Anwendung des Princips der conformen Abbildung auf ein Problem der Elasticität.

Bei der grossen Bedeutung, welche die Probleme des elastischen Gleichgewichts isotroper Körper für die technischen Wissenschaften besitzen, muss es bedauert werden, dass sich den dabei auftretenden Differentialgleichungen nicht allgemein genügen lässt. Der Techniker muss sich daher oft bei einschlägigen Untersuchungen auf rein empirische Thatsachen stützen, wenn er sich bei seinen Berechnungen nicht unzutreffende Beschränkungen auferlegen will. Von den drei verschiedenen Deformationszuständen, welche in einem elastischen Körper einzeln oder nebeneinander bestehen können, ist für rein analytische Behandlung die Biegung der schwierigere, die Torsion nächst der blossen Ausdehnung der einfachere Fall. Die genauere Kenntnis der durch die Torsion bedingten Erscheinungen wurde besonders durch St. Venaut*) gefördert. Indem er von eigentümlichen Gesichtspunkten ausging, hat er die innern Gleichgewichtsbedingungen für eine Reihe von Cylindern und Prismen von besonderer Querschnittsform kennen gelehrt. Dabei waren seine Arbeiten berufen, manche irrige Vorstellung über die Art der Verzerrungen zu berichtigen. St. Venaut hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass eine einfache Drillung nicht bloss eine Verschiebung der einzelnen Querschnitte gegen einander zur Folge hat, sondern dass diese von Haus aus ebenen Normalschnitte in Flächen von antiklastischer Krümmung umgebogen werden, sofern der Basis des Cylinders eine andere als die Kreisgestalt zu eigen ist. Die grössten Verbiegungen treten keineswegs an den Stellen auf, die der Axe am fernsten liegen. Hieraus entspringt der für die Praxis wertvolle Schluss, dass vorspringende Ecken den Widerstand gegen eine Torsion durchaus nicht zu vergrössern vermögen. Die Verdienste um die Entwickelung dieser Theorie finden durch zwei hervorragende Physiker, Thomson u. Tait**), in folgenden Bemerkungen ihre Würdigung. „Diese Theorie verdanken wir St. Venaut, der nicht nur die Falschheit der von mehreren früheren Schriftstellern gemachten Voraussetzung, dass das Coulomb'sche Gesetz auch für andere Prismenformen als für volle oder hohle Cylinder von kreisförmiger Basis gelte, nachwies, sondern auch die Natur der erfor-

*) De St. Venaut: De la Torsion des prismes avec des Considérations sur leur flexion. — Mémoires des Savants Étrangers (1855).

**) Thomson u Tait, Handbuch der theoret. Physik (Natural Philosophy), übers. von Helmholtz und Wertheim.

derten Korrektion vollständig entdeckte, die Bestimmung derselben auf ein Problem der reinen Mathematik zurückführte, die Lösung für eine grosse Menge wichtiger und merkwürdiger Fälle ausarbeitete, die Resultate in einer dem Physiker genügenden und interessanten Weise mit der Beobachtung verglich und Schlüsse von grossem praktischen Werte für den Ingenieur zog". Von ihm selbst ist der Fall der Torsion für ein Prisma mit quadratischem Querschnitt behandelt. Aus der transcendenten Lösung hat er mit grossem Geschick diejenigen Antworten herauszulesen verstanden, die für die allgemeine Frage von grösserer Wichtigkeit sind. Im Folgenden soll derselben Aufgabe eine Behandlung zu Grunde gelegt werden, die sich bei anderen Disciplinen der mathematischen Physik vielfach als höchst nützlich erwiesen hat — das Princip der conformen Abbildung.

Für einen Kreiscylinder bietet die Lösung des vorliegenden Problems keine besondere Schwierigkeit. Da man nun die Koordinatenbeziehung kennt, die das Quadrat zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich auf den Kreis überträgt, so liegt der Gedanke nahe, diese Transformation hier zu verwerten.

Die äusseren Bedingungen für die einfache Drillung kann man sich nun derart gegeben denken:

Die quadratische, gerade Säule sei mit der einen Endfläche festgelegt, während an der anderen ein Kräftepaar als drehend wirksam gedacht wird, dessen Komponenten in der Fläche selbst liegen. Das Prisma erfahre also in seiner Längsrichtung keinen Zug. Die seitliche Oberfläche sei frei von Kräften; auch von der Wirkung der Schwere werde abstrahiert.

Bei einem beliebigen Prisma bedingen diesen Zustand nach Clebsch*) folgende Gleichungen, wobei die Bezeichnungen die dort niedergelegten Bedeutungen besitzen sollen. Die kleinen Verschiebungen u; v; w, die irgend ein Punkt mit den Koordinaten x; y; z in der Richtung der Axen erfährt, werden durch die Formeln bestimmt

$$\left.\begin{aligned} u &= \quad b z \left(y + \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_0\right) \\ v &= - b z \left(x - \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0\right) \\ w &= \quad b \left(B - x \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_0 - y \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0\right) \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I}$$

Das am freien Ende thätige Drehungsmoment ergibt sich aus:

$$\left.\begin{aligned} t_{13} &= \quad \frac{E b}{2(1+\mu)} \left(y + \frac{\partial B}{\partial x}\right) \\ t_{23} &= - \frac{E b}{2(1+\mu)} \left(x - \frac{\partial B}{\partial y}\right) \\ t_{33} &= \quad 0 \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{II}$$

*) Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper.

Ueber die Konstante b kann willkürlich verfügt werden; von ihrer Bestimmung hängt sowohl die Intensität der drehenden Kraft als auch die Grösse der Verschiebungen ab; beide sind ihr direkt proportional. Bei Anwendungen tritt meist der umgekehrte Fall ein. Es sind die Kräfte gegeben und es wird nach den durch sie hervorgerufenen Deformationen gefragt. Die freie Verfügung, die wir über b besitzen, erlaubt uns indessen, die Wahl so zu treffen, dass mit dem vorliegenden Problem entweder vollständige Uebereinstimmung erzielt oder demselben doch annähernd entsprochen wird. Die Funktion B muss auf dem ganzen Querschnitt der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III}$$

Genüge leisten, und am Rande muss der nach der Normale genommene Differentialquotient die Bedingung erfüllen

$$\frac{\partial B}{\partial n} = x \,.\, \sin p - y \,.\, \cos p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV}$$

Mit Beiziehung von IV wird die Gleichung $\triangle B = 0$, wie Clebsch gezeigt hat, eindeutig bestimmt. Nun lässt sich aber die Integration derselben nicht allgemein ausführen, die Aufsuchung der Funktion B hat vielmehr für jede individuelle Querschnittsform besonders zu geschehen. Allein schon die einfachsten geometrischen Formen bieten der Rechnung erhebliche Mühe und Schwierigkeit, und es ist daher bis jetzt bei wenigen gelungen, dieselbe vollständig durchzuführen. Für den Kreiscylinder wird die Lösung ganz allgemein dadurch ermöglicht, dass nach Einführung von Kreiskoordinaten die Fourier'sche Reihenentwickelung vorgenommen wird. Da die konforme Beziehung zwischen Kreis und Quadrat die Gleichung $\triangle B = 0$ ungeändert lässt, scheint es angebracht, die bestimmenden Elemente des Quadrats auf den Kreis zu übertragen und auch hier jene Entwicklung zu versuchen.

Herr Schwarz*) hat gezeigt, dass die Funktion komplexen Arguments

$$\zeta = \operatorname{sa} z \quad (k = i) \quad ; \quad z = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^4}}$$

Quadrat und Kreis zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich auf einander abbildet. Schwerpunkt und die durch denselben gelegten Axenkreuze entsprechen sich gegenseitig. Den Ecken des Rechtecks K; iK; — K; — iK sind die Punkte des Einheitskreises 1; i; — 1; — i zugeordnet. Die weiteren Beziehungen folgen in einfacher Weise aus folgenden analytischen Entwickelungen, die als ein specieller Fall derjenigen betrachtet werden können, welche Herr Holzmüller**) für die Sinusamplitude-Curven gegeben hat.

*) Schwarz, über einige Abbildungsaufgaben. — Crelle's Journal Bd. 70.

**) Holzmüller, Theorie der isogonalen Verwandtschaften.

Setzen wir

$$\zeta = \xi + \eta i \quad \text{und} \quad z = x + y i ,$$

so wird die abbildende Funktion mit Rücksicht auf einen bekannten Satz der Funktionentheorie

$$\xi \pm \eta i = \mathrm{sa}\,(x \pm y i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{V}$$

Mit Hülfe des Additionstheorems erhält man hieraus

$$\xi \pm \eta i = \frac{\mathrm{sa}\,x \,.\, \mathrm{ca}\,yi \,.\, \mathrm{da}\,yi \pm \mathrm{sa}\,yi \,.\, \mathrm{ca}\,x \,.\, \mathrm{da}\,x}{1 + \mathrm{sa}^2 x \,.\, \mathrm{sa}^2 yi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{VI}$$

ξ und η sondern sich und erscheinen in ihrer Abhängigkeit von x und y, wenn man die conjugierten Werte der Gl. VI addiert und subtrahiert

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\mathrm{sa}\,x \,.\, \mathrm{ca}\,yi \,.\, \mathrm{da}\,yi}{1 + \mathrm{sa}^2 x \,.\, \mathrm{sa}^2 yi} \\ \eta &= -i\,\frac{\mathrm{sa}\,yi \,.\, \mathrm{ca}\,x \,.\, \mathrm{da}\,x}{1 + \mathrm{sa}^2 x \,.\, \mathrm{sa}^2 yi} \end{aligned}\right\}$$

An Stelle des imaginären Arguments kann man rein reelles einführen. Die elliptischen Funktionen transformieren sich dann in solche mit dem reciproken Modul. Dies ist aber insofern hier ohne Bedeutung als $1 : i = -i$, und doch nur das Quadrat des Moduls in Betracht kommt. Mit Rücksicht auf diese Erwägung lässt sich setzen $\mathrm{sa}\,yi = i\,\mathrm{sa}\,y$; $\mathrm{ca}\,yi = \mathrm{da}\,y$; $\mathrm{da}\,yi = \mathrm{ca}\,y$. Die Koordinaten der ζ-Ebene erscheinen jetzt in vollständig symmetrischer Form.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\mathrm{sa}\,x \,.\, \mathrm{ca}\,y \,.\, \mathrm{da}\,y}{1 - \mathrm{sa}^2 x \,.\, \mathrm{sa}^2 y} \\ \eta &= \frac{\mathrm{sa}\,y \,.\, \mathrm{ca}\,x \,.\, \mathrm{da}\,x}{1 - \mathrm{sa}^2 x \,.\, \mathrm{sa}^2 y} \end{aligned}\right\} \mathrm{VII}$$

Vertauscht man x mit y, so geht auch ξ in η über; $x = \pm y$ ergibt auch $\xi = \pm \eta$. Den Geraden des Quadrats, welche das Koordinatenkreuz halbieren, entsprechen also im Kreise wiederum Gerade von der nämlichen Eigenschaft.

