = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck: $\varrho = \frac{2b-a}{2}$, $\varrho_a = \frac{2b+a}{2}$.

Aufgaben:

ϱ bezw. ϱ_a mit

1) aI; 2) $bIII$; 3) $h_a II$; 4) $h_b II$; 5) $pIII$; 6) $JIII$; 7) $\frac{a}{b}II^a$; 8) $\frac{p}{q}II$;
9) $a \pm bIII$; 10) $2b \pm aIII$; 11) $2b \mp aII$; 12) $h_b \pm h_a II$; 13) $abII$; 14) $a^2 \pm b^2 III$;
15) $b \pm h_a III$; 16) $pqIII$; 17) $h_a h_b II$; 18) $h_b^2 \pm h_a^2 IV$; 19) $m_b III$; 20) $m_b^2 \pm m_a^2 III$;
21) $uIII$; 22) $w_b \left\{\begin{matrix} III \\ II \end{matrix}\right.$; 23) rII; 24) $h_a \pm rII$; 25) $\left.\begin{matrix} \varrho_a \\ \varrho \end{matrix}\right\} II^a$; 26) $f_a II$; 27) $f_b I$;
28) $f_b \pm f_a \left\{\begin{matrix} I \\ II \end{matrix}\right.$; 29) $f_a f_b III$; 30) $\left.\begin{matrix} g_a \\ g_b \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} I \\ II \end{matrix}\right.$.

$\varrho_a + \varrho$ bezw. $\varrho_a - \varrho$ mit

31) aII^a; 32) $b \left\{\begin{matrix} II^a \\ II \end{matrix}\right.$; 33) $h_a \left\{\begin{matrix} II \\ II^a \end{matrix}\right.$; 34) $h_b \begin{matrix} II^a \\ II \end{matrix}$; 35) $p \left\{\begin{matrix} II \\ II^a \end{matrix}\right.$; 36) $qIII$; 37) $J \left\{\begin{matrix} III \\ III^a \end{matrix}\right.$;
38) $\frac{a}{b}II$; 39) $a \pm bIV$; 40) $ab \left\{\begin{matrix} II \\ III \end{matrix}\right.$; 41) $a^2 \pm b^2 II$; 42) $a \pm h_a \left\{\begin{matrix} IV \\ II \end{matrix}\right.$; 43) $b \pm h_a \left\{\begin{matrix} III \\ II^a \end{matrix}\right.$;
44) $h_b \pm h_a III$; 45) $a + h_b \left\{\begin{matrix} II \\ III \end{matrix}\right.$; 46) $b + h_b \left\{\begin{matrix} III \\ V \end{matrix}\right.$; 47) $pqII$; 48) $p^2 + q^2 III$;
49) $h_b^2 \pm h_a^2 III$; 50) $m_b II$; 51) $m_b^2 \pm m_a^2 II$; 52) $u \left\{\begin{matrix} II \\ IV \end{matrix}\right.$; 53) $w_b \left\{\begin{matrix} III \\ IV \end{matrix}\right.$; 54) $f_a II$;
55) $f_b \left\{\begin{matrix} — \\ II^a \end{matrix}\right.$; 56) $f_b \pm f_a II$; 57) $f_a f_b II$; 58) $f_a^2 \pm f_b^2 II$; 59) $g_a \left\{\begin{matrix} II^a \\ — \end{matrix}\right.$; 60) $g_b II$;
61) rII^a; 62) $h_a \pm rII$; 63) $b + rII$.

N.B. $\varrho_a + \varrho = 2f_b$ und $\varrho_a - \varrho = 2g_a$.

$h_a + \varrho_a$ bezw. $h_a - \varrho$ mit

64) $aIII$; 65) bII^a; 66) $h_b II$; 67) $\frac{a}{b}II$; 68) $a \pm bIII$; 69) $2b \pm a \left\{\begin{matrix} II \\ III \end{matrix}\right.$;
70) $h_b \pm h_a II$; 71) $abII$; 72) $a^2 \pm b^2 III$; 73) $h_a h_b III$; 74) $m_b III$; 75) $uIII$; 76) $u - vIII$;
77) $uvIII$; 78) $u^2 \pm v^2 III$; 79) $w_b \left\{\begin{matrix} III \\ IV \end{matrix}\right.$; 80) $f_a II^a$; 81) $f_b II^a$; 82) $g_a II^a$; 83) $g_b II^a$;

*) e bezw. e_a ist die Entfernung des Mittelpunktes des ϱ- bezw. ϱ_a-Kreises von dem Mittelpunkte des r-Kreises.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

84) $f_b \pm f_a II^a$; 85) $f_a f_b III$; 86) $f_b^2 + f_a^2 IV$; 87) $r II^a$; 88) $h_a \pm r II$; 89) $\left.\begin{matrix}\varrho\\ \varrho_a\end{matrix}\right\} II$;
90) $\varrho_a \pm \varrho II$.

