Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Berlinischen Gymnasiums zum grauen Kloster. Ostern 1888.

Über

die Koefficienten des Ausdrucks $\Delta^n x^x$ und einige mit ihnen verwandte Zahlenverbindungen.

Von

Dr. Leonhard Hoesch.

REALGYMNASIUM DÜSSELDORF BIBLIOTHEK

BERLIN 1888.
R. Gaertners Verlagsbuchhandlung
Hermann Heyfelder.

1888. Programm Nr. 51.

9be
16

65,48c

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

HT005364743

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I.

Versteht man bei der Funktion $y = f(x)$ unter Δy oder $\Delta f(x)$ die Differenz $f(x+\omega) - f(x)$, in welcher ω eine Konstante bedeutet, setzt man dem entsprechend $\Delta f(x+\omega) = f(x+2\omega) - f(x+\omega)$ oder allgemein $\Delta f(x+\overline{n-1}\,\omega) = f(x+n\omega) - f(x+\overline{n-1}\,\omega)$, sei endlich $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+\omega) - \Delta f(x)$ und $\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+\omega) - \Delta^{n-1} f(x)$: so ist aus der Lehre der Differenzenrechnung bekannt, dafs

$$\Delta^n f(x) = f(x+n\omega) - \binom{n}{1} f(x+\overline{n-1}\,\omega) + \binom{n}{2} f(x+\overline{n-2}\,\omega) \ldots + (-1)^n f(x) \quad (1)$$

Setzt man nun $f(x) = x^\varkappa$ und $\varkappa$ gleich einer ganzen positiven Zahl, so kann man $\Delta^n x^\varkappa$ auf zwei Arten darstellen, indem man entweder die angegebene Gleichung benutzt oder eine direkte Ausrechnung vornimmt. Die erste Entwicklung führt zu der Gleichung:

$$\Delta^n x^\varkappa = B_0^{(n)} x^\varkappa + B_1^{(n)} x^{\varkappa-1} \cdot \omega + B_2^{(n)} x^{\varkappa-2} \cdot \omega^2 \ldots + B_{n-1}^{(n)} x \cdot \omega^{\varkappa-1} + B_\varkappa^{(n)} \cdot \omega^\varkappa \quad (2)$$

Die Koefficienten sind durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\left|\begin{array}{l}
B_0^{(n)} = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = \binom{\varkappa}{0} \beta_0^{(n)} \\
B_1^{(n)} = \varkappa \cdot \left(n - \binom{n}{1}(n-1) + \binom{n}{2}(n-2) - \binom{n}{3}(n-3) \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1}\right) = \binom{\varkappa}{1} \beta_1^{(n)} \\
B_2^{(n)} = \binom{\varkappa}{2}\left(n^2 - \binom{n}{1}(n-1)^2 + \binom{n}{2}(n-2)^2 - \binom{n}{3}(n-3)^2 \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1}\right) = \binom{\varkappa}{2} \beta_2^{(n)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_\lambda^{(n)} = \binom{\varkappa}{\lambda}\left(n^\lambda - \binom{n}{1}(n-1)^\lambda + \binom{n}{2}(n-2)^\lambda - \binom{n}{3}(n-3)^\lambda \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1}\right) = \binom{\varkappa}{\lambda} \beta_\lambda^{(n)} \\
B_\varkappa^{(n)} = \binom{\varkappa}{\varkappa}\left(n^\varkappa - \binom{n}{1}(n-1)^\varkappa + \binom{n}{2}(n-2)^\varkappa - \binom{n}{3}(n-3)^\varkappa \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1}\right) = \binom{\varkappa}{\varkappa} \beta_\varkappa^{(n)}
\end{array}\right| \quad (3)$$

Berechnen wir $\Delta^n x^\varkappa$ nach der zweiten Art und setzen wir in diesem Fall

$$\Delta^n x^\varkappa = A_0^{(n)} x^\varkappa + A_1^{(n)} x^{\varkappa-1} \cdot \omega + A_2^{(n)} x^{\varkappa-2} \cdot \omega^2 \ldots + A_\lambda^{(n)} x^{\varkappa-\lambda} \omega^\lambda \ldots + A_{n-1}^{(n)} x^{\varkappa-n+1} \omega^{n-1}$$
$$+ A_n^{(n)} x^{\varkappa-n} \omega^n \ldots + A_\varkappa^{(n)} \omega^\varkappa, \quad (4)$$

so finden wir, dafs alle Koefficienten von $A_0^{(n)}$ bis $A_{n-1}^{(n)}$ gleich Null sind, so dafs

$$\Delta^n x^\varkappa = A_n^{(n)} x^{\varkappa-n} \omega^n + A_{n+1}^{(n)} x^{\varkappa-n-1} \omega^{n+1} \ldots + A_\varkappa^{(n)} \omega^\varkappa. \quad (4^a)$$