Gl. VI liefert ferner

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\mathrm{sa}^2 x + \mathrm{sa}^2 y}{1 - \mathrm{sa}^2 x \,.\, \mathrm{sa}^2 y}$$

Für $\xi^2 + \eta^2 = 1$ ermittelt man $x = \pm (K - y)$. Der Einheitskreis bildet sich also ab als Umfang eines Quadrats, dessen halbe Diagonale $= K$ ist. Die Ecken erscheinen im Bilde als singuläre Stellen; in ihnen geht die Conformität verloren.

Benützt man die Gl. VII zur Trennung von x und y, so kommt man zu den Relationen

$$\left.\begin{aligned}\left(\xi^2+\eta^2\right)^2 + \xi^2\,\frac{\mathrm{ca}^2\,x\,.\,\mathrm{da}^2\,x}{\mathrm{sa}^2\,x} - 4\,\eta^2\,\frac{\mathrm{sa}^2\,x}{\mathrm{ca}^2\,x\,.\,\mathrm{da}^2\,x} - 1 = 0\\ \left(\xi^2+\eta^2\right)^2 + \eta^2\,\frac{\mathrm{ca}^2\,y\,.\,\mathrm{da}^2\,y}{\mathrm{sa}^2\,y} - 4\,\xi^2\,\frac{\mathrm{sa}^2\,y}{\mathrm{ca}^2\,y\,.\,\mathrm{da}^2\,y} - 1 = 0\end{aligned}\right\}\quad \text{VIII}$$

Diese Curven 4. Grades gestatten die eindeutige Übertragung der Geometrie der z Ebene in die ζ-Ebene. Legt man den x bezgl. y konstante Wertfolgen bei, so erhält man die Linien, die den Parallelen zu den Diagonalen entsprechen. Die beiden Scharen durchsetzen sich orthogonal. Unter ihnen befindet sich je eine Lemniskate, die zu den Geraden $x = \pm\,{}^1/_2\,K$; $y = \pm\,{}^1/_2\,K$ gehören. Für diesen Wert des Arguments wird nämlich $\mathrm{ca}\,x\,.\,\mathrm{da}\,x : \mathrm{sa}\,x = \sqrt{2}$, so dass die Gl. VIII die Form gewinnen

$$\left.\begin{aligned}\left((\eta+1)^2+\xi^2\right)\left((\eta-1)^2+\xi^2\right) = 2\\ \left((\xi+1)^2+\eta^2\right)\left((\xi\quad 1)^2+\eta^2\right) = 2\end{aligned}\right\}$$

oder in Polarkoordinaten

$$\left.\begin{aligned}\varrho^4 - 2\,\varrho^2\cos 2\,\vartheta = 1\\ \varrho^4 + 2\,\varrho^2\cos 2\,\vartheta = 1\end{aligned}\right\}$$

Die beiden Lemniskaten schneiden sich auf dem Einheitskreis und treffen die Axen in den Punkten $\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$; $\pm\sqrt{-1+\sqrt{2}}$; ihre Brennpunkte haben sie an den Stellen ± 1. Von ziemlicher Einfachheit sind auch noch die Linien, die den Geraden $x = \pm\,{}^1/_4\,K$; $y = \pm\,{}^1/_4\,K$; $x = \pm\,{}^3/_4\,K$; $y = \pm\,{}^3/_4\,K$ entsprechen. Dabei handelt es sich darum, den Wert von $(\mathrm{ca}\,x\,.\,\mathrm{da}\,x : \mathrm{sa}\,x)$ für diese Argumente zu bestimmen. Zu diesem Zweck benutzt man die von Durège*) (§ 58 seines Lehrbuchs) gegebene Relation

$$\frac{\mathrm{ca}\,\tfrac{1}{2}\,(u+K)\,.\,\mathrm{da}\,\tfrac{1}{2}\,(u+K)}{\mathrm{sa}\,\tfrac{1}{2}\,(u+K)} = k'\sqrt{\frac{1-\mathrm{sa}\,u}{1+\mathrm{sa}\,u}}$$

Setzen wir hier $u = {}^1/_2\,K$, so kommt

$$\left(\frac{\mathrm{ca}\,\tfrac{3}{4}\,K\,.\,\mathrm{da}\,\tfrac{3}{4}\,K}{\mathrm{sa}\,\tfrac{3}{4}\,K}\right)^2 = (k')^2\,\frac{1-\mathrm{sa}\,{}^1/_2\,K}{1+\mathrm{sa}\,{}^1/_2\,K}$$

$$= 2\,\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}-1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}+1}$$

Wird weiter u durch $-\,{}^1/_2\,K$ ersetzt, so ermittelt man den Ausdruck für $\mathrm{ca}\,{}^1/_2\,K\,.\,\mathrm{da}\,{}^1/_4\,K : \mathrm{sa}\,{}^1/_4\,K$ von ähnlicher Form.

*) Durège, Theorie der elliptischen Functionen.

Die Einführung von Polarkoordinaten in die Gl. VIII lässt ihre reciproke Gestalt ungeändert und gibt daher die Möglichkeit, ϱ für einen beliebigen Winkel ϑ mittels quadratischer Gleichung zu bestimmen. In beistehender Tabelle ist die Rechnung für einige Fälle in einer für die Zeichnung hinreichenden Genauigkeit durchgeführt. Berücksichtigt man noch, dass die beiden Curvenscharen sich gegenseitig rechtwinkelig, den Einheitskreis aber unter 45° schneiden, so bietet die Konstruktion des Bildes keine Schwierigkeit weiter.

ϑ	0°	5°	10°	12¼°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	77¾°	80°	85°	90°
$\frac{1}{4}$ K	1,113	1,094	1,038	1,00	0,95	0,844	0,74	0,647			0,466			0,38			0,34				0,324
$\frac{1}{2}$ K	1,55	1,54	1,52		1,48	1,42	1,35	1,27	1,18	1,09	1,00	0,91	0,84	0,78	0,74	0,70	0,67		0,66	0,65	0,64
$\frac{3}{4}$ K	3,04							2,64	2,491	2,328	2,148	1,954	1,752	1,55	1,355	1,185	1,055	1,00	0,965	0,914	0,898

Von gleichem Interesse sind die Curven, welche den Parallelen zu den Seiten des Quadrates entsprechen. Sie werden genau so wie die Diagonalcurven erhalten, wenn man das Axenkreuz um 45° dreht. Die abbildende Funktion wird demnach

$$\mathrm{sa}\left(z\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) = \mathrm{sa}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1+i)\,z\right)$$

Nun gibt die Landen'sche Transformation die Beziehung

$$\mathrm{sa}\,(1+i)\,u,\ (\mathrm{mod}\ i) = \frac{\mathrm{sa}\,v\ .\ \mathrm{ca}\,v}{\mathrm{da}\,v}\ (\mathrm{mod.}\ \sqrt{2})\ ^{*)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1+i)\,\frac{\mathrm{sa}\,w\ .\ \mathrm{da}\,w}{\mathrm{ca}\,w}\ (\mathrm{mod.}\ \sqrt{\tfrac{1}{2}})\ ,$$

wobei die Argumente in dieser Abhängigkeit stehen:

$$2\,u = v\ ;\quad \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,v = w\ ;\quad \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,u = \tfrac{w}{2}$$

Wir erhalten

$$\mathrm{sa}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1+i)\,z\right),\ (\mathrm{mod.}\ i) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1+i)\,\frac{\mathrm{sa}\,\tfrac{1}{2}z\ .\ \mathrm{da}\,\tfrac{1}{2}z}{\mathrm{ca}\,\tfrac{1}{2}z}\ ,\ (\mathrm{mod.}\ \sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1+i)\,\sqrt{\frac{1-\mathrm{ca}\,z}{1+\mathrm{ca}\,z}}\ ,\ (\mathrm{mod.}\ \sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

Der eingetauschte Modul bedingt auch eine Änderung der Periode K, ohne indessen der Gestalt des Querschnitts Eintrag zu thun. Führen wir die Transformation $\sqrt{\frac{1-\mathrm{ca}\,z}{1+\mathrm{ca}\,z}}$ durch, so brauchen wir die daraus hervorgehenden Curven nur um $\frac{\pi}{4}$, im entgegengesetzten Sinne wie oben, zu drehen, um in den Besitz der gewünschten Darstellung zu gelangen.

*) Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen. II. Th. pg 88.

Zwischen den Koordinaten bestehen nun ziemlich einfache Beziehungen

$$\xi = \frac{\mathrm{sa}\,x \,.\, \mathrm{da}\,y}{1 + \mathrm{ca}\,x \,.\, \mathrm{ca}\,y} \quad ; \quad \eta = \frac{\mathrm{sa}\,y \,.\, \mathrm{da}\,x}{1 + \mathrm{ca}\,x \,.\, \mathrm{ca}\,y}$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{\xi}{\eta} = \frac{\mathrm{sa}\,y \,.\, \mathrm{da}\,x}{\mathrm{sa}\,x \,.\, \mathrm{da}\,y} = \frac{\mathrm{ca}\,(K - y)}{\mathrm{ca}\,(K - x)}$$

Eliminiert man wieder zwischen x und y, so folgt

$$\left.\begin{aligned} (\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\,\xi^2 \frac{1}{\mathrm{sa}^2\,x} - 2\,\eta^2 \frac{1}{\mathrm{da}^2\,x} &= 0 \\ (\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\,\eta^2 \frac{1}{\mathrm{sa}^2\,y} - 2\,\xi^2 \frac{1}{\mathrm{da}^2\,y} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{IX}$$

Legen wir hier den x resp. y konstante Wertfolgen bei, so erhalten wir diejenigen Linien, die den Geraden im Quadrate entsprechen, welche mit den Seiten parallel laufen. x oder y = K erzeugt den Einheitskreis selbst; derselbe gehört sowohl der einen wie der andern Schar an.

In Polarkoordinaten lauten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho^4 - 2\,\varrho^2 \left\{ \frac{2\cos^2\vartheta}{\mathrm{sa}^2\,x} + \frac{\sin^2\vartheta}{\mathrm{da}^2\,x} - 1 \right\} + 1 &= 0 \\ \varrho^4 - 2\,\varrho^2 \left\{ \frac{2\sin^2\vartheta}{\mathrm{sa}^2\,y} + \frac{\cos^2\vartheta}{\mathrm{da}^2\,y} - 1 \right\} + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{IV a}$$

Will man dieselben nun auf die den Gl. VIII zu Grunde liegenden Axen beziehen, so ersetzt man ϑ durch $\vartheta - \frac{\pi}{4}$, wodurch eine Rückdrehung des Systems um 45^0 herbeigeführt wird. Es kommt dann

$$\left.\begin{aligned} (\varrho^2 + 1)^2\,\mathrm{sa}^2\,x \,.\, \mathrm{da}^2\,x - 2\,\varrho^2\,(1 + \sin 2\,\vartheta \,.\, \mathrm{ca}^2\,x) &= 0 \\ (\varrho^2 + 1)^2\,\mathrm{sa}^2\,y \,.\, \mathrm{da}^2\,y - 2\,\varrho^2\,(1 - \sin 2\,\vartheta \,.\, \mathrm{ca}^2\,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{X}$$

x = a bedeutet jetzt die Gerade, welche die Abscissenaxe in der Entfernung a unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ trifft, deren Gleichung also ist: x — y = a. Für die Amplitude a = $^1/_2$K lassen sich die Funktionswerte unmittelbar bestimmen; für a = $^1/_4$K benutzt man die Relation

$$\mathrm{sa}^2\,a = \frac{1 - \mathrm{ca}\,2a}{1 + \mathrm{da}\,2a}$$

Auf die angedeutete Art gelangt man bei der Berechnung der elliptischen Funktionen für die Argumentwerte $^1/_4$K und $^3/_4$K viel rascher zum Ziel, als wenn man die Jacobi'schen Faktorenfolgen oder die Reihenentwickelung zu Hülfe nimmt. Um sich ein Bild von den Curven zu entwerfen, kann man wieder, wie in beistehender Tabelle, für einen beliebigen Winkel ϑ die zugehörigen Werte von ϱ berechnen und umgekehrt. Schon die äussere Gestalt der Gl. X zeigt, dass die Linien symmetrisch liegen zu den Geraden, welche die Axenwinkel halbieren.

ϑ	45^0	60^0 30^0	75^0 15^0	90^0 0^0	$93^0\ 4'$ $-3^0\ 4'$	$102^1/_4{}^0$ $-12^3/_4{}^0$	105^0 -15^0	$116^0\ 52'$ $-26^0\ 52'$	
ϱ_1	0,232 4,313	0,240 4,167	0,267 3,738	0,327 3,054			0,466 2,147	1	für $^1/_4$ K
ϱ_2	0,466 2,148	0,475 2,079	0,531 1,883	0,64 1,55		1			für $^1/_2$ K
ϱ_3	0,711 1,405	0,727 1,376	0,776 1,289	0,898 1,113	1				für $^3/_4$ K

In der Figur ist mit Absicht der Diagonale des Quadrats die ihr gegenüber der Einheit für den Modul i zukommende Grösse $2\ K = 2\ \frac{\Pi\frac{1}{4} \cdot \Pi(-\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})} = 2{,}622$ gegeben. Man gewinnt so durch die blosse Anschauung ein Bild von dem Vergrösserungsverhältnis in den beiden Ebenen.

Die Curven X sind Orthogonalscharen, wie sich schon aus der Form der Gleichungen erkennen lässt. Da der Einheitskreis zu ihnen gehört, wird auch dieser rechtwinkelig getroffen. Auf der Peripherie desselben fallen die an die Curven gelegten Tangenten mit der Normale und Tangente des Kreises zusammen. Die Normale des Quadrats bildet sich ab wieder als Normale gegen den Kreis; für tang p, das längs der Seiten des Quadrats den konstanten Wert ± 1 besitzt, tritt hier die gleichmässig Variable tang ϑ ein. Als Ausnahmepunkte sind zu betrachten die Stellen ξ bezgl. $\eta = \pm 1$, durch die kein regelrechter Curvenzweig geht; sie entsprechen den Ecken im Rechteck, in welchen wegen der daselbst auftretenden Sprünge keine bestimmte Normale vorhanden ist.

Die Linien X (mod $\sqrt{1/2}$) sind die isogonalen Trajektorien zu 45^0 der Curven VIII (modi). Die beiden Scharen sind identisch mit den Cosin. ampl. Curven (mod. $\sqrt{\frac{1}{2}}$) und ihren Trajektorien, für welche sich eine Zeichnung bei Holzmüller findet. Es ist nämlich

$$\text{sa z, i} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ \frac{\text{sa u, } \sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\text{da u, } \sqrt{\tfrac{1}{2}}} = \text{ca (K} - \text{u), } \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,$$

wobei $u = z\sqrt{\frac{1}{2}}$ gesetzt ist. Weiter mag noch hinzugefügt werden, dass die von Jochmann*) zum Zwecke der Abbildung des Rechtecks auf die Kreisfläche gebrauchte Transformationsformel mit der hier abgeleiteten übereinstimmt, denn es ist unmittelbar $\sqrt{\frac{1 - \text{ca z}}{1 + \text{ca z}}} = \frac{1 - \text{ca z}}{\text{sa z}}$. Es finden daher alle von Jochmann a. g. O. angestellten Untersuchungen hier ihre Anwendung.

Ist so die eindeutige, conforme Verwandtschaft zwischen den beiden Ebenen festgelegt, so entsteht nunmehr die Aufgabe, die Koordinaten des Quadrates durch die Korrelate

*) Jochmann: Zur Abbildung des Rechtecks auf die Kreisfläche. Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 14.

der Kreisfläche auszudrücken. Zu dem Behufe wählen wir die Gl. VIII, führen Polarkoordinaten ein und setzen abkürzungsweise

$$\frac{ca^2\,x\,.\,da^2\,x}{sa^2\,x} = \frac{1}{sa^2\,x} - sa^2\,x = u;\quad \frac{ca^2\,y\,.\,da^2\,y}{sa^2\,y} = \frac{1}{sa^2\,y} - sa^2\,y = v$$

Mit diesen Änderungen lauten dieselben

$$\left.\begin{aligned} \varrho^4 + u\,\varrho^2\cos^2\vartheta - \tfrac{1}{u}\,4\,\varrho^2\sin^2\vartheta - 1 = 0 \\ \varrho^4 + v\,\varrho^2\sin^2\vartheta - \tfrac{1}{v}\,4\,\varrho^2\cos^2\vartheta - 1 = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{XI}$$

Ihre symmetrische Gestalt ermöglicht es, diese Gleichungen, welche in Bezug auf sa x und sa y vom 8. Grade sind, nach diesen Grössen aufzulösen.

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1 - \varrho^4 \pm \sqrt{(1-\varrho^4)^2 + 16\,\varrho^4\sin^2\vartheta\,.\,\cos^2\vartheta}}{2\,\varrho^2\cos^2\vartheta} \\ v &= \frac{1 - \varrho^4 \pm \sqrt{(1-\varrho^4)^2 + 16\,\varrho^4\sin^2\vartheta\,.\,\cos^2\vartheta}}{2\,\varrho^2\sin^2\vartheta} \end{aligned}\right\}\ \text{XII}$$

Aus der Definition

$$\frac{1}{sa^2\,x} - sa^2\,x = u \text{ folgt}$$

$$\frac{1}{sa^2\,x} + sa^2\,x = \sqrt{u^2+4},$$

wobei die Wurzel mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen ist, da die linke Seite als Summe zweier Quadrate von reellen Grössen nur eine positive Zahl ergeben kann.

Die Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$sa\,x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+4} - u}{2}}\ ;\quad sa\,y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{v^2+4} - v}{2}}\ \ldots\ \text{XII}_a$$

Der Radikand ist stets positiv, weil $u < \sqrt{u^2+4}$ ist; x und y nehmen daher nur reelle Werte an. Ferner folgt aus dem unpaaren Verhalten der Funktion sin. ampl., dass für positive Werte des Arguments nur die positive, für negative nur die entsprechende Wurzel gilt.

Für den Rand des Querschnitts ($\varrho = 1$) erhält man aus XII

$$u_r = \pm\,2\,\mathrm{tg}\,\vartheta\ ;\quad v_r = \pm\,2\,\mathrm{cotg}\,\vartheta$$

Der Index r mag darauf hinweisen, dass diese Formeln nur an der Begrenzung Gültigkeit haben. — Die neu eingeführte Funktion u ist derartig zu bestimmen, dass sie für alle zulässigen Werte von x positiv bleibt, für $x = \pm K$ ihren kleinsten Wert 0 annimmt und mit abnehmenden x positiv über alle Grenzen wächst. Diese Betrachtung gilt nicht nur für das Innere des Bereiches, sondern auch noch für die ganze Begrenzung; tg ϑ darf daher nur Schwankungen zwischen 0 und $+\infty$ unterliegen, alle negativen Werte sind ausgeschlossen. All den Bedingungen wird genügt, wenn man setzt

$u = +2\,\mathrm{tg}\,\vartheta$ im I. und III. Quadranten

$u = -2\,\mathrm{tg}\,\vartheta$ im II. und IV. Quadranten.

Die Änderungen an den Ecken erfolgen dann, wie es die Funktion erfordert, ohne Sprünge, und ferner zeigt die Identität $\operatorname{cotg}\vartheta = -\operatorname{tg}\left(\frac{n\pi}{2} + \vartheta\right)$, dass u und v wechselseitig stetig in einander übergehen, sobald der Winkel ein beliebiges Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ überschreitet.

Beschränken wir uns zunächst auf spitze Winkel, so lauten die Gleich. XII_a nach Einstellung der Werte für u und v

$$\operatorname{sa} x = \sqrt{\frac{1 - \sin\vartheta}{\cos\vartheta}} \; ; \quad \operatorname{sa} y = \sqrt{\frac{1 - \cos\vartheta}{\sin\vartheta}} \; ;$$

woraus durch Umkehrung folgt

$$x_r = -\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin 2\vartheta}} \; ; \qquad y_r = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin 2\vartheta}} \quad . \; . \; . \quad XIII$$

Die Integralgrenzen werden sich später noch weiter rechtfertigen; für jetzt genügt es zu beachten, dass für $x_r = 0$ wird $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, für $y_r = 0$ zugleich $\vartheta = 0$, weil sich ja die Axen gegenseitig entsprechen.

Das Resultat der Transformation ist also an der Umgrenzung wieder ein lemniskatisches Integral wie jenes der komplexen Veränderlichen.

Die Relationen XIII erfüllen die Gleichung der Grenzlinien $x_r + y_r = K$, denn das vollständige Integral lautet

$$K = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin 2\vartheta}}$$

Die Integrale der Formeln XIII können durch trigonometrische Reihen dargestellt werden. Durch Umsetzen der goniometrischen in die Exponentialfunktion erhält man

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin 2\vartheta}} = \sqrt{\frac{2}{i}}\,\frac{e^{\vartheta i}\,d\vartheta}{\sqrt{1 - e^{4\vartheta i}}}$$

$$= \sqrt{2i}\,\frac{e^{-\vartheta i}}{\sqrt{1 - e^{-4\vartheta i}}}$$

Wendet man für beide Fälle den binomischen Lehrsatz an und bezeichnet mit $\left(-\frac{1}{2}\right)_n$ den n^{ten} Koeffizienten der Entwickelung zur Potenz $\left(-\frac{1}{2}\right)$, so folgt

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin 2\vartheta}} = \sqrt{\frac{2}{i}}\,d\vartheta \sum_0^\infty \left(-1\right)^n \left(-\tfrac{1}{2}\right)_n e^{(4n+1)\vartheta i}$$

$$\sqrt{2i}\,d\vartheta \sum_0^\infty \left(-1\right)^n \left(-\tfrac{1}{2}\right)_n e^{-(4n+1)\vartheta i}$$

Beide Reihen gestatten die Integration. Es wird

$$\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin 2\vartheta}} = -\sqrt{2i} \sum_0^\infty \left(-1\right)^n \left(-\tfrac{1}{2}\right)_n \frac{e^{(4n+1)\vartheta i}}{4n+1}$$

$$i \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin 2\vartheta}} = -\sqrt{2i} \sum_0^\infty \left(-1\right)^n \left(-\tfrac{1}{2}\right)_n \frac{e^{-(4n+1)\vartheta i}}{4n+1}$$

Durch Addition und Subtraktion der beiden Reihen ergeben sich die Entwickelungen

$$\left.\begin{aligned} y_r &= \tfrac{1}{2} \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin 2\vartheta}} = \sum_0^\infty \left(-1\right)^n \left(-\tfrac{1}{2}\right)_n \frac{\sin(4n+1)\vartheta}{4n+1} \\ x_r &= -\tfrac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin 2\vartheta}} = \sum_0^\infty \left(-1\right)^n \left(-\tfrac{1}{2}\right)_n \frac{\cos(4n+1)\vartheta}{4n+1} \end{aligned}\right\} \text{XIV}$$

Die Integralgrenzen entnehmen ihre Berechtigung aus dem Verhalten der Reihen. Denkt man sich nun durch diese die Integrale erst bestimmt, so bemerkt man, dass die oben gemachte Beschränkung aufgehoben werden darf. Die Sinus- wie die Cosinusreihe stellen die Koordinaten auch noch dar für Winkel, die grösser sind als $\frac{\pi}{2}$; sie besitzen alle Erfordernisse, um der Funktion längs der ganzen Begrenzung zu genügen. Die Reihen ersetzen sich in jedem nächsten Quadranten gegenseitig und unterliegen an jeder Stelle nur stetigen Änderungen. Überdies erkennt man, dass den x und y durch das Argument ϑ auch noch die Vorzeichen vorgeschrieben werden. Die gewonnene Darstellung ist daher eindeutig und allgemeingültig. Dieselbe setzt uns instand, die Aufsuchung der Funktion B, welche durch die Formeln III und IV definiert ist, erfolgreich in Angriff zu nehmen.

Der Sprünge wegen, welche die Normale an den Ecken des Quadrats erleidet, ist Gl. IV in vier Bestandteile zu zerlegen. Für Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist im vorliegenden Falle $\sin p = \cos p = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; in jedem folgenden Quadranten muss auf die besonderen Vorzeichen Rücksicht genommen werden. Demzufolge erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial n} &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(x - y) \text{ im I. Quadr.} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(x + y) \text{ im II. Quadr.} \\ &= -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(x - y) \text{ im III. Quadr.} \\ &= -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(x + y) \text{ im IV. Quadr.} \end{aligned}$$

Führt man in diese Formeln die entsprechenden Randgleichungen ein, so gewinnen sie diese Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial n} &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(K - 2y) \text{ im I. Quadr.} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(2y - K) \text{ im II. Quadr.} \end{aligned}\right\} \text{XV}$$

Die Funktion nimmt also zu beiden Seiten der Ordinatenaxe entgegengesetzt gleiche Werte an. Da dasselbe auch für die Abscissenaxe gilt, kommt im III. Quadranten die nach der Normale genommene Ableitung mit der im ersten, im vierten aber mit der des zweiten überein. Es erübrigt noch, zu untersuchen, welche Gestalt unsere Gleichungen bei Einführung von Polarkoordinaten annehmen.

Zu dem Zweck denken wir uns jeden Punkt der ξ-Ebene bestimmt als Schnittpunkt der beiden Orthogonalscharen $\varrho = c_1$ und $\vartheta = c_2$ und ermitteln die Veränderungen, welche die Funktion B erleidet, wenn man von der Peripherie aus in normaler Richtung ein sehr kleines Stück weiter schreitet. Da man zunächst auf dem Radius bleibt, können nur Änderungen nach ϱ eintreten, während ϑ als konstant zu betrachten ist. Es transformiert sich daher

$$\frac{\partial B}{\partial n} = \frac{\partial B}{\partial \varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dn}$$

Der Wert für $\frac{\partial \varrho}{dn}$ lässt sich leicht ermitteln. Derselbe ist offenbar das Mass für das Grössenverhältnis zwischen Bild und Original an der Begrenzung und daher gleich dem absoluten Betrag des Differentialquotienten der abbildenden Funktion an dieser Stelle.

$$\frac{d\varrho}{dn} = \text{abs}\left(\frac{d\xi}{dz}\right)$$

$$\frac{d\xi}{dz} = \text{ca}\,z \,.\, \text{da}\,z = \sqrt{1 - \text{sa}^4 z}$$

Für die Peripherie ist aber $\text{sa}\,z = e^{\vartheta i}$, demnach

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)_r = \text{abs}\sqrt{1 - e^{4\vartheta i}}$$

Setzt man nun $\alpha + \beta i = \sqrt{1 - e^{4\vartheta i}} = \sqrt{1 - \cos 4\vartheta - i \sin 4\vartheta}$, so kommt

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \text{abs}\sqrt{1 - e^{4\vartheta i}}$$

$$= \sqrt{2 \sin 2\vartheta} = \frac{d\varrho}{dn}$$

Die Änderungen des Massstabes erfolgen demnach, wie durch die Zeichnung bestätigt wird, in der Weise, dass derselbe an den Stellen $\vartheta = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$ seinen grössten Wert $\sqrt{2}$ erreicht, an den Orten $(n\frac{\pi}{2} \pm 15^0)$ originalgetreu wird und gegen die Ecken beständig abnimmt bis er dort in nächster Umgebung derselben die denkbar grösste Verjüngung erfährt. Im Innern des Querschnitts wird das Grössenverhältnis durch den Ausdruck $\sqrt{1 - 2\varrho^4 \cos 4\vartheta + \varrho^8}$ gemessen.

In den neuen Koordinaten gewinnt jetzt die Randbedingung folgendes Aussehen

$$\frac{\partial B}{\partial \varrho} = \frac{\partial B}{\partial n} \cdot \frac{d n}{d \varrho}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin 2\vartheta}} \left\{ K - \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin 2\vartheta}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin 2\vartheta}} \left\{ K - 2 \sum_0^{\infty} (-1)^n \left(-\tfrac{1}{2}\right)_n \frac{\sin(4n+1)\vartheta}{4n+1} \right\}$$

Dabei beschränken wir uns vorläufig wieder auf Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$

Durch die Substitution $\lambda^2 = \sin 2\vartheta$ wird das Integral übergeführt in $\int (1-\lambda^4)^{-1/2} d\lambda$, woraus hervorgeht, dass es sich durch die hypergeometrische Reihe $\lambda F(1/2, 1/4, 5/4, \lambda^4)$ ausdrücken lässt.*)

Diese Darstellung lässt sich am kürzesten aus der Transformationsgleichung selbst entnehmen.

$$z = x + y i = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}$$
$$= \zeta F(1/2, 1/4, 5/4, \zeta^4)$$

Der reelle Bestandteil dieser hypergeometrischen Reihe misst die Abscisse, der imaginäre die Ordinate jedes einzelnen Punktes. Für die Peripherie ist $\zeta = e^{\vartheta i}$ und daher

$$y = \Re \frac{1}{i} e^{\vartheta i} F\left(1/2, 1/4, 5/4, e^{4\vartheta i}\right)$$

Wenn noch der Faktor $\sqrt{\sin 2\vartheta}$ durch Exponentialgrössen ausgedrückt wird, so bekommt die Ableitung der Funktion B an der Stelle $\varrho = 1$ folgende Form

$$\frac{\partial B}{\partial \varrho} = K \frac{1}{\sqrt{2i}} \cdot \frac{e^{\vartheta i}}{\sqrt{1-e^{4\vartheta i}}} - 2\Re \frac{1}{i\sqrt{2i}} \cdot \frac{e^{2\vartheta i}}{\sqrt{1-e^{4\vartheta i}}} \cdot F\left(1/2, 1/4, 5/4, e^{4\vartheta i}\right) \quad \text{XVI}$$

Für den Fortgang der Entwickelung ist es wertvoll, dass die Wurzel des Subtrahendus sich mit der Reihe zu einer neuen vereinigen lässt. Diese Umgestaltung bildet zugleich eine schöne Anwendung der von Gauss gegebenen, schon von Euler entdeckten Formel

$$F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) = (1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

Danach wird

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^{4\vartheta i}}} F\left(1/2, 1/4, 5/4, e^{4\vartheta i}\right) = F\left(3/4, 1, 5/4, e^{4\vartheta i}\right)$$

---

*) Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} + \ldots$ (Art. 27

J. Thomae, Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen.

Die Convergenz dieser umgewandelten Reihe ist auf solche Werte des vierten Elements beschränkt, deren Norm wesentlich unterhalb der Einheit bleibt. Im andern Fall gibt Art. 43 der Gauss'schen Abhandlung die Mittel an die Hand, mit Hülfe deren man zu einer rasch konvergenten Entwickelung gelangt. Wenn der absolute Betrag von $e^{4\vartheta i}$ grösser als $1/2$ ist, lässt sich eine Umgestaltung in der Weise vornehmen, dass die neue Entwickelung nach Potenzen von $(1 - e^{4\vartheta i})$ fortschreitet, und dann um so rascher einer bestimmten Grenze zustrebt, je langsamer diese vorher erreicht wurde.

Wendet man auf den Faktor von K in Gl. XVI den Newton'schen Lehrsatz an und nimmt wieder die oben gewählten Bezeichnungen, so entsteht die Beziehung

$$\frac{\partial B}{\partial \varrho} = 1/2\, K\, (1 - i) \sum_0^\infty (-1)^n \left(-1/2\right)_n e^{(4n+1)\vartheta i} + \Re (1 + i) e^{2\vartheta i} F\left(3/4, 1, 5/4, e^{4\vartheta i}\right)$$

Man vergegenwärtige sich nun, dass der Exponentialausdruck des ersten Summanden sein Dasein dem Vergrösserungsfaktor $\sqrt{2 \sin 2\vartheta}$ verdankt, von welchem nur der absolute Betrag zu nehmen ist, dann wird ersichtlich, dass bloss der reelle Bestandteil in Rechnung gezogen werden darf, was ja auch dem Charakter der Funktion entspricht.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \varrho} = 1/2\, K \sum_0^\infty \mathfrak{B}_n \left\{ \cos (4n+1)\vartheta + \sin (4n+1)\vartheta \right\} \\ + \sum_0^\infty \mathfrak{H}_n \left\{ \cos (4n+2)\vartheta - \sin (4n+2)\vartheta \right\} \end{aligned} \quad \ldots\ldots \text{XVII}$$

Den Koeffizienten $\mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{H}_n$ liegen dabei die Bedeutungen zu Grunde

$$\mathfrak{B}_n = (-1)^n \left(-1/2\right)_n = \frac{1/2\,(1/2+1) \ldots\ldots (1/2+n-1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots n}$$

$$\mathfrak{H}_n = \frac{3/4\,,\, n}{5/4\,,\, n} = \frac{3/4\,(3/4+1) \ldots\ldots\ldots\ldots (3/4+n-1)}{5/4\,(5/4+1) \ldots\ldots\ldots\ldots (5/4+n-1)}$$

Unsere Absicht war es, die Ausdrücke rechts für den Quotienten $\frac{\partial B}{\partial \varrho}$ in Fourier'sche Reihen zu entwickeln. Auf der Peripherie hängt der Wert desselben nur von dem Winkel ϑ ab, und man kann füglich setzen $\frac{\partial B}{\partial \varrho} = f(\vartheta)$. Aus den Randbedingungen XV ist zu entnehmen, dass $f(\vartheta)$ eine ungerade Funktion ist; die Darstellung hat daher in einer Sinusreihe zu erfolgen. Weiter ist noch deutlich, weil auch Symmetrie gegen die Halbierungslinien der Axenwinkel vorliegt, dass die Reihe nur die Sinus der geraden Vielfachen von ϑ enthalten kann. Wir werden demnach die Form haben

$$f(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^\infty \mathcal{E}_\nu \sin 2\nu\vartheta\,,$$

wobei die Koeffizienten durch das bestimmte Integral

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) \sin 2\nu\vartheta \,.\, d\vartheta$$

dargestellt werden.

Bezüglich des Winkels hatten wir uns jedoch die Beschränkung auferlegen müssen, dass er die Grenze $\frac{\pi}{2}$ nicht überschreite, da darüber hinaus die Funktion ein anderes Verhalten aufweist. Indessen lässt Fouriers Reihe auch solche Änderungen zu und gestattet damit die Fortsetzung der Entwickelung über die Ecke hinweg. Im zweiten Quadranten gilt die Funktionalgleichung $f(\vartheta) = -f(\pi - \vartheta)$. Das Integral muss daher in zwei zerlegt werden.

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\vartheta)\sin 2\nu\vartheta \,.\, d\vartheta - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\pi - \vartheta)\sin 2\nu\vartheta \,.\, d\vartheta$$

Das zweite Integral besitzt den entgegengesetzten Wert des ersten, wie sich erkennen lässt, wenn man $(\pi - \vartheta)$ durch eine einzige Grösse, etwa durch σ, ersetzt und dann den unter dem Integrale auftretenden Sinus der Differenz $(\pi - \sigma)$ entwickelt. Die Koeffizienten erhalten so schliesslich die Gestalt

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\vartheta)\sin 2\nu\vartheta \,.\, d\vartheta$$

Entsprechend den einzelnen Reihen der Formel XVII denken wir uns die Funktion $f(\vartheta)$ zerlegt in vier Bestandteile, von denen jeder den Bedingungen unterworfen ist, die der ganzen Funktion auferlegt sind. Wir setzen

$$f(\vartheta) = f^{(1)}\vartheta + f^{(2)}(\vartheta) + f^{(3)}(\vartheta) - f^{(4)}(\vartheta),$$

wobei die Symbole für die Ausdrücke gebraucht sind

$$f^{(1)}(\vartheta) = {}^1/_2\,K \sum_0^\infty \mathfrak{B}_n \cos(4n+1)\vartheta$$

$$f^{(2)}(\vartheta) = {}^1/_2\,K \sum_0^\infty \mathfrak{B}_n \sin(4n+1)\vartheta$$

$$f^{(3)}(\vartheta) = \sum_0^\infty \mathfrak{H}_n \cos(4n+2)\vartheta$$

$$f^{(4)}(\vartheta) = \sum_0^\infty \mathfrak{H}_n \sin(4n+2)\vartheta$$

Die den vier Partialreihen entsprechenden Koeffizienten lauten dann

$$\mathcal{E}_\nu^{(1)} = \frac{2K}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \mathfrak{B}_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \,.\, \cos(4n+1)\vartheta \,.\, \sin 2\nu\vartheta$$

$$\mathcal{E}_\nu^{(2)} = \frac{2K}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \mathfrak{B}_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \,.\, \sin(4n+1)\vartheta \,.\, \sin 2\nu\vartheta$$

$$\mathcal{E}_\nu^{(3)} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \mathfrak{H}_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \,.\, \cos(4n+2)\vartheta \,.\, \sin 2\nu\vartheta$$

$$\mathcal{E}_\nu^{(4)} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \mathfrak{H}_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \,.\, \sin(4n+2)\vartheta \,.\, \sin 2\nu\vartheta$$