$h_a - \varrho_a$ bezw. $h_a + \varrho$ mit

91) $\left.\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\} IV$; 92) $h_b III$; 93) $f_a II$; 94) $f_b II$; 95) $f_b \pm f_a II$; 96) $g_a II$; 97) $g_b III$; 98) $r II$;
99) $\left.\begin{matrix}\varrho_a\\ \varrho\end{matrix}\right\} II$; 100) $\varrho_a \pm \varrho II$; 101) $\left.\begin{matrix}h_a + \varrho\\ h_a - \varrho_a\end{matrix}\right\} II$.

$\frac{h_a}{\varrho}$ bezw. $\frac{h_a}{\varrho_a}$. S. Aufgaben mit $\frac{a}{b}$.

$h_a \varrho_a$ bezw. $h_a \varrho$ mit

102) $a I$; 103) $b II$; 104) $h_b II$; 105) $p III$; 106) $J I$; 107) $a \pm b II$; 108) $2b \pm a \left\{\begin{matrix}I\\ II\end{matrix}\right.$;
109) $p - q IV$; 110) $h_b \pm h_a III$; 111) $ab I$; 112) $a^2 \pm b^2 II$; 113) $pq III$; 114) $p^2 - q^2 II$;
115) $h_a h_b I$; 116) $h_b^2 \pm h_a^2 III$; 117) $m_b II$; 118) $m_b^2 \pm m_a^2 II$; 119) $u III$; 120) $uv III$;
121) $u^2 - v^2 III$; 122) $w_b \left\{\begin{matrix}II\\ III\end{matrix}\right.$; 123) $f_a IV$; 124) $f_b III$; 125) $f_b \pm f_a \left\{\begin{matrix}III\\ II\end{matrix}\right.$; 126) $f_a f_b III$;
127) $f_b^2 - f_a^2 II$; 128) $g_a III$; 129) $r IV$.

$h_a^2 \pm \varrho^2$ bezw. $h_a^2 \pm \varrho_a^2$ mit

130) $a III$; 131) $b \left\{\begin{matrix}II\\ III\end{matrix}\right.$; 132) $a \pm b \left\{\begin{matrix}II\\ III\end{matrix}\right.$; 133) $2b \pm a \left\{\begin{matrix}II\\ III\end{matrix}\right.$; 134) $h_b \pm h_a \left\{\begin{matrix}III\\ IV\end{matrix}\right.$;
135) $ab \left\{\begin{matrix}II\\ III\end{matrix}\right.$; 136) $a^2 \pm b^2 \left\{\begin{matrix}II\\ III\end{matrix}\right.$; 137) $h_a h_b III$; 138) $h_b^2 \pm h_a^2 \left\{\begin{matrix}III\\ IV\end{matrix}\right.$; 139) $m_b III$;
140) $m_b^2 \pm m_a^2 \left\{\begin{matrix}III\\ II\end{matrix}\right.$; 141) $u - v \left\{\begin{matrix}V\\ III\end{matrix}\right.$; 142) $u^2 - v^2 \left\{\begin{matrix}II\\ IV\end{matrix}\right.$; 143) $w_b \left\{\begin{matrix}III\\ IV\end{matrix}\right.$; 144) $f_b \left\{\begin{matrix}III\\ IV\end{matrix}\right.$;
145) $f_b \pm f_a \left\{\begin{matrix}II\\ III\end{matrix}\right.$; 146) $f_a f_b \left\{\begin{matrix}III\\ IV\end{matrix}\right.$; 147) $r \left\{\begin{matrix}III\\ IV\end{matrix}\right.$.

e bezw. e_a mit

148) $b II$; 149) $a \pm b \left\{\begin{matrix}II\\ IV\end{matrix}\right.$; 150) $ab III$; 151) $a^2 - b^2 III$; 152) $u - v \left\{\begin{matrix}II\\ IV\end{matrix}\right.$;
153) $u^2 - v^2 \left\{\begin{matrix}II\\ III\end{matrix}\right.$; 154) $f_a II$; 155) $f_b II$; 156) $f_b \pm f_a II$; 157) $f_a f_b III$; 158) $g_a II$;
159) $g_b III$; 160) $r II$; 161) $h_a \pm r II$; 162) ϱII; 163) $\varrho_a II$; 164) $\varrho_a \pm \varrho II$; 165) $\varrho_a^2 - \varrho^2 III$;
166) $h_a \pm \varrho II$; 167) $\varrho_a \pm h_a II$; 168) $h_a^2 - \varrho^2 \left\{\begin{matrix}II\\ III\end{matrix}\right.$.

