Beitrag zur Kenntniss der Kettenlinie.

§. 1.
Das Seilpolygon.

Wirken an verschiedenen Punkten eines vollkommen biegsamen, aber undehnbaren Fadens Kräfte, welche sämmtlich unter einander im Gleichgewicht sind, so nennen wir die Gestalt, welche der Faden in der Gleichgewichtslage annimmt, ein Seilpolygon. Die einzigen festen Punkte eines solchen Systems sind die Angriffspunkte der Kräfte. Zum Gleichgewicht eines derartigen Systems ist daher erforderlich, dass alle festen Punkte unter dem Einflusse aller auf dieselben wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind. Ausserdem ist aber zum Gleichgewicht des Systems noch nothweneig, dass jeder zwischen zwei festen Punkten liegende Theil des Seiles (Fadens) von zwei gleichen und entgegengesetzten Spannungen gezogen werde.

Um nun über diesen für die folgenden Untersuchungen so wichtigen Begriff der Spannung im Klaren zu sein, scheint es gut, schon hier die Definition derselben anzuknüpfen.

Wir nennen im gewöhnlichen Leben einen Faden gespannt, wenn an seinen Endpunkten zwei gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte angebracht sind, und sagen, dass ein Faden um so stärker gespannt sei, je grösser die angebrachten Kräfte sind. Diese Kräfte also — oder richtiger die eine derselben ist also das Mass der Spannung. Sind aber an den Enden des Fadens zwei ungleiche Kräfte wirksam, so wird der Faden offenbar durch die kleinere von beiden gespannt, welche also dann das Mass der Spannung ist.

Es sei nun A B C D (Fig. I) ein Seil und daran die Kräfte R S P_1 P_2 P_3 P_4 angebracht, welche unter einander im Gleichgewicht sind, dann ist nach unserer Erklärung A B C D ein Seilpolygon. Will man sich die Entstehung desselben praktisch ausgeführt denken, so sagt man: An verschiedenen Punkten eines an den Enden aufgehängten Seiles wirken die Kräfte P_1 P_2 P_3 P_4, welche das Seil zwingen eine bestimmte Gestalt, die des Seilpolygons, anzunehmen. Bei dieser Auffassung denken wir uns durch die Stärke der Aufhängung eine Kraft repräsentirt, welche die angebrachten Kräfte aufhebt.

Für die folgende Untersuchung ist es jedoch zweckmässiger, die erstere Art der Entstehung des Seilpolygons beizubehalten, weil in derselben bloss Kräfte auftreten, auf welche die Gesetze der Mechanik mit Leichtigkeit angewendet werden können. Da nun die Entstehung des Seilpolygons an die Bedingung geknüpft ist, dass das ganze System im Gleichgewicht ist, so müssen also auch alle Punkte, in denen die Kräfte angreifen, im Gleichgewicht sein. An dem Punkte A nun wirken erstens die beiden Kräfte R und P_1, sodann aber auch die Kraft, welche von der Seilverbindung der Punkte A und B herrührt, und welche als die Spannung des Seiltheils AB anzusehen ist. Nennen wir nun diese Spannung T_1, so ist klar, dass A nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn diese drei Kräfte sich aufheben. Es muss also offenbar T_1 gleich der Resultante aus R und P_1 sein und eine derselben entgegengesetzte Richtung haben. Ebenso kann der Punkt B nur im Gleichgewicht sein, wenn die Spannung T_1, und die Kraft P_2 von der Spannung des Seils B C — welche T_2 heissen möge — aufgehoben wird. Es muss also T_2 gleich und entgegengesetzt der Resultante von T_1 und T_2 d. h. gleich der Resultante aus (R P_1 P_2) sein. Ferner muss, wenn C auch im Gleichgewicht sein soll, die Spannung des Seils C D nämlich T_3 gleich und entgegengesetzt der Resultante aus P_3 und T_2 oder es muss: T_3 = Resultante aus (R P_1 P_2 P_3) sein. Ganz ebenso ergiebt sich aber auch, dass für D offenbar T_3 = Resultante aus (S P_4) oder S = Resultante aus (T_3 P_4) = Resultante aus (R P_1 P_2 P_3 P_4) sein muss. Daraus erkennt man leicht, dass die Spannung eines Seils nichts anderes ist, als die Resultante aller auf einer Seite desselben angebrachten Kräfte. — Die letzte Beziehung ist nun offenbar nothwendig, wenn Gleichgewicht des Systems vorhanden sein, d. h. wenn das Seilpolygon entstehen soll ohne dass umgekehrt Gleichgewicht des Systems vorhanden zu sein braucht, wenn diese Bedingung erfüllt ist. Da wir nun auch, ohne das Gleichgewicht zu beeinträchtigen, das System zu einem festen machen können, so können wir auch alle angebrachten Kräfte parallel zu sich selbst versetzt denken, etwa nach D, dann müssen sich in D alle Kräfte aufheben und die Resultante von (R P_1 P_2 P_3 P_4) muss genau gleich und entgegengesetzt dem S sein, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll. Aus diesem allgemeinen Gesetze ergeben sich drei Gleichungen des Gleichgewichts. Wenn wir im Raume ein rechtwinkliges Coordinatensystem annehmen und sämmtliche an dem Seile angebrachten Kräfte nach den drei Coordinatenaxen zerlegen, so müssen die 3 Componenten von S die entsprechenden Componenten der aus (R P_1 P_2 P_3 P_4) resultirenden Kraft aufheben. Obwohl wir nun zwar aus der Erfüllung dieser drei Bedingungen nicht immer auf das Gleichgewicht des Systems schliessen dürfen, so sind wir doch im Stande, auf Grund derselben, dem Polygon stets eine solche Gestalt zu verleihen, dass die angebrachten Kräfte an demselben im Gleichgewicht sind. Denn wir brauchen von dem beliebig gewählten Punkte A aus dem Seile nur eine solche Richtung zu geben, dass es der Resultante aus R und P_1 entgegengesetzt verläuft und eine dieser Resultante gleiche Spannung hat. Alsdann bringen wir das Seil B C in der Richtung an, welche der Resultante aus der Spannung von A B und aus P_2 entgegengesetzt ist, und geben B C eine dieser Resultante gleiche Spannung. Auf diese Weise in unserer Construction fortfahrend haben wir schliesslich am letzten Punkte eine Kraft zu verwenden,

die das ganze System ins Gleichgewicht bringt. Auf diese Weise wird offenbar, wenn die angebrachten Kräfte bekannt sind, welche im Gleichgewicht sein sollen, die Gestalt des Polygons vollständig bestimmt — ein Umstand, der für die folgenden Betrachtungen von Wichtigkeit ist. —

Im Folgenden interessirt uns hauptsächlich die Frage, wie wir aus der Bedingung, dass ein solches System im Gleichgewicht sei, die Gestalt desselben bestimmen können, namentlich wenn wir uns die Kräfte nicht mehr an einzelnen Punkten des Systems, sondern an continuirlich folgenden Punkten angebracht denken, und wir also statt eines Polygons eine continuirliche Curve vor uns haben. Bevor wir jedoch auf diese Untersuchungen eingehen, wollen wir vorerst noch einen speciellen Fall betrachten, wo die Kräfte an dem Seile lauter Parallelkräfte sind. Hierbei denken wir uns die Entstehung des Polygons am besten durch Aufhängen an zwei festen Punkten bewirkt und etwa an verschiedenen Punkten desselben Gewichte angebracht. Das Gewicht des Fadens selbst wollen wir dabei als verschwindend klein voraussetzen. Dann haben wir also den einfachen Fall, dass sämmtliche Kräfte in derselben Ebene wirken. Nehmen wir diese Ebene als die X Y Ebene an, so verschwinden also alle Componenten in der Richtung der Z Axe, und es ist klar, dass wir hier nur zwei Gleichungen bekommen, welche sich aus dem Gleichgewichte des Systems ergeben. Treffen wir nun ausserdem noch die Bestimmung, dass die Ordinatenaxe eine verticale, also die Abscissenaxe eine horinzontale Linie sein soll, so ist also die erstere parallel der Richtung der angebrachten Kräfte. Dieselben haben also keine Componenten nach der X Axe. A B C D (Fig. II) sei das aufgehängte Seil und P_1, P_2, P_3, P_4 die an den Punkten A, B, C und D angebrachten Gewichte. Statt die Punkte A und B als feste anzusehen, wollen wir uns denken, dieselben wären zwar frei, aber es wären an ihnen Kräfte angebracht, welche den P_1, P_2 .... entgegenwirkten und dieselben aufhöben, so dass dadurch das ganze System im Gleichgewicht wäre. Diese Kräfte an A und B mögen R und S heissen. Dann können wir die obige Entwicklung auch hier anstellen und finden also ebenso wie dort, dass S gleich und entgegengesetzt der Resultante aus allen angebrachten Kräften sein muss, oder wenn wir S und R nach den beiden Axen zerlegen, dass die Componenten von S die entsprechenden Componenten dieser Resultirenden aufheben müssen. Schliesst nun die Richtung von R mit der X Axe den Winkel α_1 und S den Winkel α_2 ein, so zerlegen sich die Kräfte R und S in die Componenten

$$\left.\begin{matrix} R.\ \cos.\ \alpha_1 \\ R.\ \sin.\ \alpha_1 \end{matrix}\right\} \text{und} \begin{matrix} S\ \cos.\ \alpha_2 \\ S\ \sin.\ \alpha_2 \end{matrix}$$

von denen die mit dem Faktor cos. verknüpften nach der X Axe und die beiden anderen nach der Y Axe wirken. Die Kräfte P_1 P_2 ... wirken bloss nach der Y Axe. Da nun das S cos. α_2 die Resultante aller nach der X Axe und S sin. α_2 die Resultante aller nach der Y Axe wirkenden Kräfte aufheben muss, so erhalten wir also folgende zwei Gleichungen:

$$1.\ S\ \cos.\ \alpha_2 = R\ \cos.\ \alpha_1$$

$$2.\ S\ \sin.\ \alpha_2 = R\ \sin.\ \alpha_1 + P_1 + P_2 + P_3 \ldots$$

denn da wir lauter Parallelkräfte haben, so ist die Resultante aller nach der Y Axe wirkenden Kräfte gleich der Summe der einzelnen Kräfte.

Durch diese beiden Gleichungen ist also, wie wir oben gesehen haben, die Gestalt des Seilpolygons vollkommen bestimmt. Über dies Polygon sei hier noch bemerkt, dass es in einer Verticalebene liegen muss, und dass es so viel Ecken hat, als Gewichte an dem Seile angebracht sind — was beides an sich klar ist. — Uber die Spannung gilt hier natürlich ganz das früher Gesagte. Wir sind also im Stande, die Spannung jedes Seiltheiles durch die gegebenen Gewichte auszudrücken. Bringen wir nun an allen Punkten des Seiles Gewichte an, so erhalten wir eine sogenannte Seilcurve, und denken wir uns schliesslich unter diesen Gewichten das eigene Gewicht des Fadens, so bekommen wir die Kettenlinie, deren Gestalt aus den Gleichgewichts-Bedingungen des Fadens herzuleiten im Folgenden unsere specielle Aufgabe ist.

§. 2.

Die Kettenlinie. Gleichung derselben.

Wird ein vollkommen biegsamer, aber unausdehnbarer Faden an zwei Punkten frei aufgehängt und an allen seinen Punkten gleich belastet, was z. B. so geschehen kann, dass er unter der Voraussetzung, dass gleiche Fadenlängen gleiches Gewicht haben, nur durch seine eigene Schwere gespannt wird, so bildet der Faden eine Kettenlinie.

A und B (Fig. III) seien die Aufhängepunkte des Fadens. Da hier wie bei dem letztbetrachteten Seilpolygon die Curve in einer Verticalebene liegt, so wollen wir wieder die Abscissenaxe als eine horizontale und die Ordinatenaxe als eine verticale Linie ansehen. Wir haben dann wieder den Vortheil, dass die angebrachten Gewichte, welche hier gleich dem Gesammtgewichte des Fadens sind, keine Componenten nach der X Axe haben können. Da wir aber hier eine continuirliche Curve haben, so leiten wir unsere Gleichungen nicht wie oben aus der Gleichgewichtslage des ganzen Fadens ab, sondern betrachten blos ein Fadenelement $\triangle S$ mit Hülfe der Differenzialrechnung. Die Integralrechnung liefert uns dann die Mittel, die für das $\triangle s$ entwickelten Gesetze auf die ganze Länge des Fadens s zu übertragen. Das Fadenelement, welches wir zunächst betrachten wollen, sei $M M_1 = \triangle s$. Dann haben wir also statt der Kräfte S und R beim Seilpolygon hier offenbar die an den Punkten M und M_1 stattfindenden Spannungen einzuführen, und statt der Kräfte P_1, P_2... das Gewicht des Elements $\triangle s$. Bezeichnen wir daher die Spannung an M mit T und an M_1 mit T_1 und setzen das Gewicht der Fadeneinheit $= g$, also des Elements $\triangle s = g \triangle s$, so müssen sich also die Componenten dieser Kräfte nach einer Axe für sich aufheben. Nehmen wir nun an, dass die Richtung von T mit der Abscissenaxe den Winkel α und T_1 mit derselben den Winkel α_1 bildet, so sind T cos. α und T_1 cos. α_1 die Componenten der Spannungen nach der X Axe, und T sin. α und T_1 sin. α_1 die Componenten derselben nach der Y Axe. Nach der letzteren Axe wirkt ausserdem noch $g \triangle s$. Die den Gleichungen 1) und 2) des §. 1 entsprechenden Gleichungen sind also:

$$1)\ T_1 \cos. \alpha_1 = T \cos. \alpha. \qquad 2)\ T_1 \sin. \alpha_1 = T \sin. \alpha + g \triangle s.$$

Nehmen wir nun an, dass $T_1 = T + \triangle T$ ist, und bedenken, dass die Spannung in jedem Punkte in der Richtung der Tangente wirken muss, so ist, wenn x und y die Coordinaten von M sind, offenbar

$$\cos. \alpha = \frac{d\,x}{d\,s} \text{ und } \sin. \alpha = \frac{d\,y}{d\,s};$$

wir können also jedenfalls sagen, dass

$$\cos. \alpha_1 = \frac{d\,x}{d\,s} + \triangle \frac{d\,x}{d\,s} \text{ und } \sin. \alpha_1 = \frac{d\,y}{d\,s} + \triangle \frac{d\,y}{d\,s}$$

ist. Hierdurch gehen die Gleichungen über in

$$3\ (T + \triangle T) \left\{\frac{d\,x}{d\,s} + \triangle \frac{d\,x}{d\,s}\right\} = T \frac{d\,x}{d\,s}$$

$$4\ (T + \triangle T) \left\{\frac{d\,y}{d\,s} + \triangle \frac{d\,y}{d\,s}\right\} = T \frac{d\,y}{d\,s} + g \triangle s.$$

Dass die Spannung hier stets eine tangentiale Wirkung ausüben muss, ergiebt sich leicht, wenn wir bedenken, dass sie ja bei jedem Faden in der Richtung desselben wirken muss. Die Spannung, welche in einem Punkte M stattfindet, muss also auch in der Richtung wirken, welche der Faden (die Curve) in diesem Punkte hat, d. h. in der Richtung der Tangente an diesem Punkte. Da sie sich nun offenbar continuirlich mit dem Punkte ändern muss, so ist sie also eine stetige Function der Coordinaten.

Die Gleichungen 3) und 4) wollen wir nun weiter behandeln. Die Ausführung der angedeuteten Multiplicationen ergiebt:

$$\triangle T \frac{d\,x}{d\,s} + T \triangle \frac{d\,x}{d\,s} + \triangle T \triangle \frac{d\,x}{d\,s} = 0$$

$$\triangle T \frac{d\,y}{d\,s} + T \triangle \frac{d\,y}{d\,s} + \triangle T \triangle \frac{d\,y}{d\,s} = g \triangle s;$$

oder wenn wir durch $\triangle x$ und $\triangle y$ diese Gleichungen dividiren:

$$\frac{\triangle T}{\triangle x} \cdot \frac{d\,x}{d\,y} + T \triangle \frac{\frac{d\,x}{d\,s}}{\triangle x} + \frac{\triangle T}{\triangle x} \triangle \frac{d\,x}{d\,s} = 0$$

$$\frac{\triangle T}{\triangle y} \cdot \frac{d\,y}{d\,s} + T \triangle \frac{\frac{d\,y}{d\,s}}{\triangle y} + \frac{\triangle T}{\triangle y} \cdot \triangle \frac{d\,y}{d\,s} = g \frac{\triangle s}{\triangle y}$$

Lassen wir nun $\triangle x$ resp. $\triangle y$ immer kleiner und kleiner werden, so bekommen wir die Differentialverhältnisse. Die beiden Glieder

$$\frac{\triangle T}{\triangle x} \cdot \triangle \frac{d\,x}{d\,s} \text{ und } \frac{\triangle T}{\triangle y} \cdot \triangle \frac{d\,y}{d\,s}$$

aber bestehen dann aus je zwei Faktoren, welche als Produkt ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung geben müssen. Wir dürfen dieselben also vernachlässigen. Unsere Gleichungen erhalten also die Form

$$d\,T \frac{d\,x}{d\,s} + T\,d \left(\frac{d\,x}{d\,s}\right) = 0 \qquad d\,T \frac{d\,y}{d\,s} + T\,d \left(\frac{d\,y}{d\,s}\right) = g\,d\,s,$$

wo wir die Nenner d x und d y weggelassen haben, da sie ja nur anzeigen, in Bezug auf welche Veränderliche die Differentiation ausgeführt werden soll.

Diese Gleichungen lassen sich aber einfach so schreiben

$$\text{I. } d\left(T \cdot \frac{dx}{ds}\right) = 0 \qquad \text{II. } d\left(T \cdot \frac{dy}{ds}\right) = g\,ds.$$

Aus diesen beiden Differentialgleichungen nun muss sich die Gleichung der Curve durch Integriren ableiten lassen. Aus I. ergiebt sich ohne Weiteres, dass

$$5)\ T \cdot \frac{dx}{ds} = c, \text{ d. h. gleich einer Constanten ist.}$$

Dies $T \cdot \frac{dx}{ds} = T \cdot \cos.\alpha$ ist aber nichts Anderes, als die Horizontalcomponente der Spannung in irgend einem Punkte. Die Gleichung 5) besagt also, dass

„die Horizontalcomponente der Spannung in allen Punkten dieselbe ist."

Da die Curve durch Aufhängen eines Fadens gebildet ist, so wird sie jedenfalls einen tiefsten Punkt haben. Für diesen wird jedenfalls die Ordinate ein Minimum sein müssen, also $\frac{dy}{dx} = 0$ — wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass wir die Ordinate bereits als eine Function der Abscisse ansehen dürfen. Ist aber $\frac{dy}{dx} = tg\alpha = 0$, so ist $\cos.\alpha = 1$, also auch $\frac{dx}{ds} = 1$. Für den tiefsten Punkt C. der Kettenlinie also ist $T = c$, d. h. die Constante c ist nichts Anderes, als die Spannung, welche im tiefsten Punkte stattfindet. Ausserdem ergiebt sich hieraus, dass in C bloss eine horizontale Spannung stattfindet. — Da wir nun bereits wissen, dass Spannung nichts weiter ist, als die Resultante aller nach irgend einer Seite angreifender Kräfte, so ist sie hier in C also offenbar dem Gewichte eines gewissen Bogenstücks m gleich, das eine uns zwar noch unbekannte, aber constante Länge hat. Wir sind also jedenfalls berechtigt $T\frac{dx}{ds} = c = gm$ zu setzen. Daraus folgt aber, dass $T = gm\frac{ds}{dx}$ ist, welches also der Ausdruck für die Spannung eines beliebigen Punktes M ist. Führen wir aber diesen Werth von T in die Gleichung II. ein, so ist:

$d\left[gm\,\frac{ds}{dx}\,\frac{dy}{ds}\right] = g\,ds$, oder da g und m constant sind: $gm\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) = g\,ds$ oder

$$\text{III) } m\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) = ds.$$ Integriren wir diese Gleichung, so wird

$m\frac{dy}{dx} = s + C^1$ oder $m\,tg\,\alpha = s + C^1$ sein. Zählen wir nun das s von dem tiefsten Punkte aus, so ist also für $s = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha = 0$. Dann muss aber offenbar $C^1 = 0$ sein.

Demnach ist: $6)\ m\,tg\,\alpha = s.$

Aus dieser Gleichung sowie aus III. ist das Einheitsgewicht g ganz herausgefallen. Die Gestalt der Kettenlinie ist also von der Schwere ganz unabhängig. Wenn sich also auch die Schwere

ändert, z. B. wenn wir den Faden auf einem hohen Berge oder einer schiefen Ebene anbringen, so hat das auf die Gestalt der Kettenlinie keinen Einfluss. Dieser Umstand ist deshalb von Wichtigkeit weil wir jetzt die Kettenlinie als eine geometrische Curve ansehen können.

Die Gleichung 6) giebt ganz genau die Gestalt der Curve an, indem sie den Zusammenhang zwischen dem Bogen und dem Winkel, den die Tangente mit der X Axe bildet, anzeigt. Diese Art der Bestimmung einer Curve ist eine ganz eigenthümliche. Denn da der Winkel M N L, welchen die Tangente an M mit der an den tiefsten Punkt C gezogenen Tangente bildet, ebenfalls gleich α ist, so wird also, wenn wir den Bogen wieder von C aus zählen, durch 6) sowohl die Grösse des auf der Kettenlinie zurückgelegten Weges angegeben, als auch (durch tg α) die Änderung der Richtung auf diesem Wege. Diese beiden Grössen s und tgα können wir als eine Art von Coordinaten ansehen, die jedenfalls den Vorzug haben, dass sie sehr naturgemäss sind, indem sie sich ja unmittelbar aus der Curve selbst ergeben und man dadurch die sonst üblichen, eigentlich willkürlichen Coordinatenaxen vermeidet, die ja mit der Curve zunächst in gar keinem Zusammenhange stehen. Die Versuche jedoch, ein solches naturgemässes Coordinatensystem ganz allgemein in die analytische Geometrie einzuführen, also allgemein die Länge des Bogens als Funktion der Richtungsveränderung anzusehn, sind aus praktischen Rücksichten bald wieder aufgegeben und zwar wohl hauptsächlich deshalb, weil der Begriff des Bogens selbst kein einfacher ist, da ja ein Bogen stets als die Grenze eines aus unendlich kleinen Seiten bestehenden Polygons anzusehen ist. Für die Theorie indess bleibt dieses merkwürdige Coordinatensystem, welches sich bei der Kettenlinie ganz von selbst ergiebt, interessant und darum unsere Curve eine sehr merkwürdige.

Um die Gleichung der Kettenlinie zwischen rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten, gehen wir auf III) zurück und setzen darin $ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ dadurch wird

$$m\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

oder wenn wir zur Abkürzung $\frac{dy}{dx} = p$ setzen:

$$m\, dp = dx\sqrt{1+p^2} \text{ oder } dx = \frac{m\, dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

oder

$$7)\ x = m\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + C_{,,}$$

Dieses irrationale Integral lässt sich auf mehrfache Weise zu einem rationalen umformen. Am einfachsten geschieht dies wohl, indem man $\sqrt{1+p^2} = p + z$ oder $p = \frac{1-z^2}{2z}$ setzt, wo z eine reine Veränderliche bezeichnet. Dadurch wird nämlich

$$dp = d\left(\frac{1-z^2}{2z}\right) = \frac{-2z.2z+(z^2-1)2}{4z^2}\cdot dz = -\frac{z^2+1}{2z^2}\cdot dz \text{ und}$$

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{1-z^2}{2z} + z = \frac{z^2+1}{2z}$$

wird. Durch Substitution dieser Werthe in das Integral bekommen wir:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = -\int \frac{z^2+1}{2z^2}\, dz \frac{2z}{z^2+1} = -\int \frac{dz}{z} = -\log z = -\log(-p+\sqrt{1+p^2})$$

dadurch wird

$$8)\ x = -m \log(-p+\sqrt{1+p^2}).$$

Das Hinzufügen der Constante können wir vermeiden, wenn wir die Bestimmung treffen, dass die Ordinaten-Axe durch den tiefsten Punkt gehen soll, denn dann ist ja für $\frac{dy}{dx} = p = 0$, auch $x = 0$. Setzen wir aber in 8) $p = 0$, so wird $x = -m \log(+1) = 0$. Die Constante $C_{,,}$ ist also $= 0$. die Gleichung 8) lässt sich offenbar auch so schreiben

$$9)\ e^{-\frac{x}{m}} = -p + \sqrt{1+p^2}$$

Daraus lässt sich aber leicht $e^{+\frac{x}{m}} = \frac{1}{e^{-\frac{x}{m}}}$ berechnen. Denn es ist:

$$e^{\frac{x}{m}} = \frac{1}{-p+\sqrt{1+p^2}} = \frac{p+\sqrt{1+p^2}}{+1} = +(p+\sqrt{1+p^2}) \text{ oder}$$

$$10)\ e^{\frac{x}{m}} = +p+\sqrt{1+p^2}$$

Subtrahiren wir 9) von 10), so erhalten wir:

$$11)\ \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = p = \frac{dy}{dx}.$$ Addiren wir beide:

$$12)\ \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = \sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{ds}{dx}$$

Die Integration dieser beiden Gleichungen ist leicht. Sie ergiebt aus 11)

$$\text{IV)}\ y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right), \text{ und aus 12): V) } s = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{\frac{-x}{m}}\right)$$

Dass in der letzten dieser beiden Gleichungen keine Constante hinzuzufügen nöthig war, ergiebt sich daraus, dass für $x = 0$ auch $s = 0$ ist, weil ja bereits die Ordinatenaxe durch den tiefsten Punkt gelegt ist, von wo aus s gezählt wird. Denn setzen wir in V) $x = 0$, so wird $s = \frac{m}{2}(1-1) = 0$.

Um aber auch bei IV.) das Hinzufügen einer Constante zu vermeiden, wollen wir den Anfangspunkt unserer Coordinaten fixiren, was bis jetzt noch nicht geschehen ist. Wir wollen nämlich an-

nehmen, dass derselbe auf der Y Axe um die Grösse m unterhalb des tiefsten Punktes liegt, dass also dieses m die kleinste Ordinate ist. Denn dann ist offenbar für $x = O$ auch $y = m$. Setzen wir aber in IV) $x = O$, so wird $y = \frac{m}{2}\left(1 + 1\right) = m$, also ist daselbst die Constante $= O$ die Gleichung IV) ist die gewöhnliche Form, in der die Gleichung der Kettenlinie angegeben wird. Sie ist eine transcendente und die Kettenlinie also eine der sogenannten transcendenten Linien.

Vergleichen wir II) und V) so kommen wir auf die Gleichung 6) zurück. Aus 12) und IV. ergiebt sich eine neue Gleichung.

$$\text{VI)}\quad \frac{y}{m} = \frac{d\,s}{d\,x} = \frac{1}{\cos.\,\alpha.} \quad \text{oder } y = \frac{m}{\cos.\,\alpha.}$$

Hier erscheint also die Ordinate als eine Funktion der Richtungsveränderung. Aus 6) und VI) folgt auch noch die Gleichung $s = y \sin.\,\alpha$. Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen IV) und V) erhalten wir: $y + s = m\, e^{\frac{x}{m}}$ und $y - s = m\, e^{-\frac{x}{m}}$ und durch Multiplikation beider

$$\text{VII.}\quad y^2 - s^2 = m^2$$

Nachdem wir nun so die wichtigsten Gleichungen der Kettenlinie abgeleitet haben, können wir daraus leicht sowohl die Gestalt der Curve, als ihre wesentlichsten Eigenschaften herleiten.

§. 3.

Eigenschaften der Kettenlinie.

Bei der Untersuchung der Gestalt der Curve legen wir am Besten die Gleichung (IV) zu Grunde:

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m.}} + e^{-\frac{x}{m.}}\right).$$

Da für $x = O$ auch $y = m$ wird, so durchschneidet die Curve die Y Axe also im Abstande m vom Anfange der Coordinaten, was wir bereits oben gesehen haben. Ist also C (Fig. IV) der tiefste Punkt u. O Anfang der Coordinaten, so ist $CO = m$. Da nun C der tiefste Punkt ist, so ist die Ordinate desselben ein Minimum. Die Curve nähert sich also in dem tiefsten Punkte der X Axe am meisten und entfernt sich auf beiden Seiten desselben immer weiter von ihr. Unsere Curve hat also mit der X Axe natürlich keinen Punkt gemein. Wenn wir statt x einmal $-x$ einführen, so wird an der Gleichung IV) offenbar Nichts geändert. Daraus folgt, dass zwei Punkte der Kettenlinie, welche gleiche aber entgegengesetzte Abscissen haben, dieselben Ordinaten haben. Wir sagen also, dass die Kettenlinie symi metrisch gegen die Y Axe liegt. Der tiefste Punkt C ist Scheitel der Curve und theilt die Curve in zwe congruente Arme. Da ferner die Ordinaten nach beiden Seiten von C aus stets zunehmen, so kehrt

die Curve also ihre convexe Seite der Abscissenaxe zu. Dasselbe Resultat erhalten wir auch durch die Betrachtung des zweiten Differentialquotienten. Nach 6) ist:

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{m}$. Wird aber II) nochmal differentiirt, so ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2m}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$

oder mit IV) verglichen 2) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{m^2}$.

Da aber für jeden Punkt der Kettenlinie stets die Ordinate positiv ist — denn die Kettenlinie liegt ja ganz auf Seite der positiven X Axe —, so ist der Ausdruck 2) also stets positiv. Ist aber der II. diff. Quotient positiv, so ist die Curve gegen die X Axe convex.

Sehr einfache Formeln erhalten wir für die Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale der Kettenlinie, denn es ist:

die Tangente $= T = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, oder da $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{m}$ ist:

$T = y\sqrt{1 + \frac{m^2}{s^2}} = \frac{y}{s}\sqrt{s^2 + m^2}$ oder nach VII) des §. 2. I) $T = \frac{y^2}{s}$.

Ferner ist $N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + \frac{s^2}{m^2}}$ also II) $N = \frac{y^2}{m}$.

Die Subnormale ist $Sn = y \cdot \frac{dy}{dx}$ oder III) $Sn = \frac{ys}{m}$. Die Subtangente endlich ist

$St = -y \cdot \frac{dx}{dy}$ oder: IV) $St = -y\frac{m}{s}$,

wo sich das negative Vorzeichen des letzten Ausdrucks blos auf die entgegengesetzte Lage der Subtangente und Subnormale bezieht. — Aus diesen Formeln ergeben sich mehrere merkwürdige Eigenschaften unserer Curve, denn wenn BM die Tangente an den Punkt M der Kettenlinie ist, MP die Ordinate dieses Punktes und PN ein vom Fusspunkte der Ordinate auf die Tangente gefälltes Loth, so ist offenbar: $MB.MN = MP^2$ oder $T.MN = y^2$. Vergleichen wir dies aber mit I. so folgt, dass: 3) $s = MN$ ist. Der Bogen $s = CM$ lässt sich also hier sehr einfach durch eine Gerade vollkommen genau darstellen, womit also die sogenannte Rectification der Kettenlinie vollbracht ist. Der Bogen ist nämlich, da $s = m\,tg\alpha$ ist, stets ein aliquoter Theil von m. Da aber $\triangle MPN = \alpha$ ist, so ist $s = NP\,tg\,\alpha$. Also stets 4) $m = NP = CO$. Ist etwa $\alpha = 45^0$, so ist $tg\alpha = 1$ also $s = m$. also dann das Dreieck MPN gleichschenklig. Hieraus folgt also, dass das vom Fusspunkte der Ordinate auf die Tangente gefällte Loth stets gleich dem Parameter m der Kettenlinie ist, was auch aus II) leicht hätte hergeleitet werden können. (Für den besonderen Fall, dass $tg\alpha = 1$ ist, ist dann offenbar $y = m\sqrt{2}$). Da $s = MN$ ist, so folgt leicht, dass N ein Punkt der Evolvente der Kettenlinie ist, indem ja in Wahrheit hier der Bogen CM abgewickelt erscheint. Aus der merkwürdigen Eigenschaft, dass das Loth vom Fusspunkte der Ordinate auf die Tangente stets gleich m ist, hat

Gudermann: Crelle Journal, 6 pag. 324 folgende Construction einer geradlinigen Directrix hergeleitet, indem er sagt: „Stellt K S P N ein Lineal in der Form eines Rechtecks vor, dessen Breite P N = m ist, so kann man die eine Seite dieses Lineals, das mit dem Punkte N sich anfänglich in C und mit dem Punkte P dann in O befindet, an der convexen Seite der Curve drehen oder abdrücken, und die frei gewordene Seite erscheint dann als von dem Bogen C M abgewickelt, mit dem sie gleich lang ist; die andere Ecke P des Lineals wird durch eine solche Bewegung genöthigt, eine gerade Linie zu beschreiben.

Durch diese interessante Construction einer Geraden mit Hülfe der Kettenlinie kommt Gudermann zu der Vermuthung, dass sich daraus vielleicht umgekehrt die Construction eines Instruments herleiten liesse, mittelst dessen man die Kettenlinie selbst beschreiben könne, so wie man andere Curven z. B. die Kegelschnitte beschriebe.

Ich bemerke hierüber, dass die Erfindung eines solchen Instruments denn doch wohl seine Schwierigkeiten haben dürfte. Denn wenn blos die Abscissenaxe, welche hier als geradlinige directrix erscheint, und das rechtwinklige Lineal gegeben ist — also auch der Parameter m — so kann man schwerlich, ohne das Bildungsgesetz der Kettenlinie zu Hilfe zu nehmen, eine Art Lineal construiren, dessen eine Ecke die Kettenlinie beschreibt, während die andere an einer Geraden hingleitet, da es ja unbedingt nothwendig ist, dass sich diese beschreibende Ecke auf der Evolvente der Kettenlinie bewegt. Ich glaube daher, dass eine solche Construction blos dann ausführbar wäre, wenn diese Evolvente eine möglichst einfache Curve wäre. Dem ist aber nicht so, wie wir später sehen werden, sondern sie ist ebenfalls eine transcendente Curve. Auch habe ich nicht gehört, dass die Construction eines solchen Instrumentes je gelungen wäre. —

Eine andere bekannte Eigenschaft der Kettenlinie ergiebt sich aus der Betrachtung des Werthes für den Krümmungsradius. Denn es ist:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(1 + \frac{s^2}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{y}{m^2}} = \left(\frac{m^2 + s^2}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{m^2}{y}.$$

$$\varrho = \left(\frac{y^2}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{m^2}{y} = \frac{y^3}{m^3} \cdot \frac{m^2}{y} \quad \text{oder V)} \quad \varrho = \frac{y^2}{m}.$$

Die Vergleichung mit II) ergiebt, dass bei der Kettenlinie die Normale stets gleich dem Radius der Krümmung ist. Da aber der Krümmungsmittelpunkt stets in der Richtung der Normalen liegt, so ist also derselbe dadurch vollkommen bestimmt. Die Werthe für die Ordinaten des Krümmungsmittelpunkts lassen sich leicht aus der Figur ableiten, denn wenn M D = M M¹ gemacht ist, so ist also M¹ Krümmungsmittelpunkt für M. Also

5) $M^1 p = \beta = 2.\ MP = 2\,y$ und

6) $Op = \alpha = Pp - OP = Sn - x = \frac{y\,s}{m} - x$

wo indess, wie leicht zu sehen, zu einem positiven x ein negatives α und zu einem negativen x ein positives α gehört. Da also hier α an sich negativ ist, so muss es richtiger heissen

$$\alpha = x - \frac{y\,s}{m}.$$

Um die Gleichung der Evolute zu erhalten, muss ich diesen letzten Werth von α noch umformen.

Da aber $s = \sqrt{y^2 - m^2}$ oder nach 5) $= \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4m^2}$ ist, so ist

$$\alpha = x \frac{\beta}{4m}\sqrt{\beta^2 - 4m^2} \text{ oder 7) } x = \alpha + \frac{\beta}{4m}\sqrt{\beta^2 - 4m^2}.$$

Aus 5) und 7) nun muss ich die Werthe von x und y, die hier blos durch α und β ausgedrückt sind, in die Gleichung der Kettenlinie einsetzen, wenn ich die Gleichung der Evolute erhalten will. Wollten wir dazu aber die Gleichung IV) des §. 2 gebrauchen, so würde die gesuchte Gleichung sehr unbequem werden. Wir wollen daher lieber erst diese Gleichung

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{\frac{-x}{m}}\right)$$

nach x auflösen und dann die obigen Werthe einführen. — Setzen wir

$$e^{\frac{-x}{m}} = \frac{1}{e^{\frac{x}{m}}}, \text{ so wird } y = \frac{m}{2}\left\{e^{\frac{x}{m}} + \frac{1}{e^{\frac{x}{m}}}\right\} \text{ oder } y\,e^{\frac{x}{m}} = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{2x}{m}} + 1\right)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, welche für $e^{\frac{x}{m}}$ den Werth giebt:

$$e^{\frac{x}{m}} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - m^2}}{m}, \text{ oder VI) } x = m \log\left(\frac{y \pm \sqrt{y^2 - m^2}}{m}\right)$$

und ist eine neue vollkommen richtige Gleichung der Kettenlinie. Werden in dieselbe aus 5) und 7) die Werthe von y und x eingesetzt, so erhalten wir;

$$\alpha + \frac{\beta}{4m}\sqrt{\beta^2 - 4m^2} = m \log\left(\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4m^2}}{2m}\right) \text{ oder}$$

$$8)\ \alpha = m \log\left(\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4m^2}}{2m}\right) - \frac{\beta}{4m}\sqrt{\beta^2 - 4m^2}$$

als Gleichung der Evolute der Kettenlinie. — Wird $\beta = 2m$, so wird $\alpha = o$, d. h. die Evolute schneidet die Ordinatenaxe im Abstande 2m. Dies ergiebt sich auch daraus, dass im tiefsten Punkte C die Normale gleich m ist, also auch $\varrho = m$. Die Evolute besteht aus zwei Zweigen, deren einer ganz auf Seite der positiven Abscissen und der andere auf Seite der negativen Abscissen liegt. Die Ordinatenaxe theilt dieselbe in 2 congruente Hälften und zwar so, dass zu den Punkten der Kettenlinie, welche positive Abscissen haben, Evolutenpunkte mit negativen Abscissen gehören und umgekehrt. In C^1 hat die Evolute einen Rückkehrpunkt. Beide Zweige derselben wenden der Abscissenaxe ihre concave Seite zu. Offenbar ist $2\varrho = 2N$ Tangente an die Evolute; diese ist also gleich $\frac{2y^2}{m}$ oder nach 5) $= \frac{\beta^2}{2m}$. Die Tangenten der Evolute wachsen also proportional dem Quadrate der Ordinate. —

Eine andere merkwürdige Eigenschaft der Kettenlinie ergiebt sich aus der Betrachtung der Fläche derselben. Heisst die Fläche f, so ist bekanntlich

$$df = y\,dx,$$

nun ist aber nach VI): $y = m.\ \frac{ds}{dx}$. Folglich ist

$$df = m\,ds, \text{ also } f = m.\int ds,$$

wo natürlich das Integral zwischen den bestimmten Grenzen zu nehmen ist. Da aber für $s = 0$ (d. h. im Anfange der Coordinaten) auch $f = o$ ist, so ist VII) $f = ms$, ohne dass eine Constante hinzugefügt zu werden braucht.

Der Ausdruck $f = ms$ bezeichnet also die Fläche C O P M. Nun ist aber ms doch nichts Anderes, als der Inhalt des Rechtecks M N P E. Folglich ist: M N E P = C O P M.

Damit ist also auch die geometrische Quadratur der Kettenlinie sehr einfach erreicht.

§. 4. Fortsetzung.

Ueber die Constante der Kettenlinie.

Die Gleichung der Kettenlinie ist an eine einzige Constante gebunden, von der wir nur wissen, dass sie einer gewissen Bogenlänge der Curve gleich ist. Zu dem Begriffe der Kettenlinie gelangten wir aber, indem wir uns eine bestimmte Fadenlänge an zwei festen Punkten aufgehängt dachten. Wir können also zunächst blos die Länge des Fadens und die Coordinaten der Aufhängepunkte als gegeben ansehen. Es muss sich uns also die Frage von selbst aufdrängen, wie wir aus diesen Daten die Constante m, welche allein die Gestalt der Kettenlinie bedingt, berechnen können.

A und B (Fig. V) seien die gegebenen Aufhängepunkte, C der tiefste Punkt, durch welchen wieder die Ordinatenaxe gelegt sein mag. Ziehe ich dann $BE \perp CE$ und $AD \perp DE$, so sind B E und D E die Abscissen von B und A, und A D die Ordinate von A, wenn B D als Abscissenaxe angesehen wird. Ausser diesen drei Grössen ist nun noch die Länge des Fadens $ACB = l$ gegeben. Da nun die Abscissen der Punkte A und B verschiedene Vorzeichen haben, so wollen wir setzen: $DE = -m_{,}$ und $BE = m_{,,}$ und also $BD = m_{,,} - m_{,}$. Da ferner auch die Bögen von C nach entgegengesetzter Richtung gezählt werden, so wollen wir setzen $AC = -l'$ und $CB = l''$, so dass also $ACB = l'' - l' = l$ ist. Ausserdem sei $AD = n$. Auf diese neue Abscissenaxe, welche uns blos dazu diente, den Punkt A festzulegen, wollen wir die Gleichungen der Kettenlinie nicht beziehen. Wir wollen vielmehr wieder O als Anfang der Coordinaten ansehen, wo wieder $CO = m$ ist. Auf dies System bezogen haben wir dann für B die Coordinaten:

$$x = m_{,,} \text{ und } y = Eo = CE + CO \text{ und für A:}$$

$$x = -m, \text{ und } y = CE + CO - AD.$$

Die Gleichungen IV) und V) des §. 2 nehmen demnach folgende Gestalt an:

$$1)\ l_{\prime\prime} = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{m_{\prime\prime}}{m}} - e^{\frac{-m_{\prime\prime}}{m}}\right),\quad 2)\ CE + CO = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{m_{\prime\prime}}{m}} + e^{\frac{-m_{\prime\prime}}{m}}\right)$$

$$3)\ -l_{\prime} = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{-m_{\prime}}{m}} - e^{\frac{m_{\prime}}{m}}\right),\quad 4)\ CE + CO - AD = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{-m_{\prime}}{m}} + e^{\frac{m_{\prime}}{m}}\right).$$

Werden nun 1) und 2) sowie 3) und 4) addirt, sodann aber 3) von 4) und 1) von 2) subtrahirt, so erhalten wir vier neue Gleichungen:

$$5)\ l_{\prime\prime} + CE + CO = m \cdot e^{\frac{m_{\prime\prime}}{m}}.\quad 6)\ -l_{\prime} + CE + CO - AD = m\, e^{\frac{-m_{\prime}}{m}}.$$

$$7)\ l_{\prime\prime} + CE + GO = m \cdot e^{\frac{-m_{\prime\prime}}{m_{\prime}}}\quad 8)\ +l_1 + CE + CO - AD = m \cdot e^{\frac{m_{\prime}}{m}}.$$

Wird nun 8) von 5) und 7) von 6) subtrahirt, so wird

$$9)\ (l_{\prime\prime} - l_{\prime}) + AD = m\left(e^{\frac{m_{\prime\prime}}{m}} - e^{\frac{m_{\prime}}{n}}\right)\quad \text{und}\quad 10)\ (l_{\prime\prime} - l_{\prime}) - AD = -m\left(e^{\frac{-m_{\prime\prime}}{m}} - e^{\frac{-m_{\prime}}{m}}\right).$$

Die Multiplication beider Gleichungen ergiebt:

$$(l_{\prime\prime} - l_{\prime})^2 - AD^2 = -m^2\left(e^{\frac{m_{\prime\prime}}{m}} - e^{\frac{m_{\prime}}{m}}\right)\left(e^{\frac{-m_{\prime\prime}}{m}} - e^{\frac{-m_{\prime}}{m}}\right)\ \text{oder}$$

$$(l_{\prime\prime} - l_{\prime})^2 - AD^2 = -m^2\left[-\left(e^{\frac{m_{\prime\prime}-m_{\prime}}{m}}\right) - e^{\left(\frac{m_{\prime\prime}-m_{\prime}}{m}\right)} + 2\right] = m^2\left(e^{\frac{m_{\prime\prime}-m_{\prime}}{m}} - 2 + e^{\frac{-(m_{\prime\prime}-m_{\prime})}{m}}\right).$$

Die Klammer ist aber ein vollständiges Quadrat; also:

$$(l_{\prime\prime} - l_{\prime})^2 - AD^2 = m^2\left(e^{\frac{m''-m'}{2m}} - e^{\frac{-(m''-m')}{2m}}\right)^2\ \text{oder}$$

$$\sqrt{(l'' - l_{\prime})^2 - AD^2} = m\left(e^{\frac{m''-m'}{2m}} - e^{\frac{-(m''-m')}{2m}}\right),$$

oder wenn $l_{\prime\prime} - l_{\prime} = l$, $AD = n$ und $m_{\prime\prime} - m_{\prime} = BD = a$ gesetzt wird:

$$I)\ \sqrt{l^2 - m^2} = m\left(e^{\frac{\alpha}{2m}} - e^{\frac{-\alpha}{2m}}\right).$$

Noch einfacher wird diese transcendente Gleichung, wenn wir

$$\frac{a}{2m} = \alpha,\ \text{oder}\ m = \frac{a}{2\alpha}\ \text{setzen:}\quad \frac{\sqrt{l^2 - n^2}}{a} = \frac{1}{2\alpha}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right).$$

Es wird somit durch die gegebenen Stücke l, n und a die Unbekannte α vollständig bestimmt und dadurch also auch die Constante m. Die Lösung der Gleichung nach α ist indess blos durch Näherung möglich. Eine sehr einfache derartige Lösung giebt Duhamel in seiner Mechanik.

Durch die Gleichung I) nun sind wir in den Stand gesetzt, folgenden merkwürdigen Satz abzuleiten.

Sind von dem Punkte P (Fig. VI) der Horizontalen PQ nach verschiedenen Punkten der

Verticalen NQ Fäden ausgespannt, so dass dieselben ursprünglich sämmtlich als Gerade erscheinen, und wir verschieben dann den Punkt P auf der Horizontalen etwa nach M, so sind die Kettenlinien, welche jetzt die einzelnen Fäden bilden, sämmtlich dieselben.

Denn für die einzelnen Kettenlinien, welche durch M einerseits und durch $q_{,}$ $q_{,,}$ $q_{,,,}$ anderseits gehen, ist stets. $Pq_{,}^2 - Qq_{,}^2 = Pq_{,,}^2 - Qq_{,,}^2 = Pp_{,,,}^2 - Qq_{,,,}^2 = PQ^2$. Die Grössen P $p_{,}$ P $q_{,,}$ P $q_{,,,}$ sind aber nichts Anderes, als die Längen der Kettenlinien und Q $q_{,}$ Q $q_{,,}$ Q $q_{,,,}$ die Höhe der Aufhängepunkte über dem Horizonte. Die ersteren Grössen entsprechen also oben dem l und die letzteren dem A D = n. Wir wissen demnach, dass bei all diesen Kettenlinien der Ausdruck $l^2 - n^2_{,,}$ also auch $\sqrt{l^2 - n^2}$ einer Constanten gleich ist. Oben haben wir aber gesehen, dass die Kettenlinie durch die Constante m, d. h. durch $\frac{\sqrt{l^2 - n^2}}{a}$ bedingt wird. Dies a aber ist hier nichts Anderes, als MQ, welches also auch bei allen diesen Kettenlinien dasselbe ist. Somit ist also offenbar, dass alle diese Kettenlinien dieselbe Constante haben; sie sind also ihrer Gestalt nach dieselben.

Allgemeiner lautet dieser Satz: Kettenlinien, welche einen Aufhängepunkt gemein haben, und deren andere Aufhängepunkte in derselben Verticalen liegen, sind dieselben, d. h. congruent.

Natürlich hätten wir auch die Horizontale P Q selbst als einen Faden ansehen können, der nach Verschiebung des Punktes P nach M eine Kettenlinie mit den Anhängepunkten M und Q bilden würde. Auch diese ist den vorher Besprochenen congruent. Denn hier ist offenbar

$$AD = n = 0, \text{ also } \sqrt{l^2 - n^2} = l = PQ \text{ und } a = MQ,$$

welche beide wieder constant sind.

§. 5.

Mechanische Eigenschaften, Spannung und Schwerpunkt.

Im §. 2 haben wir für die am tiefsten Punkte stattfindende Spannung gefunden, T = g m. und für die Spannung an einem beliebigen Punkte:

$$T = gm \cdot \frac{ds}{dx} = gm\left(\frac{1}{\cos.\ \alpha}\right) = gm \cdot \sec.\ \alpha.$$

Die Spannung ändert sich also proportional der Secante des Winkels zwischen Tangente und X Axe. Dieser Winkel ist offenbar im tiefsten Punkte am kleinsten, weil da die Tangente parallel der X Axe ist. Folglich ist auch die Spannung am tiefsten Punkte ein Minimum. Da aber die Secante mit wachsendem Winkel zunimmt, so wächst die Spannung wirklich vom tiefsten Punkte an. Dies Resultat hätten wir auch finden können durch Vergleichung der Gleichung $y = m\frac{ds}{dx}$ mit dem allgemei-

nen Ausdruck für T. Denn dadurch wird $T = g\,y$, oder $T^2 = g^2\,y^2$, oder da $y^2 = s^2 + m^2$ ist, so wird $T^2 = g^2\,s^2 + g^2\,m^2$. Da hierin aber m constant ist, so hängt T blos ab von s.

Wenn also s am kleinsten, also $= 0$ ist, so ist auch die Spannung am kleinsten. Mit wachsendem s aber wächst dieselbe. Da aber $s = 0$ im tiefsten Punkte ist, so ist also da die Spannung ein Minimum.

Vergleichen wir den Ausdruck $T^2 = g^2\,y^2$ mit dem Ausdruck für den Krümmungshalbmesser: $\varrho = \frac{y^2}{m}$, so ergiebt sich, das 2) $T^2 = g^2\,\varrho\,m$ ist, d. h. das Quadrat der an einem Punkte stattfindenden Spannung ist dem Krümmungshalbmesser proportional, denn hiesse die Spannung an einem anderen Punkte T^1 und der Krümmungsradius ϱ, so wäre daselbst $T_1{}^2 = g^2\,\varrho^1\,m$. Wird aber dies mit 2 verglichen, so haben wir: $T^2 : T_1{}^2 = \varrho : \varrho_1$. Entwicklen wir in der Hauptgleichung der Kettenlinie $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$ Die Exponentialgrössen in Reihen, so fallen alle Glieder mit ungeraden Exponenten weg, während wir die mit geraden Exponenten doppelt erhalten. Wird also noch die Division durch 2 ausgeführt, so erhalten wir:

$$3)\ y = m\left(1 + \frac{x^2}{2!\,m^2} + \frac{x\,4}{4!\,m^4} + \frac{x\,6}{6!\,m^6} + \ldots\right)$$

Nehmen wir nun an, dass $m = \infty$ wird, so fallen alle Glieder in der Klammer, welche m im Nenner haben, weg und es bleibt $y = m = \infty$. Wird also die Constante m unendlich gross, so nehmen alle Ordinaten unendlich grosse, aber gleiche Werthe an.

Die Kettenlinie geht also dann in eine Gerade über, welche in unendlicher Entfernung von der Abscissenaxe parallel derselben verläuft. Der Ausdruck $T = gy$ geht alsdann über in $T = gm = \infty$, d. h. die Spannung wird, wenn die Kettenlinie in eine Gerade übergehen soll, in allen Punkten dieselbe, zugleich wird sie aber auch unendlich gross. Daraus ergiebt sich, dass ein Faden nur durch eine unendlich grosse Kraft zur geraden Linie ausgespannt werden kann. Je grösser also die spannende Kraft wird, desto mehr wird sich der gespannte Faden der geraden Linie nähern, ohne dieselbe indess (theoretisch) je erreichen zu können.

Eine sehr merkwürdige Eigenschaft hat der Schwerpunkt der Kettenlinie. Er liegt nämlich bei ihr, wie man sich kurz ausdrückt, am tiefsten, d. h. wenn man einen frei aufgehängten Faden seiner eigenen Schwere überlässt, — wo er also eine Kettenlinie bildet, — so liegt der Schwerpunkt desselben tiefer, als wenn man ihn zwingt, die Gestalt irgend einer andern Curve anzunehmen.

Um diesen Satz zu beweisen, legen wir am bequemsten ein starres Punktsystem zu Grunde, welches von parallelen Kräften getrieben wird, und entwickeln für dasselbe die sog. Momentengleichung.

Es mögen $A_1\,A_2\,A_3 \ldots$ die Punkte des Systems sein, an denen die parallelen Kräfte $P_1\,P_2\,P_3$ wirken. R sei die Resultante dieser Kräfte und M der Angriffspunkt derselben, d. h. der

Schwerpunkt des Systems. Ferner mögen die Abstände der Punkte A_1 A_2 A_3 ... von der XZ Ebene: y_1 y_2 y_3 . . . und der Abstand des Punktes M von derselben Ebene: y_0 heissen, und zwar wollen wir diese Ordinaten auf ein rechtwinkliges Ordinatensystem beziehen, dessen Y Axe eine verticale Linie, dessen XZ Ebene also eine Horizontalebene ist. Da nun allgemein nach einem statischen Gesetze das Moment der Mittelkraft (Resultante) gleich ist der Summe der Momente der Componenten, bezogen auf dieselbe Ebene, so heisst also für die XZ Ebene die Momentengleichung:

$$R\,y_0 = P_1\,y_1 + P_2\,y_2 + P_3\,y_3 \ldots + P_n\,y_n.$$

Verstehen wir nun unter den Parallelkräften Gewichte, so wirken dieselben also sämmtlich parallel der Y Axe. Bezeichnen wir dieselben daher durch y_1 y_2 . . , so bekommen wir:

$$4)\ R\,y_0 = Y_1\,y_1 + Y_2\,y_2 + Y_3\,y_3 \cdots + Y_n\,y_n = \Sigma\,Y\,y.$$

Differentiiren wir diese Gleichung, so erhalten wir, da die Ordinaten y_n unabhängig von den Kräften Y_n sind: $5)\ d\,(R\,y_0) = Y_1\,dy_1 + Y_2\,dy_2 + Y_3\,dy_3 \cdots + Y_n\,dy_n = \Sigma\,Y\,dy.$

Den Ausdruck $Y_n\,dy_n$ können wir nun aber als ein virtuelles Moment ansehen, wenn wir unter dy_n die unendlich kleine (virtuelle) Geschwindigkeit denken, welche ein Punkt des Systems erlitten hat. Stellen wir dann also die Bedingung, dass das ganze System im Gleichgewicht sein soll, so muss die Summe der virtuellen Momente gleich Null sein, also muss sein $6)\ d\,(R.y_0) = \Sigma\,Y\,dy = o.$

Wir sehen also, dass bei einem System, welches blos von Gewichten, oder, was dasselbe ist, blos von der Schwere getrieben wird, die Summe der virtuellen Momente ein vollständiges Differential ist. Ist aber, wie in 6), das Differential einer Function $R\,y_0 = o$, so muss $R\,y_0$ entweder constant oder ein Maximum, beziehungsweise ein Minimum sein.

Da aber y_0 offenbar von y_1 y_2 . . abhängt, so kann blos das letztere der Fall sein. Da aber R constant ist, so wird $R\,y_0$ ein Maximum oder Minimum, wenn y_0 ein Maximum oder Minimum wird.

Ist also ein starres, blos von der Schwere getriebenes System im Gleichgewicht, so ist die Ordinate des Schwerpunkts desselben ein Maximum oder ein Minimum, ein Satz, der natürlich auch umgekehrt Geltung hat. Da wir aber ein nicht starres System, welches im Gleichgewichte ist, zu einem starren machen können, ohne das Gleichgewicht zu stören, so gilt der entwickelte Satz auch vom Seilpolygon und der Kettenlinie. Da aber die Kettenlinie als ein aufgehängter Faden anzusehen ist und bei jedem hängenden Systeme der Schwerpunkt offenbar unter den festgehaltenen Punkten liegen muss, so ist also die Ordinate des Schwerpunktes der Kettenlinie ein Minimum.

Um die Coordinaten x_0 y_0 des Schwerpunkts eines Kettenlinienbogens zu berechnen, haben wir die Formeln $x_0 . s = \int x\,ds$ und $y_0 . s = \int y\,ds$ zu betrachten, wo beide Integrale zwischen denselben Grenzen wie der Bogen s zu nehmen sind. Nun ist: $x_0 . s = \int x\,ds = xs - \int s\,dx$; aus $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{m}$ folgt aber, dass $s\,dx = m\,dy$ ist, folglich ist: $x_0\,s = xs - m\,y$ und das ist der Werth des unbestimmten Integrals. Da wir nun oben den Bogen s stets vom tiefsten Punkte C ge-

zählt haben, wo $x = o$ und $y = m$ ist, so muss der Werth des Integrals $\int x\, ds$ also so gewählt werden, dass er für $x = o$ und $y = m$ verschwindet. Für diesen Fall ist aber $\int x\, ds = -m^2$. Die hinzuzufügende Constante lautet also $+ m^2$. Also ist

$$x_o\, s = xs - my + m^2 \text{ oder I) } x_o = x - \frac{m(y-m)}{s}.$$

Für $x = o$, wo auch $s = o$ und $y = m$ ist, wird der Ausdruck

$$\frac{m(y-m)}{s} = \frac{o}{o} \text{ da aber } s = \sqrt{y^2 - m^2} = \sqrt{(y+m)(y-m)} \text{ ist, so ist}$$

$$\frac{m(y-m)}{s} = \frac{m\sqrt{y-m}}{\sqrt{y+m}}, \text{ was für } y = m \text{ zu Null wird.}$$

Für $x = o$ ist also wirklich x_0 ebenfalls $= 0$. — Den Ausdruck für y_0 behandeln wir so: $y_0\, s = \int y\, ds$ ist mit Anwendung von 12) und IV) des §. 4 offenbar:

$$y_0\, s = \int y\, ds = \frac{m}{4}\int\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)^2 dx = \frac{m}{4}\int\left(e^{\frac{2x}{m}} + e^{-\frac{2x}{m}} + 2\right) dx \text{ oder}$$

$$y_0\, s = \frac{m^2}{8} e^{\frac{2x}{m}} - \frac{m^2}{8} e^{-\frac{2x}{m}} + \frac{mx}{2} = \frac{m^2}{8}\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right) + \frac{mx}{2}$$

$$y_0\, s = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)\cdot\frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) + \frac{mx}{2} \text{ oder:}$$

$$y_0\, s = \frac{ys}{2} + \frac{mx}{2} \text{ oder: II) } y_0 = \frac{y}{2} + \frac{mx}{2s}$$

Eine Constante hinzuzufügen ist überflüssig, denn offenbar muss für $x = o$, wo $s = o$ und $y = m$ ist, $y_0 = m$ sein. Denn der Bogen s geht für $x = o$ in den Punkt C über, die Ordinate dieses Schwerpunktes muss also die Ordinate dieses Punktes sein. Für $x = o$ und $s = o$ wird aber $y_0 = \frac{m}{2} + \frac{m}{2}\cdot\frac{o}{o}$. Diesen unbestimmten Ausdruck $\frac{x}{s} = \frac{o}{o}$ müssen wir näher untersuchen. Es ist $\frac{dx}{ds} = \frac{m}{y}$ nach §. 2. Der wahre Werth ist also $= \frac{m}{m} = 1$.

Also ist für $x = o$ offenbar: $y_0 = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m$. Da aber dies der Fall ist, darf bei II) keine Constante hinzugefügt werden. — Anschaulicher wird der Werth von y_0, wenn wir in: $y_0 = \frac{ys + mx}{2s}$ setzen: $s = m\, tg\alpha$ und $y\, s = m.\, Sn$ nach III) des §. 3. Dadurch wird

$$\text{III) } y_0 = \frac{Sn + x}{2\, tg\alpha} = \frac{1}{2}(Sn + x)\cot g\, \alpha.$$

Die Coordinaten x_1 y_1 des Schwerpunkts einer durch zwei Ordinaten, der X Axe und der Kettenlinie begrenzten Fläche finden wir durch die Formeln:

$$x_1 . f = \int y x \, dx \text{ und } y_1 . f = \frac{1}{2} \int y^2 \, dx$$

wo die Integrale zwischen denselben Grenzen wie die Fläche f genommen werden müssen. — Nach VI) §. 2 ist $y\,dx = m\,ds$, folglich ist:

$\int y x dx = m \int x ds = m x s - m . \int s dx$ oder da $s dx = m dy$ ist:

$$\int y x dx = m x s - m^2 y.$$

Die Fläche $f = ms$ hatten wir auch von $x = 0$ aus gezählt, wir müssen also $\int y x dx$ so bestimmen, dass es für $x = 0$ ebenfalls verschwindet. Ist aber $x = 0$ also auch $s = 0$ und $y = m$ so ist: $\int y x dx = - m^3$. Die hinzuzufügende Constante muss also $+ m^3$ heissen. Dadurch wird:

$$x_1 \; f = x_1 \, m s = m x s - m^2 y + m^3 \text{ oder IV) } x_1 = x - m \frac{(y - m)}{s}.$$

Wir sehen also, dass $x_1 = x_0$, d. h. dass bei der Kettenlinie der Bogen und die Fläche dieselbe Schwerpunktsabscisse haben. — Für die Ordinate y_1 haben wir:

$y_1 \, f = \frac{1}{2} \int y^2 \, dx$. Da aber $y^2 = m^2 + s^2$ ist, so ist $\int y^2 \, dx = \int (m^2 + s^2) \, dx = m^2 x + \int s^2 \, dx = m^2 x + m \int s dy = m^2 x + m s y - m . \int y ds$. Oben war aber $\int y ds = \frac{y s}{2} + \frac{m x}{2}$, folglich ist $y_1 \, f = y_1 . m s = \frac{m^2 x}{2} + \frac{m s y}{2} - \frac{m s y}{4} - \frac{m^2 x}{4}$ oder:

$$y_1 . m s = \frac{m s y}{4} + \frac{m^2 x}{4}. \text{ Also ist V) } y_1 = \frac{y}{4} + \frac{m x}{4 s}$$

Eine Constante braucht hier nicht beigefügt zu werden, denn für $x = 0$ geht die Fläche offenbar in die Linie $y = m$ über. Die Schwerpunktsordinate muss aber dann $= \frac{y}{2} = \frac{m}{2}$ sein. Dies ist aber in V) der Fall. Denn für $x = 0$ wird wie in II: $y_1 = \frac{m}{4} + \frac{m}{4} \cdot \frac{0}{0}$. Da aber der wahre Werth von $\frac{x}{s} = 1$ ist, so ist also $y_1 = \frac{m}{4} + \frac{m}{4} = \frac{m}{2}$. — Die Schwerpunktsordinate der Fläche ist also halb so gross als die des Bogens.

Natürlich können wir auch wieder schreiben: $y_1 = \frac{S n + x}{4 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{4} (S n + x) \operatorname{cotg} \alpha$.

Die gefundenen Schwerpunktscoordinaten lassen sich ohne grosse Mühe construiren. — Schlage ich mit $PN = m$ (Figur VII.) um P einen Kreis, welcher die Ordinate MP in n und E schneidet, und ziehe NE, welches die X Axe in p trifft, so ist $\angle$ MN n = NP p. Denn $\angle$ MN n ist = $\angle$ MEN = PNp. Ferner ist: $\angle MnP = \alpha + \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi + \alpha}{2}$ und

$$\angle NnP = \pi - \left(\frac{\alpha}{2} + \angle NPp\right) = \pi - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi + \alpha}{2}$$

Folglich $\angle MnP = \angle NpP$. Also sind die betreffenden Dreiecke ähnlich.

Daraus folgt: $\frac{MN}{Mn} = \frac{NP}{Pp}$ Nun ist aber $MN = s$, $NP = m$ und da $MP = y$ und $n\,P = m$ ist,

so ist $Mn = y - m$. Folglich: $\frac{s}{y - m} = \frac{m}{Pp}$. Also $Pp = \frac{m(y - m)}{s}$

Nun war $x_0 = x_1 = x - \frac{m(y - m)}{s}$ Folglich ist: $x_0 = x_1 = x - Pp = OP - Pp$ oder:

$x_0 = x_1 = Op$. — Ferner war: $y_0 = \frac{1}{2}(Sn + x)\,\text{cotg}\,\alpha$. Ist also PD gleich der Subnormale Sn, so ist $x + Sn = OD$, also $y_0 = \frac{1}{2}\,OD\,\text{cotg}\,\alpha$. Treffen nun die Verlängerungen des Parometers CO und der Normale MD in D^1 zusammen, so ist $\angle D^1, = \alpha$. Also ist $OD^1 = OD\,\text{cotg}\,\alpha$. Folglich ist: $y_0 = \frac{1}{2}\,OD^1$ und $y_1 = \frac{1}{4}\,OD^1$. Die beiden Schwerpunkte sind daher leicht zu finden. Der Figur nach können es etwa die Punkte q und q^1 sein. — Da bei der Kettenlinie die YAxe als eine Vertikale angesehen wurde, so ist die Schwerpunktsordinate $p\,q_1$ nothwendig eine Schwerlinie, welche die Fläche COPM halbirt. Denn da pq parallel der Richtung der Schwere wirkt, so muss auf beiden Seiten dieser Linie dieselbe Masse liegen. Heisst also o der Punkt, in dem pq den Bogen CM trifft, so ist $CO\,po = op\,PM = \frac{ms}{2}$ Ist aber der Bogen $Co = s^1$, so muss

auch $CO\,po = ms^1$ sein. Folglich muss $ms^1 = \frac{ms}{2}$ sein oder

$$s^1 = \frac{s}{2} \text{ oder } Co = oM = \frac{1}{2}\,CM.$$

Die Abscisse des Schwerpunkts, welche für den Bogen und die Fläche dieselbe ist, ist also auch Abscisse des Halbirungspunkts des Bogens CM, oder, was dasselbe ist, die Verbindungslinie beider Schwerpunkte halbirt den Bogen CM. —

Bildet die Tangente an o mit der XAxe den Winkel α^1, so ist $s = m\,tg\,\alpha$ und $s_1 = \frac{s}{2} = m\,tg\,\alpha_1$. Folglich muss stets $tg\,\alpha = 2\,tg\,\alpha^1$ sein. Gehen wir jetzt dazu über, die Kettenlinie mit andern (transcendenten) Curven zu vergleichen.

§. 7.

Vergleichung der Kettenlinie mit andern Linien.

Denken wir uns die Kettenlinie von dem tiefsten Punkte C aus nach beiden Seiten hin abgewickelt, so bekommen wir als Evolvente der Kettenlinie eine Curve mit zwei congruenten Zweigen

CL und CL¹ (Fig. VIII), deren einer auf Seite der $-x$ und der andere auf Seite der $+x$ liegt. Beide Zweige treffen in C zusammen, in welchem Punkte die Curve also einen Rückkehrpunkt, ein Knie hat, beide Zweige wenden der X Axe ihre convexen Seiten zu und die X Axe ist für beide Zweige Asymptote, da die Tangente an die Kettenlinie niemals senkrecht auf der X Axe stehen kann, also der beschreibende Punkt N des rechtwinkligen Lineals niemals die X Axe treffen kann, so nah er ihr auch kommen mag. Da nun MN Tangente an die Kettenlinie ist, so ist sie also Normale des entsprechenden Punktes N der Evolvente. Da aber NP auf NM senkrecht ist, so ist also NP Tangente der Evolvente. Die Evolvente der Kettenlinie hat also die Eigenschaft, dass die Tangente derselben gerechnet vom Berührungspunkte bis zum Durchschnitt mit der Abscissenaxe die constante Länge NP $= m$ hat. Sie ist also die sogenannte Tractrix oder Tractoria von Huyghens. Die Differentialgleichung derselben ist also:

1) $y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = m$, wenn y und x die Coordinaten eines Punktes N derselben sind. Daraus folgt:

$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{m^2 - y^2}}{y}$ oder $dx = \frac{\sqrt{m^2 - y^2}}{y} dy$ oder 2) $x = \int \frac{\sqrt{m^2 - y^2}}{y} dy$. Nun ist

$$x = \int \frac{\sqrt{m^2 - y^2}}{y} dy = m^2 \int \frac{dy}{y\sqrt{m^2 - y^2}} - \int \frac{y\,dy}{\sqrt{m^2 - y^2}} \text{ oder da}$$

$$d\sqrt{m^2 - y^2} = -\frac{y\,dy}{\sqrt{m^2 - y^2}} \text{ ist.}$$

3) $x = \sqrt{m^2 - y^2} + m^2 \int \frac{dy}{y\sqrt{m^2 - y^2}}$ Setze ich aber $\sqrt{m^2 - y^2} = z$, so wird:

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{m^2 - y^2}} = -\int \frac{dz}{m^2 - z^2} = -\frac{1}{2m} \log \left\{\frac{m - z}{m + z}\right\} \text{ oder:}$$

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{m^2 - y^2}} = -\frac{1}{2m} \log \left(\frac{m - \sqrt{m^2 - y^2}}{m + \sqrt{m^2 - y^2}}\right) = -\frac{1}{2m} \log \left(\frac{m - \sqrt{m^2 - y^2}}{y}\right)^2$$

dies in 3) gesetzt giebt:

$$\text{I)} \begin{cases} x = \sqrt{m^2 - y^2} - \frac{m}{z} \log \left(\frac{m - \sqrt{m^2 - y^2}}{y}\right)^2 \text{ oder} \\ x = \sqrt{m^2 - y^2} - m. \log \left(\frac{m - \sqrt{m^2 - y^2}}{y}\right) \end{cases}$$

als Gleichung der Tractrix. Eine Constante ist überflüssig. Da ja für unser Coordinatensystem für $y = m$ auch $x = 0$ werden muss, was in I) wirklich der Fall ist. Mit Rücksicht darauf: dass x auch negativ sein kann, heisst die Gleichung allgemeiner: $\pm x = \pm \sqrt{m^2 - y^2} \mp m \log \left(\frac{m - \sqrt{m^2 - y^2}}{y}\right)$ Wird die Curve allge-

mein als die Curve aufgefasst, bei der die Tangenten constant sind, so hat sie im Ganzen 4 Zweige, indem zwei andere Zweige ganz auf Seite der negativen y liegt, wo sie bei $x = 0$ und $y = -m$ einen zweiten Rückkehrpunkt hat. — In Bezug auf die Constante m sehen wir zwischen Kettenlinie und Tractrix den bemerkenswerthen Unterschied, dass $y = m$ für die Kettenlinie ein Minimum, für die Tractrix aber ein Maximum ist.

$$\text{Da } \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{m^2 y}{(m^2 - y^2)^2} \text{ und } \varrho = m . \frac{\sqrt{m^2 - y^2}}{y} . -$$

Dies ϱ ist aber der Bogen $CM = s$ der Kettenline, welcher hier durch die Coordinaten von N ausgedrückt ist.

Um den Bogen s_1 der Tractrix zu finden, haben wir:

$$s^1 = \int \sqrt{1 + \frac{d x^2}{d y^2}}\, dy = \int \sqrt{1 + \frac{m^2 - y^2}{y^2}}\, dy = \int \frac{m}{y}\, dy = m \log y.$$

Für $y = m$ verschwindet s aber nicht, sondern wird $= m \log m$. Es muss also $- m \log m$ als Constante beigefügt werden.

Also ist $s^1 = m \log y - m \log m = m \log \left(\frac{y}{m}\right)$ oder da $\frac{y}{m} = \sin. NPO = \cos. \alpha$ ist, so ist:

$$\text{II) } s^1 = m \log \cos. \alpha. \text{ Demnach ist: } \frac{s}{s^1} = \frac{m \operatorname{tg} \alpha}{m \log \cos. \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\log \cos. \alpha} = \frac{CM}{CN}$$

Schlägt man mit dem Krümmungsradius der Tractrix um M einen Kreis d. h. mit $MN = s$, welcher die Ordinate MP in D und D^1 trifft, so ist $PN = m$ Tangente an diesen Kreis. Also $m^2 = PD . PD_1$, oder wenn ich $PD = y^1$ und $PD^1 = y_2$ setze, so ist: $m^2 = y^1 y_2$. Nun ist

$$\frac{PD + PD_1}{2} = \frac{PM + m + PM - m}{2} = PM = y. \text{ Also}$$

$$1)\ y_1 + y_2 = 2 y = m \left\{ e^{\frac{x}{m}} + e^{\frac{-x}{m}} \right\}. \text{ Folglich auch}$$

$$(y_1 + y_2)^2 = m^2 \left\{ e^{\frac{2x}{m}} + e^{\frac{-2x}{m}} + 2 \right\}.$$

Vergleichen wir damit $4 . y_1 y_2 = 4 m^2$, so erhalten wir:

$$2)\ y_1 - y_2 = m \sqrt{e^{\frac{2x}{m}} + e^{\frac{-2x}{m}} + 2 - 4} = m \left\{ e^{\frac{x}{m}} - e^{\frac{-x}{m}} \right\}.$$

Aus 1) und 2) aber ergiebt sich:

$$\text{II} \begin{cases} y_1 = m . e^{\frac{x}{m}} \text{ und} \\ y_2 = + m . e^{\frac{-x}{m}}. \end{cases}$$

Frage ich nun nach dem geometrischen Orte der Punkte D und D^1 d. h. nach dem geometrischen Orte derjenigen Punkte, welche auf der Ordinate des Punktes M der Kettenlinie von M um MN = s entfernt sind, so erhalte ich offenbar diesen Ort, wenn ich in II) die Indices weglasse und also y_1 und y_2 als variabel ansehe. Durch die Gleichungen II) werden dann aber zwei (transcendente) Curven dargestellt, welche mit einander identisch sind, nur dass einer positiven Abscisse der einen eine negative Abscisse der andern Curve entspricht. Sie sind also blos Zweige derselben Curve, welche beide für x = o dieselbe Ordinate y = m haben. Sie gehen also beide durch den Punkt C. Die Curve ist die sogenannte

logarithmische Linie.

Die beiden logarithmischen Linien haben in der Figur etwa die Lagen DC m und EC m_1 und zwar entspricht $y = m \,.\, e^{\frac{x}{m}}$ der Curve EC m^1 und $y = m\, e^{\frac{-x}{m}}$ der Curve DC m. Die Kettenlinie halbirt also den Raum zwischen den beiden logarithmischen Linien. Die X Axe ist, wie leicht zu sehen, Asymptote für beide logarithmische Linien.

$$\text{Aus } y = m \,.\, e^{\frac{x}{m}} \text{ folgt: } \frac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{m}} = \frac{y}{m}.$$

Heisst also γ der Winkel, den die Tangente der logarithmischen Linie mit der X Axe bildet, so ist

$$\operatorname{tg} . \gamma = \frac{y}{m}.$$

Für einen Punkt der Tractrix mit derselben Ordinate ist $\frac{y}{m} = \sin. \beta$, wenn β der Winkel ist, den die Tangente der Tractrix mit der X Axe bildet. Also ist

$$\operatorname{ty} \gamma = \sin. \beta.$$

Sind daher N und n zwei gleich hohe Punkte der Tractrix und logarithmischen Linie, also

$$NN^1 = nn^1 = y \text{ und } n_1 p_1 = m_1 \text{ so ist } \angle\, np_1 n_1 = \gamma, \text{ weil: } \operatorname{ty} \gamma = \frac{y}{m} \text{ ist.}$$

Wir ersehen daraus, dass bei der logarithmischen Linie die Subtangente stets = m, d. h. constant ist. Ausserdem haben wir dadurch ein bequemes Mittel erhalten, an jeden Punkt der logarithmischen Linie eine Tangente zu legen, wenn der gleich hohe Punkt der Tractrix bekannt ist. —

Nachträge.

Die Aufgabe an einen Punkt der Kettenlinie eine Tangente zu legen, ist leicht. Denn zieht man die Ordinate des Punktes MP, schlägt über derselben einen Halbkreis und legt von P aus m als Sehne in denselben = PN, so ist, wie leicht zu zeigen, die Verbindungslinie von M und N stets Tangente an M.

Die geometrische Lösung der Aufgabe, von einem Punkte ausserhalb eine Tangente an die Kettenlinie zu legen, ist mir nicht gelungen. Die algebraische Lösung derselben führt zu einer transcendenten Gleichung. —

Von den Gleichungen der Kettenlinie ist wohl $y = m. \text{Cos.} \left(\frac{x}{m}\right)$, wo $\text{Cos.} \frac{x}{m}$ der hyperbolische Cosinus ist, die einfachste. Wegen der dieser Arbeit gesteckten Grenzen konnte ich jedoch darauf nicht weiter eingehen. — Aus demselben Grunde habe ich auch auf die Besprechung der Kettenbrückenlinie, und der besondern Art von Kettenlinie, die durch einen elastischen Faden gebildet wird, verzichten müssen.

Clausthal, im März 1869.

E. Marx.

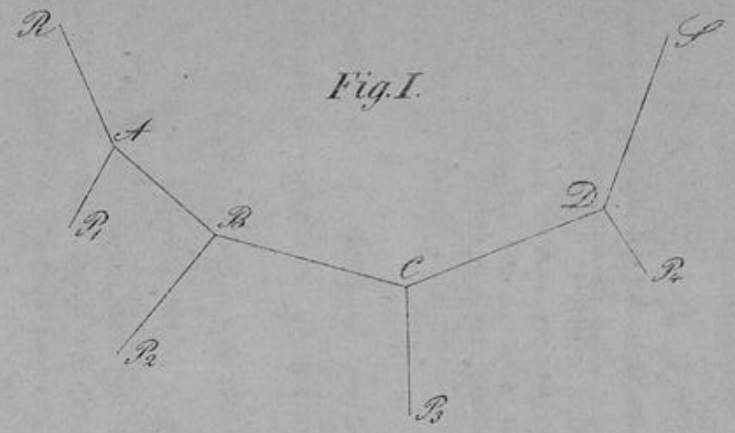


Fig. I.

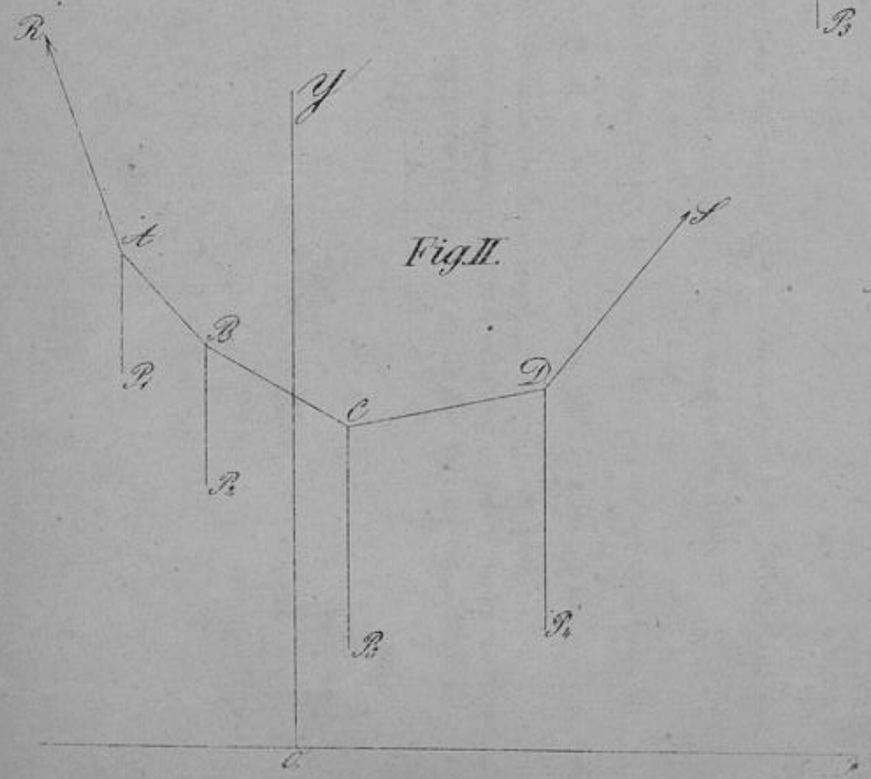


Fig. II.

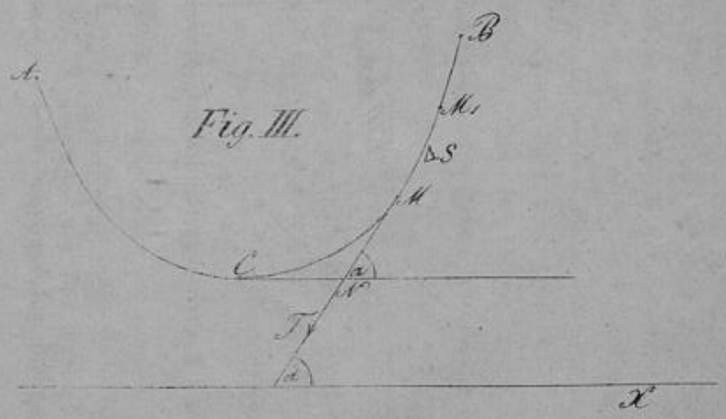


Fig. III.

Fig. IV.

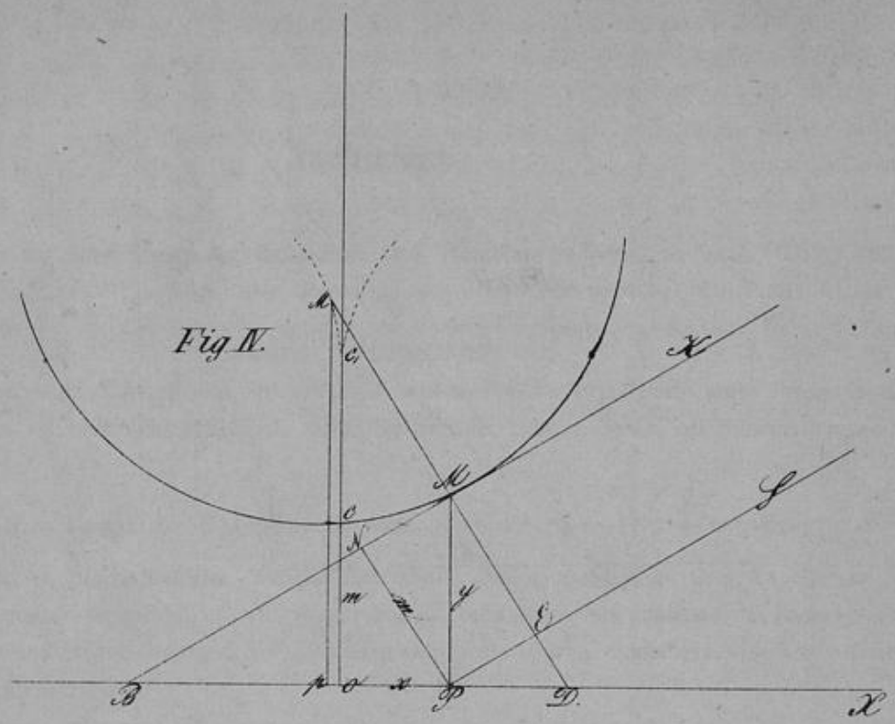
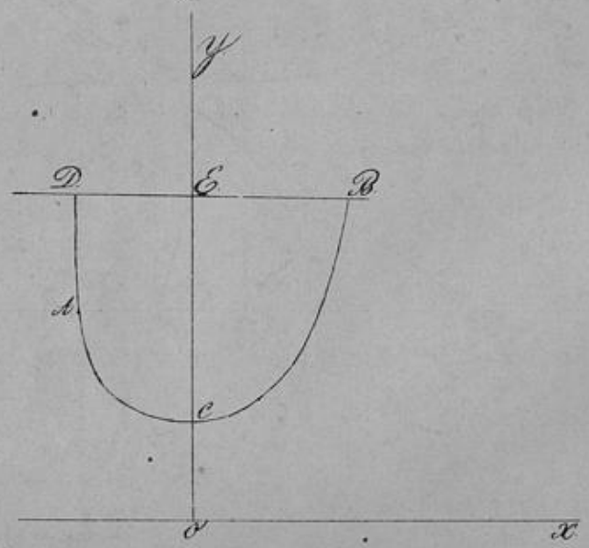


Fig. V.



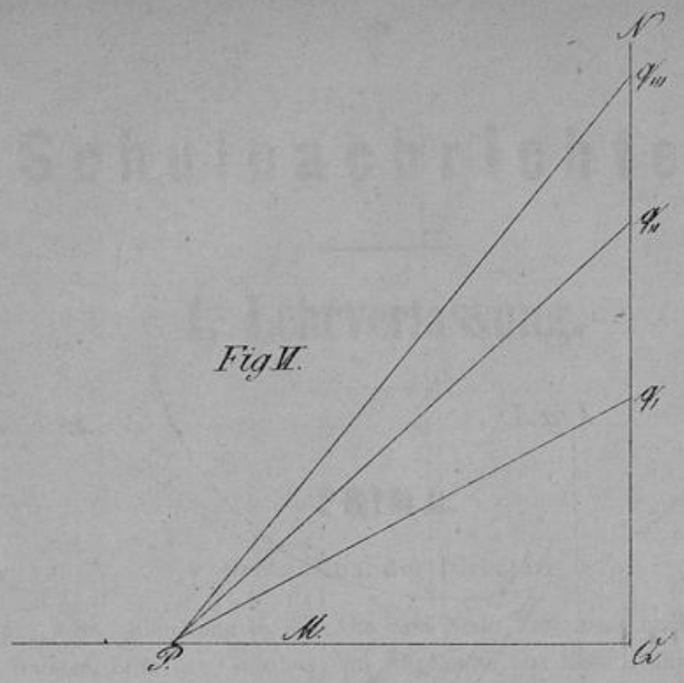


Fig. VI.

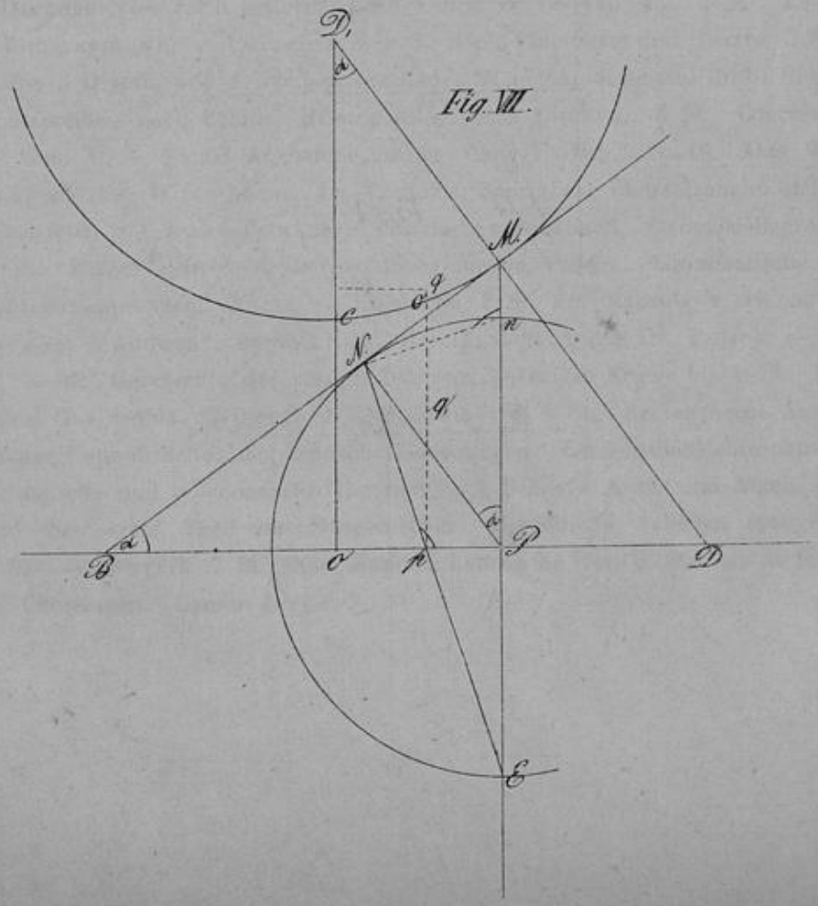


Fig. VII.

Fig III.