Hierbei sind die $\mathcal{E}$ durch die Gleichung verbunden

$$\mathcal{E}_\nu = \mathcal{E}_\nu^{(1)} + \mathcal{E}_\nu^{(2)} + \mathcal{E}_\nu^{(3)} - \mathcal{E}_\nu^{(4)}$$

Die Integrale lassen sich sämmtlich ausführen, wenn man die unter dem Integralzeichen stehenden Produkte trigonometrischer Funktionen in Summen resp. Differenzen ebensolcher Grössen auflöst. Für die erste Reihe erhält man

$$\mathcal{E}_\nu^{(1)} = \frac{K}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \left\{ \sin(4n + 2\nu + 1)\vartheta - \sin(4n - 2\nu + 1)\vartheta \right\}$$

Die Integration bringt

$$\mathcal{E}_\nu^{(1)} = \frac{K}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n \left\{ - \frac{\cos(4n + 2\nu + 1)\vartheta}{4n + 2\nu + 1} + \frac{\cos(4n - 2\nu + 1)\vartheta}{4n - 2\nu + 1} \right\}_0^{\frac{\pi}{2}}$$

An der oberen Grenze verschwinden die Integrale ausnahmslos, da das Argument die Reihe der ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ durchläuft. An der unteren Grenze erhält der Cosinus den Wert 1, und $\mathcal{E}_\nu^{(1)}$ wird demnach

$$\mathcal{E}_\nu^{(1)} = \frac{K}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n \left\{ \frac{1}{4n + 2\nu + 1} - \frac{1}{4n - 2\nu + 1} \right\}$$

Analog behandeln wir die Koeffizienten der zweiten Partialreihe

$$\mathcal{E}_\nu^{(2)} = \frac{K}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \left\{ -\cos(4n + 2\nu + 1)\vartheta + \cos(4n - 2\nu + 1)\vartheta \right\}$$

In diesem Ausdruck verschwinden die Integrale an der unteren Grenze; an der oberen wechseln sie das Zeichen, weil für jedes gerade ν der Sinus den Wert $+1$, für jedes ungerade ν aber den Wert -1 annimmt.

$$\mathcal{E}_\nu^{(2)} = \frac{K}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n \left\{ - \frac{(-1)^\nu}{4n + 2\nu + 1} + \frac{(-1)^\nu}{4n - 2\nu + 1} \right\}$$

Vergleichen wir die beiden Koeffizienten $\mathcal{E}_\nu^{(1)}$ und $\mathcal{E}_\nu^{(2)}$, so bemerken wir, dass sie ganz ähnlich gebaut sind. Für ungerade ν stimmen beide vollständig überein, auch hinsichtlich des Vorzeichens; ist dagegen ν gerade, so sind sie entgegengesetzt gleich und heben sich daher auf. Setzen wir also ν ungerade, von der Form $\nu = 2\mu + 1$, wobei μ jede ganze positive Zahl bedeuten darf, die Null inbegriffen, dann tritt in jedem Falle Verdoppelung ein.

$$\mathcal{E}_\nu^{(1)} + \mathcal{E}_\nu^{(2)} = \frac{2K}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n \left\{ \frac{1}{4n + 4\mu + 3} - \frac{1}{4n - 4\mu - 1} \right\}$$

Die Summation dieser Ausdrücke wollen wir durch hypergeometrische Reihen bewirken. Zu dem Behufe schreiben wir

$$\frac{1}{4n+4\mu+3} = \frac{1}{4(\mu+{}^3/_4)} \cdot \frac{(\mu+{}^3/_4)(\mu+{}^3/_4+1)\ldots\ldots(\mu+{}^3/_4+n-1)}{(\mu+{}^7/_4)(\mu+{}^7/_4+1)\ldots\ldots(\mu+{}^7/_4+n-1)} \text{ und}$$

$$\frac{1}{4n-4\mu-1} = \frac{1}{4(-\mu-{}^1/_4)} \cdot \frac{(-\mu-{}^1/_4)(-\mu-{}^1/_4+1)\ldots\ldots(-\mu-{}^1/_4+n-1)}{(-\mu+{}^3/_4)(-\mu+{}^3/_4+1)\ldots\ldots(-\mu+{}^3/_4+n-1)}$$

Den Faktor $\mathfrak{B}_n$ haben wir schon oben auf ähnliche Form gebracht. Es folgt so die Darstellung

$$\frac{2\pi}{K}\left(\mathcal{E}_\nu^{(1)}+\mathcal{E}_\nu^{(2)}\right) = \frac{1}{\mu+{}^3/_4}\,F({}^1/_2,\mu+{}^3/_4,\mu+{}^7/_4,1) + \frac{1}{\mu+{}^1/_4}\,F({}^1/_2,-\mu-{}^1/_4,-\mu+{}^3/_4,1)$$

Nach dem von Gauss gegebenen Kriterium konvergieren diese Reihen. In beiden Fällen übertrifft das dritte Element die Summe der beiden ersten, der Unterschied ist positiv, und die Reihen streben mit wachsenden n einer bestimmten endlichen Summe zu. Diese lässt sich darstellen durch Fakultäten*)

$$\mathcal{E}_\nu^{(1)}+\mathcal{E}_\nu^{(2)} = \frac{2K}{\pi(4\mu+3)}\,\frac{\mathrm{fac}(\mu+{}^3/_4)\,.\,\mathrm{fac}(-{}^1/_2)}{\mathrm{fac}(\mu+{}^1/_4)\,.\,\mathrm{fac}\,0} + \frac{2K}{\pi(4\mu+1)}\,\frac{\mathrm{fac}(-\mu-{}^1/_4)\,.\,\mathrm{fac}(-{}^1/_2)}{\mathrm{fac}(-\mu-{}^3/_4)\,.\,\mathrm{fac}\,0}\,.\quad \text{XVIII}$$

Benutzt man die von Gauss hergeleitete Relation

$$\mathrm{fac}(-z)\,.\,\mathrm{fac}(+z) = \frac{z\pi}{\sin z\pi},$$

um negatives Argument in positives überzuführen, so entsteht die Gleichung

$$\frac{1}{4\mu+1}\cdot\frac{\mathrm{fac}(-\mu-{}^1/_4)}{\mathrm{fac}(-\mu-{}^3/_4)} = \frac{1}{4\mu+3}\cdot\frac{\mathrm{fac}(\mu+{}^3/_4)}{\mathrm{fac}(\mu+{}^1/_4)}\cdot\frac{\sin(\mu+{}^3/_4)\pi}{\sin(\mu+{}^1/_4)\pi}$$

Da der Quotient aus den beiden trigonometrischen Funktionen der Einheit gleichkommt, erweist sich der zweite Summand der Gl. XVIII als mit dem ersten identisch, und man findet die einfachere Beziehung

$$\mathcal{E}_\nu^{(1)}+\mathcal{E}_\nu^{(2)} = \frac{4K}{\pi(4\mu+3)}\cdot\frac{\mathrm{fac}(\mu+{}^3/_4)\,.\,\mathrm{fac}(-{}^1/_2)}{\mathrm{fac}(\mu+{}^1/_4)\,.\,\mathrm{fac}\,0}$$

Bei Anwendung der Funktionalgleichung $\mathrm{fac}(z+1) = (z+1)\,\mathrm{fac}\,z$, kommt die Form

$$\mathcal{E}_\nu^{(1)}+\mathcal{E}_\nu^{(2)} = \frac{K}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{fac}(\mu-{}^1/_4)\,.\,\mathrm{fac}(-{}^1/_2)}{\mathrm{fac}(\mu+{}^1/_4)}$$

$$= \frac{K}{\pi}\cdot\frac{(-{}^1/_4+1)(-{}^1/_4+2)\ldots(-{}^1/_4+\mu)\,.\,\mathrm{fac}(-{}^1/_4)\,.\,\mathrm{fac}(-{}^1/_2)}{({}^1/_4+1)({}^1/_4+2)\ldots\ldots({}^1/_4+\mu)\,.\,\mathrm{fac}\,{}^1/_4}$$

Eine weitere, noch wesentlichere Zurückführung wird dadurch erzielt, dass man K und π durch analoge Funktionen ausdrückt.

$$K = F({}^1/_2,{}^1/_4,{}^5/_4,1) = \frac{\mathrm{fac}\,{}^1/_4\,.\,\mathrm{fac}(-{}^1/_2)}{\mathrm{fac}(-{}^1/_4)}$$

$$\sqrt{\pi} = \mathrm{fac}(-{}^1/_2)$$

*) Wegen der Bezeichnung vergl. m.
J. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen § 122.

Nach Division mit den gemeinschaftlichen Faktoren erhalten wir schliesslich die einfache Gleichung

$$\mathcal{E}_\nu^{(1)} + \mathcal{E}_\nu^{(2)} = \frac{{}^3/_4\,({}^3/_4+1)\,({}^3/_4+2)\,.\,.\,.\,.\,({}^3/_4+\mu-1)}{{}^5/_4\,({}^5/_4+1)\,({}^5/_4+2)\,.\,.\,.\,.\,({}^5/_4+\mu-1)}$$

$$= \frac{{}^3/_4\,,\,\mu}{{}^5/_4\,,\,\mu}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\text{XIX}$$

Wir lassen jetzt vorweg die Entwickelung der Koeffizienten für die vierte Partialreihe folgen.

$$\mathcal{E}_\nu^{(4)} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{H}_n\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\left\{-\cos(4n+2\nu+2)\vartheta + \cos(4n-2+\nu 2)\vartheta\right\}$$

Hier beansprucht der Fall $\nu = 2n+1$ besondere Beachtung, für welchen der zweite Ausdruck den Wert $\frac{\pi}{2}$ erhält. Sämtliche anderen Integrale verschwinden. Das Summenzeichen ist hier ohne Bedeutung, da zu jedem ν nur ein Wert von n gehört. Es ergibt sich sonach

$$\mathcal{E}_\nu^{(4)} = \mathfrak{H}_n = \frac{{}^3/_4\,,\,n}{{}^5/_4\,,\,n}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\text{XX}$$

In den Gleichungen XIX und XX ist es erlaubt, die Buchstaben μ und n miteinander zu vertauschen, weil beide der nämlichen Bedingung $\nu = 2n+1 = 2\mu+1$ unterworfen sind. Die beiden Ausdrücke erweisen sich also als völlig gleich, und wir gewinnen die bemerkenswerte Relation

$$\mathcal{E}_\nu^{(1)} + \mathcal{E}_\nu^{(2)} - \mathcal{E}_\nu^{(4)} = 0\,,$$

die uns zeigt, dass die drei zugehörigen Partialreihen ohne Einfluss sind bei der Entwickelung unserer Funktion in eine Fourier'sche Reihe. Als Koeffizienten bleiben nur noch $\mathcal{E}_\nu = \mathcal{E}_\nu^{(3)}$, deren Auswertung jetzt bewirkt werden soll.

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{H}_n\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\left\{\sin(4n+2\nu+2)\vartheta - \sin(4n-2\nu+2)\vartheta\right\}$$

Für ungerade ν haben die Integrale an der oberen wie an der unteren Grenze dieselben Werte, und die Koeffizienten verschwinden. Wenn aber ν gerade ist, von der Form $\nu = 2\mu$, werden die Integrale entgegengesetzt gleich, und man erhält

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{H}_n\left(\frac{1}{4n+4\mu+2} - \frac{1}{4n-4\mu+2}\right)$$

Führt man für $\mathfrak{H}_n$ seinen Wert ein, so kommt

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}^3/_4\,,\,n}{{}^5/_4\,,\,n}\cdot\frac{1}{n+\mu+{}^1/_2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}^3/_4\,,\,n}{{}^5/_4\,,\,n}\cdot\frac{1}{n-\mu+{}^1/_2}$$

Damit ist die Aufgabe im Grunde als gelöst zu betrachten. Die Funktion f (ϑ) zerfällt in zwei unendliche Reihen, fortschreitend nach den Vielfachen der Sinus von 4ϑ

mit Koeffizienten, die durch hypergeometrische Reihen dargestellt werden können. Letztere unterscheiden sich jedoch von der gewöhnlichen Gauss'schen F-Funktion dadurch, dass im Nenner noch ein zweites Element auftritt. Wir wollen die beiden Ausdrücke getrennt behandeln und setzen

$$\mathcal{E}_\nu = \mathcal{P}_\nu - \mathcal{Q}_\nu$$

Alsdann lässt sich für den ersten Teil die Schreibweise anwenden

$$\mathcal{P}_\nu = \frac{1}{\pi\,(\mu + {}^1/_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\,,n}{1\,,n} \cdot \frac{{}^3/_4\,,n}{{}^5/_4\,,n} \cdot \frac{\mu + {}^1/_2\,,n}{\mu + {}^3/_2\,,n}$$

Derartige Entwickelungen sind mehrfach Gegenstand von Untersuchungen gewesen. Herr Thomae*) hat ihnen die Bezeichnung „hypergeometrische Reihen III. Ordnung" beigelegt, weil sie als Integrale einer linearen Differentialgleichung III. Ordnung aufgefasst werden können. In der a. d. g. O. angewandten Symbolik erhält man

$$\mathcal{P}_\nu = \frac{1}{\pi\,(\mu + {}^1/_2)}\, \mathrm{F}\left(\begin{matrix} 0\,, & -{}^1/_4\,, & -\mu - {}^1/_2 \\ 1\,, & {}^3/_4\,, & \mu + {}^1/_2 \end{matrix}\right)$$

Die Reihe ist konvergent, da die Summe ihrer Parameter kleiner ist als 2. Sie lässt sich darstellen durch das bestimmte Integral

$$\mathcal{P}_\nu = \frac{1}{\pi\,(\mu + {}^1/_2)} \cdot \frac{\mathrm{fac}\,(\mu + {}^1/_2)}{\mathrm{fac}\,(\mu - {}^1/_2)} \int_0^1 \mathrm{d}s\; \mathrm{F}\,(1\,,\, {}^3/_4\,,\, {}^5/_4,\, s)\,.\, s^{\mu - {}^1/_2}$$

Es ist bemerkenswert, dass die unter dem Integral auftretende Gauss'sche hypergeometrische Reihe μ selbst nicht mehr enthält. Mit dieser Grösse ist nur noch ein Faktor behaftet, der eine um so stärkere Konvergenz bewirkt, je grösser μ wird. Wendet man wieder die Gesetze an, welche für die Fakultät bestehen, so kommt

$$\mathcal{P}_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mathrm{d}s\; \mathrm{F}\,(1\,,\, {}^3/_4\,,\, {}^5/_4\,,\, s)\; s^{\mu - {}^1/_2}$$

Die Koeffizienten der zweiten Reihe können auf die Form gebracht werden

$$\mathcal{Q}_\nu = \frac{1}{\pi\,(-\mu + {}^1/_2)}\, \mathrm{F}\left(\begin{matrix} 0\,, & -{}^1/_4\,, & \mu - {}^1/_2 \\ 1\,, & {}^3/_4\,, & -\mu + {}^1/_2 \end{matrix}\right)$$

Wollen wir in der nämlichen Weise, wie es für den ersten Ausdruck gelungen ist, die Umformung in ein bestimmtes Integral vornehmen, so begegnen wir einer Schwierigkeit; wenn der neben der Reihe auftretende Factor dort die Konvergenz derselben vermehrt hat, so bewirkt er hier gerade das Gegenteil, die Entwickelung wird sicher divergent und daher unstatthaft. Man kann aber dadurch zu einem sinngemässen Integralausdruck gelangen, dass man die zweiten und dritten Elemente im Zähler und Nenner vertauscht, was bei dem Charakter der Reihe immer erlaubt ist. Allerdings wird dann für jedes μ, also für jeden einzelnen Koeffizienten eine besondere Summation vorgenommen werden müssen.

*) J. Thomae: 1) Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen etc. — Mathematische Annalen II.
2) Ueber die Funktionen, welche durch Reihen von der Form dargestellt werden.
$1 + \frac{p}{1} \cdot \frac{p'}{q'} \cdot \frac{p''}{q''} + \frac{p\,(p+1)}{1\,.\,2} \cdot \frac{p'\,(p'+1)}{q'\,(q'+1)} \cdot \frac{p''\,(p''+1)}{q''\,(q''+1)} + \ldots$, Crelle's Journal, Bd. 87.

$$\mathfrak{O}_\nu = \frac{1}{\pi(-\mu+{}^1/_2)} \cdot \frac{\text{fac}\,{}^1/_4}{\text{fac}(-{}^1/_4)\,.\,\text{fac}(-{}^1/_2)} \int_0^1 \text{ds}\, \frac{\text{F}(1\,,-\mu+{}^1/_2\,,-\mu+{}^3/_2\,,\text{s})}{\text{s}^{1/4}(1-\text{s})^{1/2}}$$

Mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{\text{fac}\,{}^1/_4\,.\,\text{fac}(-{}^1/_2)}{\text{fac}(-{}^1/_4)} = \text{K}\ ;\ \text{fac}(-{}^1/_2) = \sqrt{\pi}\ ,$$

lässt sich der Gleichung folgende Gestalt geben

$$\mathfrak{O}_\nu = \text{K} \int_0^1 \frac{\text{ds}}{\sqrt{1-\text{s}}} \sum_{\text{n}=0}^{\infty} \frac{\text{s}^{\text{n}-1/4}}{-\mu+{}^1/_2+\text{n}}$$

Unsere Ermittelungen über die Natur der Funktion B können nun dahin zusammengefasst werden:

Der Differentialgleichung III, die in Polarkoordinaten in der Form

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho \frac{\partial \text{B}}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 \text{B}}{\partial\vartheta^2} = 0$$

erscheint, wird allgemein Genüge geleistet durch den Ausdruck

$$\text{B} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mathfrak{A}_\mu\, \varrho^\mu \sin\mu\vartheta + \mathfrak{B}_\mu\, \varrho^\mu \cos\mu\vartheta)$$

Die Differentiation nach ϱ bringt für die Peripherie

$$\frac{\partial \text{B}}{\partial\varrho} = \sum_{\mu=1}^{\infty} (\mu\, \mathfrak{A}_\mu \sin\mu\vartheta + \mu\, \mathfrak{B}_\mu \cos\mu\vartheta)$$

Zufolge der Randbedingung erhielten wir für diesen Quotienten den Wert

$$\frac{\partial \text{B}}{\partial\varrho} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{E}_\nu \sin 4\mu\vartheta,$$

wobei $\nu = 2\mu$ gesetzt war. Die entsprechenden Koeffizienten in beiden Entwickelungen sind gleichzusetzen, da sich eine Funktion nur auf einerlei Art nach Fourier's Methode darstellen lässt. Es wird also identisch

$$\mathfrak{A}_{4\mu+1} = 0\ ;\ \mathfrak{A}_{4\mu+2} = 0\ ;\ \mathfrak{A}_{4\mu+3} = 0\ ;\ \mathfrak{B}_\mu = 0$$

$$\mathfrak{A}_{4\mu} = \frac{1}{4\mu} \cdot \mathfrak{E}_\nu = \frac{1}{4\mu}(\mathfrak{F}_\nu - \mathfrak{O}_\nu)$$

Führt man $\varrho \sin\vartheta = \eta$ ein und bezeichnet mit B_1 denjenigen Teil unserer Funktion, der $\mathfrak{F}_\nu$ zugehört, so entsteht die Beziehung

$$\text{B}_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \text{ds}\ \text{F}(1\,,{}^3/_4\,,{}^5/_4\,,\text{s})\ \text{s}^{-1/2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\ \text{s}^\mu\, \eta^{4\mu}$$

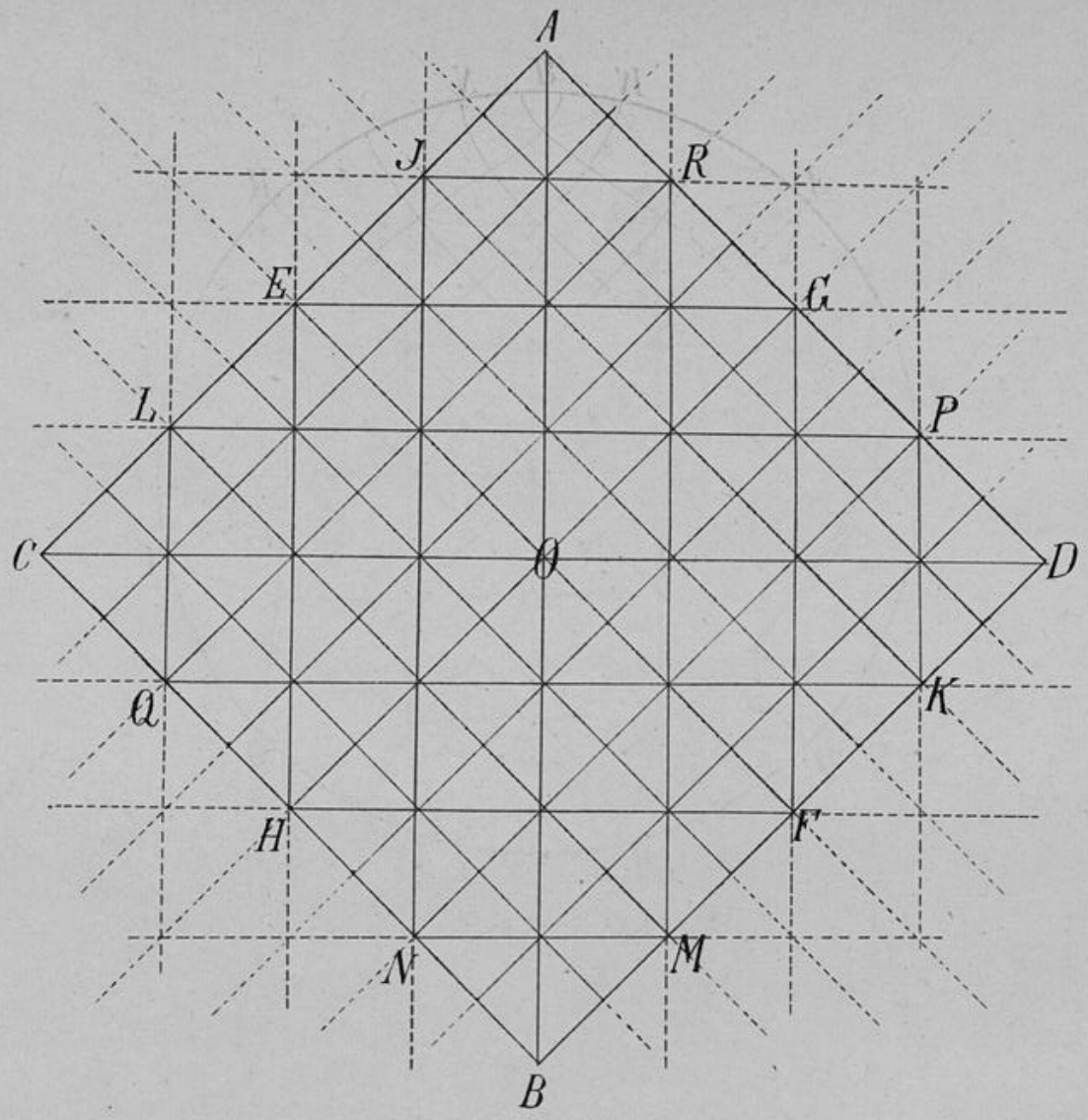
Die Summe ist identisch mit der logarithmischen Reihe. Es ist nämlich

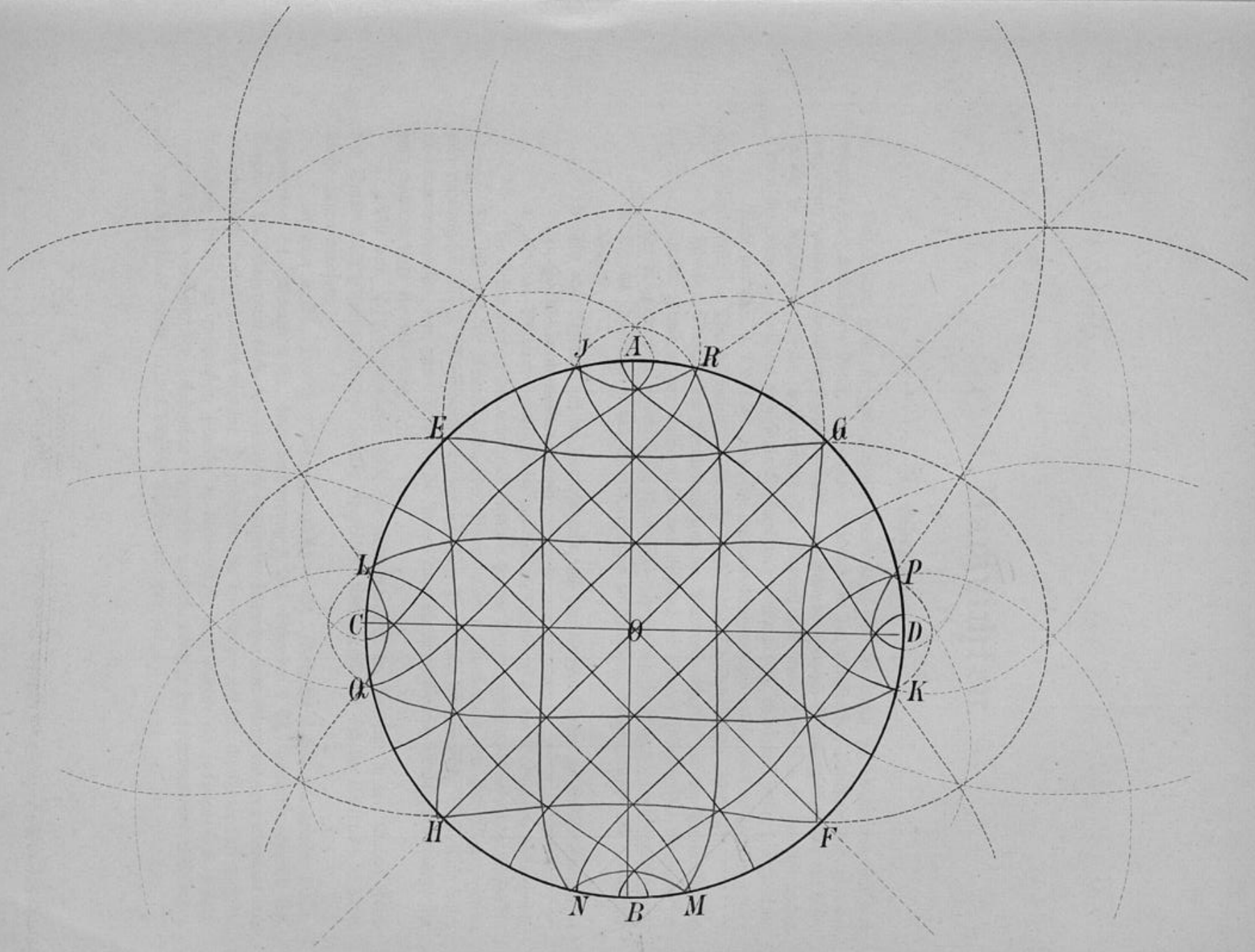
$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} s^{\mu} \eta^{4\mu} = -\lg(1 - s\eta^4)$$

η lässt sich als imaginärer Bestandteil der abbildenden Funktion der Gl. VII gemäss bestimmen, sonach wird

$$B_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 ds\, F(1, {}^3/_4, {}^5/_4, s)\, s^{-1/2} [-\lg(1 - s\eta^4)]$$

Die geschlossene Form dieses Ausdrucks verdankt man dem Umstand, dass die unter dem Integrale auftretende hypergeometrische Reihe von μ unabhängig und somit ein gemeinschaftlicher Faktor sämtlicher Koeffizienten ist. Für den zweiten Teil der Funktion B trifft diese Bemerkung nicht zu. Derselbe erscheint als eine Potenzreihe, bei welcher jeder Term eine besondere Bestimmung erfordert.


A
J
R
E
G
L
P
C
O
D
Q
K
H
F
N
M
B


J
A
R
E
G
L
P
C
O
D
Q
K
H
F
N
B
M