Gleichseitiges Dreieck aus:

169) ϱ; 170) ϱ_a; 171) $\varrho_a \pm \varrho$.

Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck aus:

172) ϱ; 173) ϱ_a; 174) $\varrho_a \pm \varrho$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tabellen zur Berechnung gleichschenkliger Dreiecke.

I.

a	6	8	10	24	16	30	14	48	24	70	238
b	5	5	13	13	17	17	25	25	37	37	169
h_a	4	3	12	5	15	8	24	7	35	12	120
h_b	$\frac{24}{5}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{120}{13}$	$\frac{120}{13}$	$\frac{240}{17}$	$\frac{240}{17}$	$\frac{336}{25}$	$\frac{336}{25}$	$\frac{840}{37}$	$\frac{840}{37}$	$\frac{28560}{169}$
p	$\frac{18}{5}$	$\frac{32}{5}$	$\frac{50}{13}$	$\frac{288}{13}$	$\frac{128}{17}$	$\frac{450}{17}$	$\frac{98}{25}$	$\frac{1152}{25}$	$\frac{288}{37}$	$\frac{2450}{37}$	
q	$\frac{7}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{119}{13}$	$-\frac{119}{13}$	$\frac{161}{17}$	$-\frac{161}{17}$	$\frac{527}{25}$	$-\frac{527}{25}$	$\frac{1081}{37}$	$-\frac{1081}{37}$	
J	12	12	60	60	120	120	168	168	420	420	14280
u	$\frac{30}{11}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{130}{23}$	$\frac{312}{37}$	$\frac{272}{33}$	$\frac{510}{47}$	$\frac{350}{39}$	$\frac{1200}{73}$	$\frac{888}{61}$	$\frac{2590}{107}$	
v	$\frac{25}{11}$	$\frac{25}{13}$	$\frac{169}{23}$	$\frac{169}{37}$	$\frac{289}{33}$	$\frac{289}{47}$	$\frac{625}{39}$	$\frac{625}{73}$	$\frac{1369}{61}$	$\frac{1369}{107}$	
w_b	$\frac{24}{11}\sqrt{5}$	$\frac{24}{13}\sqrt{10}$	$\frac{60}{23}\sqrt{13}$	$\frac{120}{37}\sqrt{26}$	$\frac{80}{33}\sqrt{34}$	$\frac{240}{47}\sqrt{17}$	$\frac{560}{39}$	$\frac{1680\sqrt{2}}{73}$	$\frac{168\sqrt{74}}{61}$	$\frac{840\sqrt{37}}{107}$	$\frac{74256}{407}$
f_a	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{119}{12}$	$-\frac{119}{5}$	$\frac{161}{15}$	$-\frac{161}{8}$	$\frac{527}{24}$	$-\frac{527}{7}$	$\frac{1081}{35}$	$-\frac{1081}{12}$	
f_b	$\frac{15}{4}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{65}{12}$	$\frac{156}{5}$	$\frac{136}{15}$	$\frac{255}{8}$	$\frac{175}{24}$	$\frac{600}{7}$	$\frac{444}{35}$	$\frac{1295}{12}$	
r	$\frac{25}{8}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{169}{24}$	$\frac{169}{10}$	$\frac{289}{30}$	$\frac{289}{16}$	$\frac{625}{48}$	$\frac{625}{14}$	$\frac{1369}{70}$	$\frac{1369}{24}$	
ϱ	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{60}{7}$	$\frac{35}{6}$	
ϱ_a	6	12	$\frac{15}{2}$	60	$\frac{40}{3}$	60	$\frac{28}{3}$	168	$\frac{84}{5}$	210	

II.

a	12	8	20	12	16	36	20	40	84	56
b	14	14	46	34	62	158	98	34	62	82
m_b	11	9	27	19	33	83	51	33	67	57
m_a^2	160	180	2016	1120	3780	24640	9504	756	2080	5940

Dr. August Otte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf