Entwicklung
der beiden ersten Differentialquotienten
der Näherungswerthe von Kettenbrüchen mit variablen Elementen.

Von ***Prof. Dr. H. F. Scherk.***

Trotz der grossen Anzahl von Untersuchungen, die über die Kettenbrüche, ihre Eigenschaften, ihre Convergenz, ihre Verwandlung in Reihen und umgekehrt, über die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche und ihre Beziehung zu den bekanntesten, namentlich trigonometrischen Functionen, angestellt worden sind, darf man doch behaupten, dass ganze Classen von Untersuchungen, die sich auf Kettenbrüche beziehen, bisher gänzlich unberührt geblieben sind. Wie vollführt man z. B. die ersten vier Operationen an Kettenbrüchen, natürlich so, dass das Resultat wieder in Form eines Kettenbruchs erscheint, ohne dass man sie vorher in Reihen, und diese wieder zurück in Kettenbrüche verwandelt? Welches ist die Form einer Potenz, einer Wurzel, des Logarithmen, der Differentialquotienten, oder gar des Integrals eines beliebigen Kettenbruchs? Man sollte meinen, dass solche Untersuchungen längst hätten unternommen und ihre Resultate bekannt sein müssen. Der Grund aber, dass dies nicht geschehen, liegt offenbar darin, dass die Formeln bald so weitläufig, die Resultate so zusammengesetzt werden, dass man verzweifeln muss, je zu einer allgemeinen Anwendung derselben gelangen zu können, ja dass sich mir, der ich vor vielen Jahren solche Uetersuchungen, grossentheils ohne den erwarteten Erfolg, angestellt habe, die Frage aufdrängte, ob Operationen, wie die genannten, sich für die Kettenbrüche überhaupt eignen, ob sie ihnen angemessen sind, ob sie nicht, wenn ich mich so ausdrücken darf, ihrer innern Natur, der Art ihrer Bildung widerstreben? Dass aber diese Fragen nicht in jeder Beziehung bejaht werden müssen, will ich versuchen an den nachfolgenden Untersuchungen darzulegen, aus denen wenigstens der erste Differentialquotient der Näherungswerthe eines Kettenbruchs sich in sehr darstellbarer Form ergeben hat.

I.

Jeder Kettenbruch von der Form
$$\cfrac{1}{a^{1} - \cfrac{1}{a^{11} - \cfrac{1}{a^{111} - \text{etc.}}}}$$
ist bekanntlich ein Quotient zweier ganzen rationalen Functionen der Elemente a^{1}, a^{11}, a^{111}...., welche Kettenfunctionen genannt werden mögen. Bildet man nämlich

die Functionen $\varphi(a^{1})$, $\varphi(a^{1}, a^{11})$, $\varphi(a^{1}, a^{11}, a^{111})$ u. s. f., oder, in kürzerer Bezeichnung, wenn nur eine Art von Elementen vorhanden ist, bildet man die Functionen (1, 2), (1, 3).... nach folgendem Schema:

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi(a^{1}) = (1, 1) = a^{1} \\
\varphi(a^{1}\, a^{11}) = (1, 2) = (1, 1)\, a^{11} - 1 = a^{1}\, a^{11} - 1 \\
\varphi(a'\, a''\, a''') = (1, 3) = (1, 2)\, a''' = (1, 1) - a'\, a''\, a''' - a' - a''' \\
\varphi(a'\, a''\, a'''\, a'''') = (1, 4) = (1, 3)\, a'''' - (1, 2) \\
\qquad\qquad = a'\, a''\, a'''\, a'''' - a'\, a'' - a'\, a'''' - a'''\, a'''' \\
\quad \text{u. s. f.} \\
\varphi(a'') = (2, 2) = a'' \\
\varphi(a''\, a''') = (2, 3) = (2, 2)\, a''' - 1 \\
\varphi(a''\, a'''\, a'''') = (2, 4) = (2, 3)\, a'''' - (2, 2) \\
\quad \text{u. s. f.}
\end{array}\right\} \quad (1)$$

und allgemein

$$\varphi\begin{pmatrix} h' \\ a \end{pmatrix} = (h, h) = \begin{pmatrix} h' \\ a \end{pmatrix}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} h' & (h+1) \\ a & a \end{pmatrix} = (h, h+1) = (h, h)\, a^{(h+1)} - 1$$

$$\varphi\begin{pmatrix} h' & (h+1)' & (h+2)' \\ a & a & a \end{pmatrix} = (h, h+2) = (h, h+1)\, a^{(h+2)'} - (h, h)$$

u. s. f.,

so werden bekanntlich die Näherungswerthe des obigen Kettenbruchs durch diese Kettenfunctionen in der Art bestimmt, dass, wenn man resp. Zähler und Nenner des k^{ten} Näherungswerthes durch Z_k und N_k bezeichnet,

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{Z'_k}{N'_k} = \cfrac{1}{a^{1} - \cfrac{1}{a^{11} - \cfrac{1}{a^{111} - \cfrac{1}{\cdot \atop \cdot \atop a^{k'}}}}} = \dfrac{(2, k)}{(1, k)}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und eben so

$$\frac{Z''_k}{N''_k} = \cfrac{1}{a'' - \cfrac{1}{a' - \cfrac{1}{\cdot \atop \cdot \atop a^{k'}}}} = \frac{(3, k)}{(2, k)}$$

$$\frac{Z'''_k}{N'''_k} = \frac{(4, k)}{(3, k)} \text{ wird, u. s. f.}$$

Es ist nun, ehe wir an unsere eigentliche Aufgabe gehen, erforderlich, zuer s einige Eigenschaften der Kettenfunctionon theils in Erinnerung zu bringen, theils neu zu entwickeln.

Zuerst kann man bekanntlich die Ordnung der Elemente einer Function umkehren, so, dass

$$(h, k) = (k, h) \tag{3}$$

ist. Sodann lässt sich die bekannte Eigenschaft, dass die Differenz zweier auf einander folgenden Näherungswerthe einem Bruche gleich ist, dessen Zähler = 1, auf folgende Weise bedeutend erweitern. Es werde die Differenz

$$(1, k)\,(h, l) - (1, l)\,(h, k) = \psi(k, l)$$

gesetzt, so ist

$$\psi(k, l+1) = (1, k)\left\{(h, l)\,a^{(l+1)'} - (h, l-1)\right\} - \left\{(1, l)\,a^{(l+1)'} - (1, l-1)\right\}(h, k)$$

$$= \psi(k, l)\,a^{(l+1)'} - \psi(k, l-1)$$

so dass $\psi(k, l+1)$ aus $\psi(k, l)$ und $\psi(k, l-1)$ nach demselben Schema gebildet wird, als $(1, l+1)$ aus $(1, l)$ und $(1, l-1)$. Man setze nun nach einander $l = k$, $= k+1$, $= k+2$, u. s. f., so ergiebt sich

$$\psi(k, k) = (1, k)\,(h, k) - (1, k)\,(h, k) = 0$$

$$\psi(k, k+1) = \psi(k, k)\,a^{(k+1)'} - \psi(k, k-1)$$

$$= -\left\{(1, k)\,(h, k-1) - (1, k-1)\,(h, k)\right\} = \psi(k-1, k)$$

$$= \psi(k-2, k-1) = \psi(h-1, h)$$

$$= (1, (h-1)\,(h, h) - (1, h)\,(h, h-1)$$

$$= (1, h-1)\,a^{h'} - \left\{(1, h-1)\,a^{h'} - (1, h-2)\right\} = (1, h-2)$$

Hierdurch wird

$$\psi(k, k+2) = \psi(k, k+1)\,a^{(k+2)'} - \psi(k, k) = (1, h-2)\,a^{(k+2)}$$

$$\psi(k, k+3) = \psi(k, k+2)\,a^{(k+3)} - \psi(k, k+1) =$$

$$= (1, h-2)\left(a^{(k+2)}\,a^{(k+3)} - 1\right) = (1, h-2)\,\psi(k+2, k+3)$$

$$\psi(k, k+4) = \psi(k, k+3)\,a^{(k+4)} - \psi(k, k-2)$$

$$= (1, h-2)\left\{(k+2, k+3)\,a^{(k+4)} - \psi(k, k+2)\right\}$$

$$= (l, h-2)\,(k+2, k+4)$$

und so fortfahrend erhält man

$\psi(k, l) = (1, h-2)\,(k+2, l)$, d. h. es ist

$$(1, k)\,(h, l) - (1, l)\,(h, k)) = (1, h-2)\,(k+2, l) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{4}$$

Diesen Satz hat Mobius im 6. Bande des Crelle'schen Journals pag. 225 auf eine wesentlich verschiedene Art zuerst bewiesen.

Denkt man sich die Elemente $a', a'', a''' \ldots a^{(l)}$ in 3 Gruppen zerfällt, deren erste aus den Elementen $a' a'' \ldots a^{(h-1)}$

die zweite aus den Elementen $a^{(h)} a^{(h+1)} \ldots a^{(k)}$

die dritte aus den Elementen $a^{(k+1)} a^{(k+2)} \ldots a^{(l)}$

besteht, so zeigt die Gleichung (4), dass die Unterschiede zweier Produkte aus je zwei Functionen, die aus allen Elementen, oder aus Elementen von einer oder von zwei Gruppen gebildet sind, ein Produkt giebt, dessen Factoren nur aus Elementen der äusseren Gruppen gebildet sind, so dass die Elemente

$$a^{(h-1)} \quad a^{(h)} \quad a^{(h+1)} \ldots a^{(k+1)}$$

in dieser Differenz ganz verschwunden sind, und also willkührlich angenommen werden können.

Setzt man ferner in (4) $h = 2$, so ist

$$(1,k)\,(2,l) - (1,l)\,(2,k) = (k+2, l.) \ldots\ldots (5)$$

oder $$\frac{(2,\,l)}{(1,\,l)} - \frac{(2,\,k)}{(1,\,k)} = \frac{(k+2,\,l)}{(1,\,k)\,(1,\,l)} \ldots\ldots (6)$$

welche Gleichung offenbar den Unterschied des k^{ten} und l^{ten} Naeherungswerthes des gegebenen Kettenbruches angiebt.

Der Gleichung (5), in welcher $l > k$ vorausgesetzt ist, lässt sich noch eine andere Form geben. Setzt man einfach in (5) $l = k + 1$, so ergiebt sich die bekannte Gleichung $(1,\,k)\,(2,\,k+1) - (1,\,k+1)\,(2,\,k) = 1$ oder

$$\frac{(2,\,k+1)}{(1,\,k+1)} - \frac{(2,\,k)}{(1,\,k)} = \frac{1}{(1,\,k)\,(1,\,k+1)}$$

also wenn $k+1,\ k+2 \ldots$ statt k gesetzt wird.

$$\frac{(2,\,k+2)}{(1,\,k+2)} - \frac{(2,\,k+1)}{(1,\,k+1)} = \frac{1}{(1,\,k+1)\,(1,\,k+2)}$$

$$\frac{(2,\,k+3)}{(1,\,k+3)} - \frac{(2,\,k+2)}{(1,\,k+2)} = \frac{1}{(1,\,k+2)\,(1,\,k,+3)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{(2,\,l)}{(1,\,l)} - \frac{(2,\,l-1)}{(1,\,l-1)} = \frac{1}{(1,\,l-1)\,(1,\,l)}$$

Werden diese Gleichungen addirt, so ergiebt sich

$$\frac{(2,\,l)}{(1,\,l)} - \frac{(2,\,k)}{(1,\,k)} = \frac{1}{(1\ k)\,(1,\,k+1)} + \frac{1}{(1,\,k+1)\,(1,\,k+2)} + \\ + \ldots + \frac{1}{(1,\,l-1)\,(1,\,l)}$$

Hierdurch wird folglich der Unterschied zweier beliebigen Naeherungswerth eines Kettenbruchs durch eine Reihe von Quotienten ausgedrückt, deren Zähler alle $= 1$, und deren Nenner die Nenner der Naeherungswerthe sind, die innerhalb beider Grenzen, diese eingeschlossen, liegen.

Die Gleichung (5) zeigt ferner, dass, wenn man sich die Elemente $a' a'' \ldots a^{(l)}$ in die beiden Gruppen $a' a'' \ldots a^{(k)}$ und $a^{(k+1)}, a^{(k+2)} \ldots a^{(l)}$ zerfällt denkt, aus dem Resultate rechts alle Elemente der ersten Gruppe, wie auch $a^{(k+1)}$ verschwunden sind, so dass man vermittelst derselben eine Kettenfunction durch die Differenz zweier Produkte aus Kettenfunctionen ersetzen kann, in denen $k + 1$ willkürliche Elemente vorkommen.

In Beziehung auf die Bildung der Kettenfunctionen ist noch zu bemerken, dass sich aus den Gleichungen (1), welche zeigen, wie man jede Kettenfunction aus den beiden nächstvorhergehenden bilden kann, leicht eine allgemeinere Gleichung herleiten lässt, welche zeigt, wie man jede Kettenfunction aus zwei beliebigen aufeinander folgenden bilden kann.

Es ist nämlich

$$
\begin{aligned}
(1, l) &= (1, l-1)\, a^{(l)} - (1, l-2) \\
&= \left\{(1, l-2)\, a^{(l-1)} - (1, l-3)\right\} (l, l) - (1, l-2) \\
&= (1, l-2) \left\{(l, l)\, a^{(l-1} - 1\right\} - (1, l-3)\,(l, l) \\
&= (1, l-2)\,(l, l-1) - (1, l-3)\,(l, l) \\
&= (1, l-2)\,(l-1, l) - (1, l-3)\,(l, l)
\end{aligned}
$$

Setzt man hierin wieder für $(1, l-2)$ seinen Werth $(1, l-3)\, a^{(l-2)} - (1, l-4)$ so erhält man auf ganz gleiche Weise

$$(1\ l) = (1, l-3)\,(l-2, l) - (1, l-4)\,(l-1, l)$$

und so fortfahrend gelangt man zu:

$$(1, l) = (1, l-k)\,(l-k+1, l) - (1, l-k-1)\,(l-k+2, l) \ldots (7)$$

Setzt man hierin $l = m + n$ und n für k, so wird

$$(1, m+n) = (1, m)\,(m+1, m+n) - (1, m-1)\,(m+2, m+n) \ldots (8)$$

woraus sich ergiebt, wie, wenn man die Elemente in zwei Gruppen $a' a'' \ldots a^{(m)}$ und $a^{(m+2)} . a^{(m+2)} \ldots a^{(m+h)}$ sich zertheilt gedenkt, die Function der aus allen Elementen zusammengesetzten Gruppe aus den Functionen der aus den Elementen einzelner Gruppen gebildet werden kann. Setzt man diese Gleichung unter die Form

$$(1, m)\,(m+1, m+n) = (1, m+n) + (1, m-1)\,(m+2, m+n)$$

und bemerkt, dass das letzte Glied des zweiten Theils zwei Elemente weniger enthält, als der erste Theil der Gleichung, so sieht man, dass sie dazu angewandt werden kann, ein Produkt zweier Functionen in eine Summe zu verwandeln. Ist z. B. $m = 3$, $n = 5$ und sind die Elemente $a'\ a''\ a'''\ b'\ b''\ b'''\ b''''\ b'''''$, so hat man

$$\varphi(a'a''a''')\varphi(b'b''\ldots b''''') = \varphi(a'a''a'''b'b''\ldots b''''') + \varphi(a'a'')\varphi(b''b'''\ldots b''''')$$

$$\varphi(a'a'')\varphi(b''b'''\ldots b''''') = \varphi(a'\ a''\ b''\ldots b''''') + \varphi(a')\varphi(b'''\ b''''\ b''''')$$

$$\varphi(a')\varphi(b'''\ b''''\ b''''') = \varphi(a'\ b'''\ b''''\ b''''') + \varphi(b''''\ b''''')$$

also

$$\varphi(a'a''a''')\varphi(b'b''\ldots b''''') = \varphi(a'\ a''\ a'''\ b'\ b''\ldots b''''') + \varphi(a'\ a''\ b''\ b''''')$$
$$+ \varphi(a'\ b'''\ b''''\ b''''') + \varphi(b''''\ b''''')$$

Es ist klar, dass die Verwandlung dadurch mannigfacher Abänderungen fähig ist, dass die Ordnung der Elemente in der einfachen Function umgekehrt wird. So ist z. B.

$$\varphi(a'\ a'')\varphi(b''\ldots b''''') = \varphi(a'\ a'')\varphi(b''''\ldots b'') = \varphi(a'\ a''\ b''''\ldots b'')$$
$$+ \varphi\, a'\ \varphi(b''''\ldots b'')$$
$$= \varphi(a'a''b''''\ldots b'') + \varphi(a'b''''b'''b'') + \varphi(b'''b'')\ \text{u. s. f.}$$

Sind die Elemente beider Gruppen in gleicher Anzahl $= m$ vorhanden, so besteht die Summe aus m Functionen, bei denen in der Mitte immer zwei schwinden, wozu dann noch die Einheit tritt.

So ist z. B. $\varphi(a'\ a''\ldots b'''')\ \varphi(b'\ b''\ldots b'''') = \varphi(a'\ldots a''''\ b'\ldots b'''')$
$$+ \varphi(a'\ldots a'''\ b''\ldots b'''') + \varphi(a'\ a''\ b'''\ b'''') + 1.$$

Wird endlich $b'''' = a'$, $b''' = a''$, $b'' = a'''$, $b' = a''''$ gesetzt, so erhält man

$$\{\varphi(a'\ a''\ a'''\ a'''')\}^2 = (1,\ 4)^2 = \varphi(a'\ a''\ a'''\ a''''\ a'''''\ a'''\ a''\ a')$$
$$+ \varphi(a'\ a''\ a'''\ a'''\ a''\ a') + \varphi(a'\ a''\ a''\ a') + \varphi(a''''\ a'''') + 1$$

oder auch

$$\{\varphi(a'\ a''\ a'''\ a'''')\}^2 = (1,\ 4)^2 = \varphi(a''''\ a'''\ a''\ a'\ a'\ a''\ a'''\ a'''')$$
$$+ \varphi(a''''\ a'''\ a''\ a''\ a'''\ a'''') + \varphi(a''''\ a'''\ a'''\ a'''') + \varphi(a''''\ a'''') + 1 \quad (9)$$

II.

Wir gehen nun an die Aufgabe, den ersten Differenzialquotienten der Näherungswerthe des gegebenen Kettenbruches zu bilden, wenn alle Elemente beliebig veränderlich, und wie wir der Einfachheit halber annehmen können, von derselben veränderlichen Grösse x abhängig sind, betrachtet werden.

Aus den Gleichungen (1) ergiebt sich

$$\frac{d\,(1,\ 1)}{dx} = \frac{da'}{dx}$$

$$\frac{d\,(1,\ 2)}{dx} = a''\,\frac{da'}{dx} + a'\,\frac{da''}{dx} = (2,\ 2)\,\frac{da'}{dx} + (1,\ 1)\,\frac{da''}{dx}$$

$$\frac{d\,(1,3)}{dx} = (a''\ a'''' - 1)\,\frac{da'}{dx} + a'\,a'''\,\frac{da''}{dx} + (a'\ a'' - 1)\,\frac{da'''}{dx}$$

$$= (2,\ 3)\,\frac{da'}{dx} + (1,\ 1)\ (3,\ 3)\,\frac{da''}{dx} + (1,\ 2)\,\frac{da}{dx}$$

$$\frac{d\,(1,\ 4)}{dx} = (a''\ a'''\ a'''' - a'' - a'''')\,\frac{da'}{dx} + a'\ (a'''\ a'''' - 1)\,\frac{da''}{dx}$$

$$+ (a'\ a'' - 1)\ a''''\,\frac{da'''}{dx} + (a'\ a''\ a''' - a' - a''')\,\frac{da''''}{dx}$$

$$= (2,\ 4)\,\frac{da'}{dx} + (1,\ 1)\ (3,\ 4)\,\frac{da''}{dx} + (1,\ 2)\ (4,\ 4)\,\frac{da'''}{dx} + (1,\ 3)\,\frac{da''''}{dx}$$

Auf diesem Wege gelangt man durch Induction zu der Gleichung

$$\frac{d\,(1,k)}{dx} = (2,\ k)\,\frac{da'}{dx} + (1,\ 1)\,(3,\ k)\,\frac{da''}{dx} + (1,\ 2)\ (4,\ k)\,\frac{da'''}{dx} + \ldots + (1,\ k - 1)\,\frac{da^k}{dx}\ .(10)$$

Diese Induction ist leicht auf gewöhnlichem Wege zu beweisen. Denn da

$$(1,\ k + 1) = (1,\ k)\ a^{(k+1)} - (1,\ k - 1),\ \text{also}$$

$$\frac{d\,(1,\ k + 1)}{dx} = a^{(k+1)}\,\frac{d\,(1,\ k)}{dx} - \frac{d\,(1,\ k - 1)}{dx} + (1,\ k)\,\frac{da^{(k+1)}}{dx}\ \text{so ist}$$

$$\frac{d\,(1,k + 1)}{dx} = (2,\ k)\ a^{(k+1)}\,\frac{da'}{dx} + (1,\ 1)\ (3,\ k)\,\frac{da''}{dx}$$

$$\ldots + (1,h - 1)\ (h + 1,k)\ a^{(k+1)}\,\frac{da^{(h)}}{dx} + \ldots + (1,\ k - 1)\ a^{(k+1)}\,\frac{da^k}{dx}$$

$$- (2,\ k-1)\,\frac{da'}{dx} - (1,\ 1)\ (3,k-1)\,\frac{da''}{dx} - \ldots (1,h-1)(h+1,k-1)\,\frac{da^h}{dx} - \ldots$$

$$- (1,\ k-2)\,\frac{da^k}{dx} \ldots - (1,\ k)\,\frac{da^{(k+1)}}{dx}$$

Da aber nach (1) $(h + 1,\ k)\ a^{(k+1)} - (h + 1,\ k-1) = (h + 1,\ k + 1)$, so wird

$$\frac{d(1,\ k + 1)}{dx} = (2,\ k+1)\,\frac{da'}{dx} + (1,\ 1)\ (3,\ k+1)\,\frac{da''}{dx} + \ldots + (1,\ k)\,\frac{da^{(k+1)}}{dx}$$

wodurch die Induction bewiesen ist.

Rückt man in der Gleichung (10) mit den Indicen weiter, so dass das erste Elemente $a^{(i)}$ ist, so sind alle Zahlen in den Klammern um $i - 1$ zu erhöhen. Setzt man nun k für $k + i - 1$, also $k - i + 1$ für k, so hat man

$$\frac{d\,\varphi(a^i\ a^{i+1} \ldots a^k)}{dx} = \frac{d\,(i, k)}{dx} = (i + 1, k)\frac{da^i}{dx} + (i, i)\,(i + 2, k)\frac{da^{i+1}}{dx}$$

$$+ (i, i + 1)\,(i + 3, k)\frac{da^{i+2}}{dx} + \ldots + (i, k - 1)\frac{da^k}{dx} \quad ..(11)$$

Von den beiden Factoren jedes der hier vorkommenden Produkte bleibt also der erste umgeändert für jedes k, der zweite für jedes i. Setzt man nun $i = 2$, so erhält man

$$\frac{d\,(2, k)}{dx} = (3, k)\frac{da''}{dx} + (2, 2)\,(4, k)\frac{da'''}{dx} + (2, 3)\,(5, k)\frac{da''''}{dx} +$$

$$+ \ldots + (2, k - 1)\frac{da^{(k)}}{dx}$$

Hieraus und aus (10) folgt also:

$$(N_k)^2\, d.\frac{\left(\frac{Z_k}{N_k}\right)}{dx} = (1, k)^2\, d\frac{\left(\frac{2, k}{1, k}\right)}{dx} = (1, k)\frac{d\,(2, k)}{dx} - (2, k)\frac{d\,(1, k)}{dx}$$

$$= -(2, k)^2\frac{da'}{dx} - 3, k)\,\{(1, 1)\,(2, k) - (1, k)\}\frac{da''}{dx}$$

$$- (,4\ k)\,\{(1, 2)\,(2, k) - (2, 2)\,(1, k)\}\frac{da'''}{dx} - \ldots$$

$$\ldots - (h + 1, k)\,\{(1, h - 1)\,(2, k) - (2, h - 1)\,(h, k)\}\frac{da^h}{dx} - \ldots$$

$$- \{(1, k - 1)\,(2, k) - (2, k - 1)\,(1, k)\}\frac{da^{(k)}}{dx}$$

Aber in Folge der Gleichung (5) hat man

$$(l, h - 1)\,(2, k) - (2, h - 1)\,(1, k) = (h + 1, k)$$

also wird

$$-(1, k)^2\, d\frac{\left(\frac{2, k}{1, k}\right)}{dx} = (2, k)^2\frac{da'}{dx} + (3, k)^2\frac{da''}{dx} + (4, k)^2\frac{da'''}{dx} \ldots + \frac{da^{(k)}}{dx} \quad ..(12)$$

welches der gesuchte Ausdruck des ersten Differentialquotienten (sobald alle a Functionen derselben verständlichen Grösse x sind) des gegebenen Kettenbruches ist. Hieraus geht hervor, dass der Coefficient von $da^{(h)}$ das Quadrat eines Bruches ist, dessen Zähler von allen vorhergehenden Elementen $a', a'' \ldots a^{(h+1)}$ und von $a^{(h)}$ selbst unabhängig ist. Man kann übrigens dem gefundenen Resultate noch eine eigenthümliche Gestalt geben. Nach Gleichung (9) ist nämlich

$$(2, k)^2 = (k \ldots 2, 2 \ldots k) + (k \ldots 3, 3 \ldots k) + (k \ldots 4, 4 \ldots k) + \ldots + (k, k) + 1$$

$$(3, k)^2 = \qquad (k \ldots 3, 3 \ldots k) + (k \ldots 4, 4 \ldots k) + \ldots + (k, k) + 1$$

$$(4, k)^2 = \qquad (k \ldots 4, 4 \ldots k) + \ldots + (k, k) + 1$$

u. s. f.

also hat man

$$-(1,\,k)^2\,\frac{d\left(\frac{2,\,k}{1,\,k}\right)}{dx} = (k\ldots 2,\,2\ldots k)\,\frac{da^1}{dx}$$

$$+ (k\ldots 3,\,3\ldots k)\left(da' + \frac{da''}{dx}\right)$$

$$+ (k\ldots 4,\,4\ldots k)\left(\frac{da'}{dx} + \frac{da''}{dx} + \frac{da'''}{dx}\right)$$

$$\vdots$$

$$+ (k,\,k)\left(\frac{da'}{dx} + \frac{da''}{dx} + \frac{da'''}{dx} + \ldots + \frac{da^{(k-1)}}{dx}\right)$$

$$+ \frac{da'}{dx} + \frac{da''}{dx} + \frac{da'''}{dx} \ldots + \frac{da^k}{dx}$$

Hätte der gegebene Kettenbruch folgende Form

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{b'}{1 + \cfrac{b''}{1 + \cfrac{b'''}{1 + b''''}}}}$$

so lässt sich allerdings das Resultat aus dem oben erhaltenen herleiten, indem man ihn auf die vorige Form reducirt; es ist aber einfacher, das Resultat in ähnlicher Weise, wie vorher, direct herzuleiten. Man setze nämlich gegenwärtig

$$N^0 = (1,\,0) = 1$$
$$N' = (1,\,1) = 1 + b'$$
$$N'' = (1,\,2) = (1,\,1) + (1,\,0)\,b''$$
$$N''' = (1,\,3) = (1,\,2) + (1,\,1)\,b'''$$
$$N'''' = (1,\,4) = (1,\,3) + (1,\,2)\,b'''' \text{ u. s. f.,}$$

ferner $Z^0 = 1$

$$Z' = (2,\,1) = 1$$
$$Z'' = (2,\,2) = 1 + b''$$
$$Z''' = (2,\,3) = (2,\,2) + (2,\,1)\,b'''$$
$$Z'''' = (2,\,4) = (2,\,3) + (2,\,2)\,b'''' \text{ u. s. f.}$$

Ebenso $(3,\,2) = 1$

$$(3,\,3) = (3,\,2) + b'''$$
$$(3,\,4) = (3,\,3) + (3,\,2)\,b'''' \text{ u. s. f.,}$$

so wird $\frac{d\,(1,\,1,)}{dx} = \frac{d\,b'}{dx}$

$$\frac{d\,(1,\,2)}{dx} = \frac{d\,(1,\,1)}{dx} + \frac{d\,b''}{dx} = (3,\,2)\,\frac{d\,b'}{dx} + (1,\,0)\,\frac{d\,b''}{dx}$$

$$\frac{d\,(1,\,3)}{dx} = (3,\,2)\,\frac{d\,b'}{dx} + (1,\,0)\,\frac{d\,b''}{dx} + (1,\,1)\,\frac{d\,b'''}{dx} + b'''\,\frac{d\,b'}{dx}$$

$$= (3,\,3)\,\frac{d\,b'}{dx} + (1,\,0)\,(4,\,3)\,\frac{d\,b''}{dx} + (1,\,1)\,\frac{d\,b'''}{dx}$$

$$\frac{d(1,4)}{dx} = (3,3)\frac{db'}{dx} + (1,0)(4,3)\frac{db''}{dx} + (1,1)\frac{db'''}{dx}$$

$$+ b''''\frac{db'}{dx} + (1,0)\, b''''\frac{db''}{dx} + \qquad + (1,2)\frac{db''''}{dx}$$

$$= (3,4)\frac{db'}{dx} + (1,0)(4,4)\frac{db''}{dx} + (1,1)(5,4)\frac{db'''}{dx} + (1,2)\frac{db''''}{dx}$$

Hieraus ergiebt sich leicht, dass allgemein

$$\frac{dN^k}{dx} = \frac{d(1,k)}{dx} = (3,k)\frac{db'}{dx} + (1,0)(4,k)\frac{db''}{dx} + (1,1)(5,k)\frac{db'''}{dx} + \ldots$$

$$+ (1,h-2)(h+2,k)\frac{db^{(h)}}{dx} \ldots + (1,k-3)(k+1,k)\frac{db^k}{dx}$$

$$+ (1,k-2)\frac{db^k}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

ist.

Rückt man ferner mit den Indicen der b um 1 vor, so geht (1, 0) in (2, 1), dies in (3, 2), dies in (4, 3) über; ebenso geht (1, 1) in (2, 2), dies in (3, 3), dies in (4, 4) ferner (1, 2) in (2, 3), dies in (3, 4) über u. s. f. Nimmt man also diese Veränderung in der Gleichung (12) vor, und setzt k — 1 statt k, so geht (1, k — 1) in (2, k — 1) = Z_k über. Also ist

$$\frac{d(2,k)}{dx} = (4,k)\frac{db''}{dx} + (2,1)(5,k)\frac{db''''}{dx} + (2,2)(6,k)\frac{db''''''}{dx} + \ldots$$

$$+ (2,h-2)(h+2,k)\frac{db^{(h)}}{dx} + \ldots + (2,k-3)(k+1,k)\frac{db^{(k-1)}}{dx} + (2,k-2)\frac{db^k}{dx}$$

$$= Z^0\frac{db''}{dx} + Z'(5'k)\frac{db'''}{dx} + Z''(6,k)\frac{db''''}{dx} + \ldots + Z^{(h-2)}(h+2,k)\frac{db^{(h)}}{dx} + \ldots$$

$$\ldots + Z^{(k-3)}(k+1,k)\frac{db^{(k-1)}}{dx} + Z^{k-2}\frac{db^{(k)}}{dx}$$

Folglich ist

$$N^k N^k \; d\left(\frac{Z^k}{N^k}\right) = -Z^k(3,k')\frac{db'}{dx} + (N^k Z^0 - Z^k N^0)(4,k)\frac{db''}{dx} +$$

$$+ (N^k Z' - Z^k N')(5,k)\frac{db'''}{dx} \ldots + (N^k Z^{(h-2)} - Z^k N^{h-2})(h+2,k)\frac{db^h}{dx} + \ldots$$

$$+ (N^k Z^{k-2} - Z^k N^{k-2})\frac{db^k}{dx}$$

Nun ist aber $N' - Z' = N'' - Z'' = b'$

$$\text{und } \frac{Z^k}{N^k} = \frac{(2,k)}{(1,k)} = \frac{1}{1+\cfrac{b'}{1+\cfrac{b''}{1+\cfrac{b'''}{1+b''''}}}} = \frac{1}{1+b'\left(\frac{3,k}{2\,k}\right)}$$

$$= \frac{(2,k)}{(2,k) + b'(3,k)}$$

also $(1, k) = (2, k) + \beta' (3, k)$, folgt $N^k - Z^0 - Z^k N^0 = N^k - Z^k$

$$= (1, k) - (2\ k) = b' (3, k)$$

ferner $N'' Z' - Z'' N' = (N' + b'') Z' - (Z' + b'') N' = - b' b''$

$$N''' Z' - Z''' N' = (N'' + b''' N') Z' - (Z'' + b''' Z') N'$$

$$= - b' b'' (4, 3)$$

$$N'''' Z' - Z'''' N' = (N''' + b'''' N'') Z' - (Z''' + b'''' Z'') N'$$

$$\vdots \qquad = - b' b'' ((4, 3) + b''') = - b' b'' (4, 4)$$

$$N^k Z' - Z^k N' = - b' b'' (4, k)$$

Eben so ist

$$N''' Z'' - Z''' N'' = (N'' + b''' N') Z'' - (Z'' + b''' Z') N'' = b' b'' b'''$$

$$N'''' Z'' - Z'''' N'' = (N'' + b'''' N'') Z'' - (Z'''' + b'''' Z'') N'' = b' b'' b''' (5, 4)$$

$$\vdots$$

$$N^k Z'' - Z^k N'' = b' b'' b''' (5, k)$$

Auf diesem Wege fortgehend erhält man allgemein

$$N^k Z^h - Z^k N^h = (- 1)^h b' b'' b''' \ldots b^{(h+1)}\ h + 3, k),$$

welches offenbar di9 der Gleichung (5) entsprechende ist; also wird

$$N^k N^k \frac{\left(\begin{matrix} Z^k \\ N^k \end{matrix}\right)}{dx} = - (2, k) (3, k) \frac{db'}{dx} + (3, k) (4, k) \frac{b' db''}{dx} - (4, k) (5, k) \frac{b' b'' db'''}{dx}$$

$$\ldots (-1)^h (h+1, k) (h+2, k) b' b'' \ldots b^{h-1} \frac{d b^h}{dx} + \ldots (-1)^k b' b'' \ldots b^{k-1} \frac{d b^k}{dx}$$

Eine besondnre Anwendung der Gleichung (11) ergiebt sich, wenn man $a' = b'x$, $a'' = - b''x$, $a'''' = b'''x$ u. s. f. setzt, also den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{b'x + \cfrac{1}{b''x + \cfrac{1}{b'''x + 1}}}$$

zu Grunde legt, und allein x als verwandlich betrachtet.

Dan sind die Kettenfunctionen so zu bilden, dass

$(1, 0) = (2, 1) = (3, 2) = \ldots = 1$

$(1, 1) = b' x$

$(1, 2) = b'' x (1, 1) + 1$

$(1, 3) = b'''' x (1, 2) + (1, 2)$., u. s. f.

und im Allgemeinen $(h, h) = b^h x$

$(h, h + 1) = b^{(h+1)} x (h, h) + 1$

$(h, h + 2) = b^{(h+2)} x (h, h + 1) + (h, h)$ u. s. f.

Dann wird der Differenzialquotient des Näherungswerthes des vorliegenden Bruches

$$\frac{d\left(\frac{2,\ k}{1,\ k}\right)}{dx} = \frac{1}{(1,k)^2}\left\{-b'(2,k)^2 + b''(3,k)^2 - \ldots (-1)^h\, b^h\, (h+1,k)^2 \ldots (-1)^k\, b^k\right\}$$

Man sieht das erste Glied vereinigt alle in b', das zweite alle nicht in b', aber in b'', das dritte alle nicht in b' und b'', aber in b''' multiplizirten Glieder s. u. f. Bei directer Aufsuchung des Differenzialquotienten würde man auf diesen so einfachen Ausdruck nicht leicht gekommen sein.

III.

Gehen wir nun zur Aufsuchung des zweiten Differenzialquotienten des ursprünglich vorgelegten Bruches über, Differenziirt man die Gleichung (12) so ergiebt sich

$$-(1,\ k)\frac{d(1,\ k)}{dx}\frac{d\left(\frac{2,\ k}{1,\ k}\right)}{dx} - \tfrac{1}{2}(1,\ k)^2\frac{d^2\left(\frac{2,\ k}{1,\ k}\right)}{dx}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{(2,\ k)^2\frac{d^2a'}{dx^2} + (3,\ k)^2\frac{d^2a''}{dx^2} + \ldots \qquad + \frac{d^2a^k}{dx^2}\right.$$

$$+ (2,\ k)\frac{d(2,\ k)}{dx}\frac{da'}{dx} + (3,\ k)\frac{d(3,\ k)}{dx}\frac{da''}{dx}\ldots \qquad + (k,\ k)\frac{d(k,\ k)}{dx}\frac{da^{(k-1)}}{dx}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit (1, k) und setzt für $\frac{d(2,k)}{dx}$, $\frac{d(3,k)}{dx}$ u. s. f. ihre aus der Gleichung (11) sich ergebenen Werthe, so werden die in der letzten Reihe der obigen Gleichung stehenden Glieder

$$(1,\ k)\,(2,\ k)\,da'\,\{(3,\ k)\,da'' + (2,\ 2)\,(4,\ k)\,da''' + \ldots + (2,\ k-1)\,da^k\}$$

$$+ (1,\ k)\,(3,\ k)\,da''\,\{(4,\ k)\,da''' + (3,\ 3)\,(5,\ k)\,da'''' + (3,\ k-1)\,de^k\}$$

$$+ (1,\ k)\,(h+1,k)\,da^h\,\{(h+2,k)\,da^{h+1} + (h+1)\,(h+1)\,(h+3,k)\,da^{h+2} + \ldots$$

$$+ (h+1,\ k-1)\,da^k\} + (1,\ k)\,(k,\ k)\,da^{k-1}\,da^k$$

Jedes Glied dieser Produckte hat die Form

$$(1,\ k)\,(h+1,\ k)\,(h+1,\ i-1)\,(i+1,\ k)\,da^h\,da^i$$

wo $i > h$ ist. Setzt man ferner in $-(1,\ k)^2\frac{d(1,\ k)}{dx}\frac{d\left(\frac{1,\ k}{1,\ k}\right)}{dx}$

für $-(1,\ k)^2\frac{d\left(\frac{2,\ k}{1,\ k}\right)}{dx}$ seinen Werth aus (12) und

für $\frac{d(1, k)}{dx}$ seinen Werth von (10), so erhält man

$$\left\{(2, k)^2 \frac{da'}{dx} + (3, k)^2 \frac{da''}{dx} + (4, k)^2 \frac{da'''}{dx} + \ldots + \frac{da^{(k)}}{dx}\right\}$$

$$\left\{(2, k) \frac{da'}{dx} + (1, 1)(3, k) \frac{da''}{dx} + (1, 2)(4, k'') \frac{da'''}{dx} \ldots + \ldots (1, i-1)\right.$$

$$\left.(i+1, k) \frac{da^{(i)}}{dx} + \ldots + (1, k-1) \frac{da^k}{dx}\right\}$$

Dieses Produckt besteht aus Gliedern, die in $\frac{(da^h)^2}{dx}$

und aus solchen, die in $\frac{da^{(h)}}{dx} \frac{da^{(i)}}{dx}$ multiplicirt sind. Jene haben zum Cofficienten

$$(h+1, k)^2 (1, h-1)(h+1, k) = (h+1, k)^3 (1, h-1)$$

Diese dagegen sind multiplicirt in:

$$(h+1, k)(i+1, k) \{(1, k)(h+1, i-1) - (h+1, k)(i, i-1)$$
$$- (i+1, k)(1, h-1)\}$$

Aber in Folge der Gleichung (14) ist

$$(1, i-1)(h+1, k) - (1, k)(h+1, i-1) = (1, h-1)(i+1, k)$$

Folglich wird dieser ganze Cofficient

$$= -2(1, h-1)(h+1, k)(i+1, k)^2$$

also ist endlich

$$-\tfrac{1}{2}(1, k)^3 \frac{d^2 \left(\frac{2, k}{2, k}\right)}{dx^2} = \tfrac{1}{2}(1, k) \Sigma (h+1, k)^2 \frac{d^2, a^h}{dx^2}$$

$$- \Sigma (h+1, k)^3 (1, h-1) \frac{(da^h)^2}{dx}$$

$$- 2 \Sigma \Sigma (1, h-1)(h+1, k)(i+1, k)^2 \frac{da^h}{dx} \frac{da^i}{dx}$$

in welchem Ausdruck die beiden ersten Summenzeichen sich auf alle Glieder für $h = 1, 2, 3, \ldots k$ beziehen und in dem dritten Gliede das eine Summenzeichen sich alle Glieder für $h = 1, 2, 3 \ldots k$, das andere auf alle Glieder $i = h+1, h+2, \ldots h+k$ erstreckt. Hierdurch ist zwar die Aufgabe, den zweiten Differenzialquotienten zu finden vollständig gelöst, aber, wie man sieht, und auch zu erwarten war, ist dieser Ausdruck bereits so zusammengesetzt, dass eine weitere Verfolgung desselben und zumal die Aufsuchung noch höherer Differenzialquotienten nicht räthlich erscheint.