Da die Koefficienten in A und B gleich sein müssen, so ergiebt sich hieraus die schon von Euler gefundene Gleichung

$$n^\lambda - \binom{n}{1}(n-1)^\lambda + \binom{n}{2}(n-2)^\lambda \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} = 0$$

für alle Werte von λ zwischen 1 und $n-1$; ist $\lambda = 0$, so tritt noch das Glied $(-1)^n \cdot \binom{n}{n}$ hinzu. Gehen wir nun zur Berechnung der Koefficienten $A_n^{(n)}$, $A_{n+1}^{(n)}$ u. s. w. über. Es ist

$$\Delta x^\varkappa = \binom{\varkappa}{1} x^{\varkappa-1} \omega + \binom{\varkappa}{2} x^{\varkappa-2} \omega^2 + \binom{\varkappa}{3} x^{\varkappa-3} \omega^3 \ldots + \binom{\varkappa}{\varkappa} \omega^\varkappa$$
$$= A_1^{(1)} x^{\varkappa-1} \cdot \omega + A_2^{(1)} x^{\varkappa-2} \omega^2 + A_3^{(1)} x^{\varkappa-3} \omega^3 \ldots + A_\varkappa^{(1)} \omega^\varkappa.$$

Folglich $A_1^{(1)} = \binom{\varkappa}{1}$ $\quad A_2^{(2)} = \binom{\varkappa}{2}$ $\quad A_\lambda^{(1)} = \binom{\varkappa}{\lambda}$ $\quad A_\varkappa^{(1)} = \binom{\varkappa}{\varkappa}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ferner ist $\Delta^2 x^\varkappa = A_2^{(2)} x^{\varkappa-2}\omega^2 + A_3^{(2)} x^{\varkappa-3}\omega^3 \ldots + A_\varkappa^{(2)}\omega^\varkappa$

$$= \binom{\varkappa}{1}\binom{\varkappa-1}{1} x^{\varkappa-2}\omega^2 + \left(\binom{\varkappa}{1}\binom{\varkappa-1}{2} + \binom{\varkappa}{2}\binom{\varkappa-2}{1}\right) x^{\varkappa-3}\omega^3 + \left(\binom{\varkappa}{1}\binom{\varkappa-1}{3} + \binom{\varkappa}{2}\binom{\varkappa-2}{2} + \binom{\varkappa}{3}\binom{\varkappa-3}{1}\right) x^{\varkappa-4}\omega^4$$

$$+ \ldots + \left(\binom{\varkappa}{1}\binom{\varkappa-1}{\varkappa-1} + \binom{\varkappa}{2}\binom{\varkappa-2}{\varkappa-2} + \binom{\varkappa}{3}\binom{\varkappa-3}{\varkappa-3} \ldots + \binom{\varkappa}{\varkappa-1}\binom{\varkappa-1}{\varkappa-1}\right)\omega^\varkappa.$$

Mithin $A_2^{(2)} = \binom{\varkappa}{1}\binom{\varkappa-1}{1}$. $A_3^{(2)} = \binom{\varkappa}{1}\binom{\varkappa-1}{2} + \binom{\varkappa}{2}\binom{\varkappa-2}{1}$, allgemein $A_\lambda^{(2)} =$

$$\binom{\varkappa}{1}\binom{\varkappa-1}{\lambda-1} + \binom{\varkappa}{2}\binom{\varkappa-2}{\lambda-2} + \binom{\varkappa}{3}\binom{\varkappa-3}{\lambda-3} \ldots + \binom{\varkappa}{\lambda-1}\binom{\varkappa-(\lambda-1)}{1}, \quad \lambda = 2, 3, 4 \text{ bis } \varkappa.$$

Die letzten Gleichungen können wir auch in folgender Weise schreiben:

$$\left|\begin{array}{l}
A_2^{(2)} = \binom{\varkappa-1}{1} A_1^{(1)} \\
A_3^{(2)} = \binom{\varkappa-1}{2} A_1^{(1)} + \binom{\varkappa-2}{1} A_2^{(1)} \\
A_4^{(2)} = \binom{\varkappa-1}{3} A_1^{(1)} + \binom{\varkappa-2}{2} A_2^{(1)} + \binom{\varkappa-3}{1} A_3^{(1)} \\
A_\lambda^{(2)} = \binom{\varkappa-1}{\lambda-1} A_1^{(1)} + \binom{\varkappa-2}{\lambda-2} A_2^{(1)} + \binom{\varkappa-3}{\lambda-3} A_3^{(1)} + \binom{\varkappa-4}{\lambda-4} A_4^{(1)} \ldots + \binom{\varkappa-(\lambda-1)}{1} A_{\lambda-1}^{(1)} \\
A_\varkappa^{(2)} = \binom{\varkappa-1}{\varkappa-1} A_1^{(1)} + \binom{\varkappa-2}{\varkappa-2} A_2^{(1)} + \binom{\varkappa-3}{\varkappa-3} A_3^{(1)} + \binom{\varkappa-4}{\varkappa-4} A_4^{(1)} \ldots\ldots\ldots + \binom{1}{1} A_{\varkappa-1}^{(1)}
\end{array}\right| \quad (5)$$

Entsprechende Beziehungen finden statt zwischen den Koefficienten von $\Delta^n x^\varkappa$ und $\Delta^{n-1} x^\varkappa$. Ist nämlich

$$\Delta^{n-1} x^\varkappa = A_{n-1}^{(n-1)} x^{\varkappa-(n-1)}\omega^{n-1} + A_n^{(n-1)} x^{\varkappa-n}\omega^n \ldots + A_\varkappa^{(n-1)}\omega^\varkappa, \text{ so ist}$$

$$\Delta^n x^\varkappa = A_{n-1}^{(n-1)}\omega^{n-1}\Delta x^{\varkappa-(n-1)} + A_n^{(n-1)}\omega^n \Delta x^{\varkappa-n} \ldots + A_{\varkappa-1}^{(n-1)}\omega^{\varkappa-1}\Delta x$$

$$= A_{(n)}^{(n)}\omega^n x^{\varkappa-n} + A_{n+1}^{(n)}\omega^{n+1}\cdot x^{\varkappa-n-1} \ldots + A_\varkappa^{(n)}\omega^\varkappa.$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left|\begin{array}{l}
A_n^{(n)} = \binom{\varkappa-(n-1)}{1} A_{n-1}^{(n-1)} \\
A_{n+1}^{(n)} = \binom{\varkappa-n}{1} A_n^{(n-1)} + \binom{\varkappa-(n-1)}{2} A_{n-1}^{(n-1)} \\
A_{n+2}^{(n)} = \binom{\varkappa-(n+1)}{1} A_{n+1}^{(n-1)} + \binom{\varkappa-n}{2} A_n^{(n-1)} + \binom{\varkappa-(n-1)}{3} A_{n-1}^{(n-1)}, \text{ allgemein} \\
A_\lambda^{(n)} = \binom{\varkappa-(\lambda-1)}{1} A_{\lambda-1}^{(n-1)} + \binom{\varkappa-(\lambda-2)}{2} A_{\lambda-2}^{(n-1)} + \binom{\varkappa-(\lambda-3)}{3} A_{\lambda-3}^{(n-1)} \ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad + \binom{\varkappa-n}{\lambda-n} A_n^{(n-1)} + \binom{\varkappa-(n-1)}{\lambda-(n-1)} A_{n-1}^{(n-1)}, \\
\text{wo } \lambda = n, n+1, n+2, \ldots \varkappa-1, \varkappa, \\
\text{endlich } A_\varkappa^{(n)} = A_{\varkappa-1}^{(n-1)} + A_{\varkappa-2}^{(n-1)} + A_{\varkappa-3}^{(n-1)} \ldots + A_{n-1}^{(n-1)}.
\end{array}\right| \quad (5^a)$$

Aus (5) erhalten wir für die Koefficienten mit dem oberen Index 2:

$$A_2^{(2)} = \binom{\varkappa}{1}\binom{\varkappa-1}{1} = \varkappa\cdot(\varkappa-1)\left(\frac{1}{1!\,1!}\right)$$

$$A_3^{(2)} = \binom{\varkappa}{1}\binom{\varkappa-1}{2} + \binom{\varkappa}{2}\binom{\varkappa-2}{1} = \varkappa\cdot(\varkappa-1)(\varkappa-2)\cdot\left(\frac{1}{1!\,2!} + \frac{1}{2!\,1!}\right)$$

$$A_4^{(2)} = \varkappa\cdot(\varkappa-1)(\varkappa-2)(\varkappa-3)\left(\frac{1}{1!\,3!} + \frac{1}{2!\,2!} + \frac{1}{3!\,1!}\right)$$

$$A_\lambda^{(2)} = \varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)\ldots(\varkappa-(\lambda-1))\left(\frac{1}{1!\,(\lambda-1)!} + \frac{1}{2!\,(\lambda-2)!} + \frac{1}{3!\,(\lambda-3)!}\cdots + \frac{1}{(\lambda-1)!\,1!}\right)$$

$$A_\varkappa^{(2)} = \varkappa!\left(\frac{1}{1!\,(\varkappa-1)!} + \frac{1}{2!\,(\varkappa-2)!} + \frac{1}{3!\,(\varkappa-3)!}\ldots + \frac{1}{(\varkappa-1)!\,1!}\right).$$

Setzen wir nun $\alpha_\lambda^{(2)} = \sum_1^{\lambda-1}{}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon!\,(\lambda-\varepsilon)!}$, so ist $A_\lambda^{(2)} = \varkappa\cdot(\varkappa-1)\ldots(\varkappa-(\lambda-1))\cdot\alpha_\lambda^{(2)}$. (6)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus (5ᵃ) erhalten wir für die Koefficienten mit dem oberen Index 3

$$A_3^{(3)} = \binom{\varkappa-2}{1} A_2^{(2)} = \varkappa \cdot (\varkappa - 1)(\varkappa - 2) \cdot \frac{1}{1!\,1!\,1!}$$

$$A_4^{(3)} = \binom{\varkappa-3}{1} A_3^{(2)} + \binom{\varkappa-2}{2} A_2^{(2)} = \varkappa \cdot (\varkappa - 1)(\varkappa - 2)(\varkappa - 3)\left(\frac{1}{1!\,2!\,1!} + \frac{1}{2!\,1!\,1!} + \frac{1}{1!\,1!\,2!}\right)$$

$$A_\lambda^{(3)} = \varkappa \cdot (\varkappa - 1)(\varkappa - 2) \ldots \big(\varkappa - (\lambda - 1)\big)\left(\frac{\alpha_{\lambda-1}^{(2)}}{1!} + \frac{\alpha_{\lambda-2}^{(2)}}{2!} + \frac{\alpha_{\lambda-3}^{(2)}}{3!} \ldots + \frac{\alpha_3^{(2)}}{(\lambda-3)!} + \frac{\alpha_2^{(2)}}{(\lambda-2)!}\right)$$

$$= \varkappa \cdot (\varkappa - 1)(\varkappa - 2) \ldots \big(\varkappa - (\lambda - 1)\big) \cdot \sum_{2}^{\lambda-1}{}_{\varrho} \frac{\alpha_\varrho^{(2)}}{(\lambda-\varrho)!}.$$

Die einzelnen Summanden von $\alpha_\varrho^{(2)}$ enthalten in ihren Nennern sämtliche Variationen der Elemente 1, 2, 3 . . . $(\varrho - 1)$ zur zweiten Klasse mit Wiederholung zur Summe ϱ. Fügt man zu diesen Variationen jedesmal $(\lambda - \varrho)$ hinzu, so erhält man eine Anzahl von Variationen der dritten Klasse zur Summe λ; legt man dann nacheinander dem ϱ die Werte 2, 3, 4 . . . bis $(\lambda - 1)$ bei, so kommen alle Variationen dritter Klasse der Elemente 1, 2, 3, 4 . . . $(\lambda - 2)$ zur Summe λ zum Vorschein. Indem wir entsprechend der Bezeichnung in (6) setzen $\alpha_\lambda^{(3)} = \sum \frac{1}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\,\varepsilon_3!}$, wo $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \lambda$ ist, und diese Summanden die Werte 1, 2, 3 . . . $(\lambda - 2)$ haben, erhalten wir

$$A_\lambda^{(3)} = \varkappa \cdot (\varkappa - 1)(\varkappa - 2) \ldots \big(\varkappa - (\lambda - 1)\big) A_\lambda^{(3)}. \tag{6ᵃ}$$

Verstehen wir allgemein unter $\alpha_\lambda^{(n)}$ die Summe $\sum \frac{1}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2! \ldots \varepsilon_n!}_{(=\lambda)}$, in welcher $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ die Werte 1, 2, 3 . . . $\big(\lambda - (n - 1)\big)$ haben und addiert die Summe λ ergeben, so ist

$$A_\lambda^{(n)} = \varkappa \cdot (\varkappa - 1)(\varkappa - 2) \ldots \big(\varkappa - (\lambda - 1)\big)\, \alpha_\lambda^{(n)}. \tag{6ᵇ}$$

Aus (5ᵃ) folgt nämlich, wenn wir $A_\lambda^{(n-1)}$ in der erwähnten Weise gebildet annehmen, dafs

$$A_\lambda^{(n)} = \varkappa \cdot (\varkappa - 1) \ldots \big(\varkappa - (\lambda - 1)\big)\left(\frac{\alpha_{\lambda-1}^{(n-1)}}{1!} + \frac{\alpha_{\lambda-2}^{(n-1)}}{2!} + \frac{\alpha_{\lambda-3}^{(n-1)}}{3!} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}^{(n-1)}}{\big(\lambda - (n-1)\big)!}\right)$$

$$= \varkappa \cdot (\varkappa - 1) \ldots \big(\varkappa - (\lambda - 1)\big) \sum_{n-1}^{\lambda-1}{}_{\varrho}\, \alpha_\varrho^{(n-1)} \cdot \frac{1}{(\lambda - \varrho)!}.$$

Eine ähnliche Betrachtung, wie wir bei $\alpha_\lambda^{(3)}$ angestellt haben, zeigt, dafs der Summenausdruck gleich $\alpha_\lambda^{(n)}$ ist, d. h. aus Brüchen besteht, deren Zähler gleich 1 sind und deren Nenner sämtliche Variationen der nᵗᵉⁿ Klasse mit Wiederholung aus den Elementen 1, 2, 3 . . . $\big(\lambda - (n - 1)\big)$ zur Summe λ darstellen. Da nun die angegebene Bildungsweise der Koefficienten α für den oberen Index $n = 2$ und 3 gültig ist, so gilt sie auch für jeden anderen ganzen Wert von n.

Beispielsweise folgt eine Berechnung der Gröfsen $\alpha_7^{(1)}$, $\alpha_7^{(2)}$ bis $\alpha_7^{(7)}$.

$$\left|\begin{array}{l} \alpha_7^{(1)} = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}. \\ \alpha_7^{(2)} = \frac{1}{6!\,1!} + \frac{1}{5!\,2!} + \frac{1}{4!\,3!} + \frac{1}{3!\,4!} + \frac{1}{2!\,5!} + \frac{1}{1!\,6!} = \frac{1}{40}. \end{array}\right|$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left|\begin{array}{l}
\alpha_7^{(3)} = \frac{3}{1!\,1!\,5!} + \frac{6}{1!\,2!\,4!} + \frac{3}{1!\,3!\,3!} + \frac{3}{2!\,2!\,3!} = \frac{43}{120}. \\
\alpha_7^{(4)} = \frac{4}{1!\,1!\,1!\,4!} + \frac{12}{1!\,1!\,2!\,3!} + \frac{4}{1!\,2!\,2!\,2!} = \frac{5}{3}. \\
\alpha_7^{(5)} = \frac{5}{1!\,1!\,1!\,1!\,3!} + \frac{10}{1!\,1!\,1!\,2!\,2!} = \frac{10}{3}. \\
\alpha_7^{(6)} = \frac{6}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,2!} = 3. \\
\alpha_7^{(7)} = \frac{1}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 1.
\end{array}\right| \tag{6^c}$$

II.

Aus der Gleichheit der A und B folgt

$$\varkappa \cdot (\varkappa - 1) \ldots (\varkappa - (n-1))\, \alpha_n^{(n)} = \frac{\varkappa \cdot (\varkappa - 1) \ldots (\varkappa - (n-1))\, \beta_n^{(n)}}{n!} \text{ oder}$$

$$n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \binom{n}{3}(n-3)^n \ldots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n-1} = n! \tag{7}$$

Ferner ergiebt sich

$$\alpha_\lambda^{(n)} = \frac{\beta_\lambda^{(n)}}{\lambda!} \tag{8}$$

oder auch

$$\sum \frac{1}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2! \ldots \varepsilon^n!\,(=\lambda)} = \frac{1}{\lambda!}\left(n^\lambda - \binom{n}{1}(n-1)^\lambda + \binom{n}{2}(n-2)^\lambda \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1}\right) \tag{8^b}$$

Die Gröfsen α und β stehen in enger Beziehung zu gewissen Gröfsen, welche in ähnlicher Weise wie die α gefunden werden. Nach dem polynomischen Lehrsatz ist

$$(a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n)^\lambda = \sum \frac{\lambda!}{\varepsilon_0!\,\varepsilon_1!\,\varepsilon_2! \ldots \varepsilon_{n-1}!\,(=\lambda)} a_1^{\varepsilon_0}\, a_2^{\varepsilon_1}\, a_3^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_{n-1}};$$

die Summe umfafst alle Glieder, welche man erhält, wenn man den $\varepsilon_0\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}$ die Werte 0 1 2 3 . . λ beilegt so, dafs zugleich $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \ldots + \varepsilon_{n-1} = \lambda$ ist, unter 0! ist hierbei die Zahl 1 zu verstehen. Setzen wir nun $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a^n = 1$, dann erhalten wir

$$\frac{n^\lambda}{\lambda!} = \sum \frac{1}{\varepsilon_0!\,\varepsilon_1! \ldots \varepsilon_{n-1}!\,(=\lambda)} \tag{9}$$

oder, wenn wir die rechte Seite mit $\gamma_\lambda^{(n)}$ bezeichnen,

$$\frac{n^\lambda}{\lambda!} = \gamma_\lambda^{(n)}. \tag{9^b}$$

Wenden wir diese Gleichung auf (8^b) an, so folgt:

$$\alpha_\lambda^{(n)} = \gamma_\lambda^{(n)} - \binom{n}{1}\gamma_\lambda^{(n-1)} + \binom{n}{2}\gamma_\lambda^{(n-2)} \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1}\gamma_\lambda^{(1)} \tag{10}$$

Setzen wir $\gamma_\lambda^{(0)}$ gleich Null und $(\gamma_\lambda)^\sigma = \gamma_\lambda^{(\sigma)}$, so können wir kürzer schreiben:

$$\alpha_\lambda^{(n)} = (\gamma_\lambda - 1)^n. \tag{10^b}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

So wie α nach den Gröfsen γ kann auch γ nach den Gröfsen α ausgedrückt werden durch nachstehende Gleichung

$$\gamma_\lambda^{(n)} = \alpha_\lambda^{(n)} + \binom{n}{1}\alpha_\lambda^{(n-1)} + \binom{n}{2}\alpha_\lambda^{(n-2)} \ldots + \binom{n}{n-1}\alpha_\lambda^{(1)} \tag{11}$$

oder, indem wir wie in (10^b) $\alpha_\lambda^{(0)}$ gleich Null und $(\alpha_\lambda)^\varrho = a_\lambda^{(\varrho)}$ setzen,

$$\gamma_\lambda^{(n)} = (\alpha_\lambda + 1)^n. \tag{11^b}$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichung zu beweisen, nehmen wir an, dafs einer der Summanden von $\alpha_\lambda^\varkappa$, wo $\varkappa = 1\ 2\ 3 \ldots n$, sei

$$M = R \cdot \frac{1}{\beta!\,\beta! \ldots \delta!\,\delta! \ldots \xi!\,\xi!}$$

der Faktor $\beta!$ sei σ mal, $\delta!$ τ mal und $\xi!$ ω mal vorhanden, in welchem Fall $\sigma + \tau + \omega = \varkappa$ ist, dann haben wir $R = \frac{\varkappa!}{\sigma!\,\tau!\,\omega!}$ und

$$M = \frac{\varkappa!}{\sigma!\,\tau!\,\omega!} \cdot \frac{1}{\beta!\,\beta! \ldots \delta!\,\delta! \ldots \xi!\,\xi!}.$$

Dem entspricht in $\gamma_\lambda^{(n)}$ das Glied

$$N = S \cdot \frac{1}{o!\,o! \ldots \beta!\,\beta! \ldots \delta!\,\delta! \ldots \xi!\,\xi!}$$

$o!$ ist $(n - \varkappa)$ mal als Faktor im Nenner vorhanden, weil die Anzahl der Faktoren n ist; daher ist $S = \frac{n!}{(n-\varkappa)!\,\sigma!\,\tau!\,\omega!}$ und

$$N = \frac{n!}{(n-\varkappa)!\,\sigma!\,\tau!\,\omega!} \cdot \frac{1}{o!\,o! \ldots \beta!\,\beta! \ldots \delta!\,\delta! \ldots \xi!\,\xi!},$$

folglich

$$N = \binom{n}{n-\varkappa} \cdot M.$$

Hieraus folgt, dafs $\alpha_\lambda^{(\varkappa)}$ in $\gamma_\lambda^{(n)}$ $\binom{n}{n-\varkappa}$ mal vorhanden ist. Weil nun die Nenner von $\alpha_\lambda^{(1)}\ \alpha_\lambda^{(2)} \ldots \alpha_\lambda^{(n)}$ alle diejenigen und nur solche Faktoren enthalten, welche in den Nennern von $\gamma_\lambda^{(n)}$ vorkommen, ausgenommen $o!$, so ergiebt sich die Richtigkeit der Gleichung (11).

III.

Die Gleichungen (8), (9^b), (11^b) lassen sich verwerten, um Beziehungen unter den Gröfsen α allein oder β oder γ herzuleiten. Aus denselben folgt:

$$\left|\begin{array}{l} n^\lambda \quad = \lambda!\,\gamma_\lambda^{(n)} = \lambda!\,(1+\alpha_\lambda)^n = (1+\beta_\lambda)^n \\ n^\varkappa \quad = \varkappa!\,\gamma_\varkappa^{(n)} = \varkappa!\,(1+\alpha_\varkappa)^n = (1+\beta_\varkappa)^n \\ n^{\varkappa+\lambda} = (\varkappa+\lambda)!\,\gamma_{(\varkappa+\lambda)}^n = (\varkappa+\lambda)!\,(1+\alpha_{(\varkappa+\lambda)})^n = (1+\beta_{(\varkappa+\lambda)})^n. \end{array}\right|$$

Hieraus ergiebt sich

$$(1+\beta_{\varkappa_1})^n \cdot (1+\beta_{\varkappa_2})^n \cdot (1+\beta_{\varkappa_3})^n \ldots (1+\beta_{\varkappa_\sigma})^n = (1+\beta_{(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3\ldots\varkappa_\sigma)})^n \tag{12}$$

Setzen wir $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 \ldots = \varkappa_\sigma$, so erhalten wir:

$$((1+\beta_\varkappa)^n)^\sigma = (1+\beta_{\sigma\varkappa})^n = ((1+\beta_\sigma)^n)^\varkappa, \tag{12^b}$$

wo die Exponenten σ und $\varkappa$ ein wirkliches Potenzieren bedeuten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Entsprechend findet man

$$\gamma^{(n)}_{\varkappa_1}\cdot\gamma^{(n)}_{\varkappa_2}\cdot\gamma^{(n)}_{\varkappa_3}\ldots\gamma^{(n)}_{\varkappa_\sigma}=\frac{(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3\ldots+\varkappa_\sigma)!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\,\varkappa_3!\ldots\varkappa_\sigma!}\,\gamma^{(n)}_{(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3\ldots+\varkappa_\sigma)} \tag{13}$$

$$(\sigma\varkappa)!\,\gamma^{(n)}_{\sigma\varkappa}=(\varkappa!)^\sigma\left(\gamma^{(n)}_\varkappa\right)^\sigma=(\sigma!)^\varkappa\left(\gamma^{(n)}_\sigma\right)^\varkappa \tag{13b}$$

$$(1+\alpha_{\varkappa_1})^n(1+\alpha_{\varkappa_2})^n(1+\alpha_{\varkappa_3})^n\ldots(1+\alpha_{\varkappa_\sigma})^n=\frac{(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3\ldots+\varkappa_\sigma)!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\,\varkappa_3!\ldots\varkappa_\sigma!}\left(1+\alpha_{(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3\ldots+\varkappa_\sigma)}\right)^n \tag{14}$$

$$(\sigma\varkappa)!\,(1+\alpha_{\sigma\varkappa})^n=(\varkappa!)^\sigma\left((1+\alpha_\varkappa)^n\right)^\sigma=(\sigma!)^\varkappa\left((1+\alpha_\sigma)^n\right)^\varkappa. \tag{14b}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
n^\varkappa &= \varkappa!\,\gamma^{(n)}_\varkappa=\varkappa!\,(1+\alpha_\varkappa)^n=(1+\beta_\varkappa)^n\\
s^\varkappa &= \varkappa!\,\gamma^{(s)}_\varkappa=\varkappa!\,(1+\alpha_\varkappa)^s=(1+\beta_\varkappa)^s\\
(ns)^\varkappa &= \varkappa!\,\gamma^{(ns)}_\varkappa=\varkappa!\,(1+\alpha_\varkappa)^{ns}=(1+\beta_\varkappa)^{ns}
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich

$$(1+\beta_\varkappa)^{n_1}(1+\beta_\varkappa)^{n_2}(1+\beta_\varkappa)^{n_3}\ldots(1+\beta_\varkappa)^{n_\sigma}=(1+\beta_\varkappa)^{n_1\,n_2\,n_3\ldots n_\sigma} \tag{15}$$

Setzen wir $n_1=n_2=\ldots=n_\sigma$, so erhalten wir

$$\left((1+\beta_\varkappa)^n\right)^\sigma=(1+\beta_\varkappa)^{(n^\sigma)}. \tag{15b}$$

Zieht man zu der letzten Gleichung (12b) hinzu, so findet man

$$\begin{aligned}
\left(\tbinom{n}{1}\beta^{(1)}_\varkappa+\tbinom{n}{2}\beta^{(2)}_\varkappa\ldots+\tbinom{n}{n}\beta^{(n)}_\varkappa\right)^\sigma&=\tbinom{n}{1}\beta^{(1)}_{\sigma\varkappa}+\tbinom{n}{2}\beta^{(2)}_{\sigma\varkappa}\ldots+\tbinom{n}{n}\beta^{(n)}_{\sigma\varkappa}\\
&=\left(\tbinom{n}{1}\beta^{(1)}_\sigma+\tbinom{n}{2}\beta^{(2)}_\sigma\ldots+\tbinom{n}{n}\beta^{(n)}_\sigma\right)^\varkappa=\tbinom{n^\sigma}{1}\beta^{(1)}_\varkappa+\tbinom{n^\sigma}{2}\beta^{(2)}_\varkappa\ldots+\tbinom{n^\sigma}{n^\sigma}\beta^{(n^\sigma)}_\varkappa\\
&=\tbinom{n^\varkappa}{1}\beta^{(1)}_\sigma+\tbinom{n^\varkappa}{2}\beta^{(2)}_\sigma\ldots+\tbinom{n^\varkappa}{n^\varkappa}\beta^{(n^\varkappa)}_\sigma.
\end{aligned} \tag{15c}$$

Ebenso leitet man folgende Gleichungen her:

$$\gamma^{(n_1)}_\varkappa\cdot\gamma^{(n_2)}_\varkappa\cdot\gamma^{(n_3)}_\varkappa\ldots\gamma^{(n_\sigma)}_\varkappa=\frac{1}{(\varkappa!)^{\sigma-1}}\cdot\gamma^{(n_1\,n_2\,n_3\ldots n_\sigma)}_\varkappa \tag{16}$$

$$\left(\gamma^{(n)}_\varkappa\right)^\sigma=\frac{(\sigma\varkappa)!}{(\varkappa!)^\sigma}\gamma^{(n)}_{\sigma\varkappa}=\frac{(\sigma!)^\varkappa}{(\varkappa!)^\sigma}\left(\gamma^{(n)}_\sigma\right)^\varkappa=\frac{1}{(\varkappa!)^{\sigma-1}}\cdot\gamma^{(n^\sigma)}_\varkappa=\frac{\sigma!}{(\varkappa!)^\sigma}\cdot\gamma^{(n^\varkappa)}_\sigma \tag{16b}$$

$$(1+\alpha_\varkappa)^{n_1}\cdot(1+\alpha_\varkappa)^{n_2}\cdot(1+\alpha_\varkappa)^{n_3}\ldots(1+\alpha_\varkappa)^{n_\sigma}=\frac{1}{(\varkappa!)^{\sigma-1}}\cdot(1+\alpha_\varkappa)^{n_1\,n_2\,n_3\ldots n_\sigma} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\left((1+\alpha_\varkappa)^n\right)^\sigma&=\frac{(\sigma\varkappa)!}{(\varkappa!)^\sigma}(1+\alpha_{\sigma\varkappa})^n=\frac{(\sigma!)^\varkappa}{(\varkappa!)^\sigma}\left((1+\alpha_\sigma)^n\right)^\varkappa=\frac{1}{(\varkappa!)^{\sigma-1}}(1+\alpha_\varkappa)^{(n^\sigma)}\\
&=\frac{\sigma!}{(\varkappa!)^\sigma}(1+\alpha_\sigma)^{(n^\varkappa)}
\end{aligned} \tag{17b}$$

IV.

Die Gröfen α, β, γ dienen auch zur Summierung der Potenzen der natürlichen Zahlen. Weil $n^\lambda=\lambda!\,\gamma^{(n)}_\lambda$, so ist

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma\,n^\lambda}{\lambda!}&=\gamma^{(1)}_\lambda+\gamma^{(2)}_\lambda+\gamma^{(3)}_\lambda\ldots+\gamma^{(n)}_\lambda\\
&=(1+\alpha_\lambda)^1+(1+\alpha_\lambda)^2+(1+\alpha_\lambda)^3\ldots(1+\alpha_\lambda)^n
\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= \alpha_\lambda^{(1)} \left(\binom{n}{1} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{1} \ldots + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} \right) + \alpha_\lambda^{(2)} \left(\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} \ldots + \binom{2}{2} \right)$$
$$+ \alpha_\lambda^{(3)} \left(\binom{n}{3} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-2}{3} \ldots + \binom{3}{3} \right) \ldots + \alpha_\lambda^{(n-1)} \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1} \right) + \alpha_\lambda^{(n)} \cdot \binom{n}{n}.$$

Folglich:

$$\frac{\Sigma n^\lambda}{\lambda!} = \binom{n+1}{2} \alpha_\lambda^{(1)} + \binom{n+1}{3} \alpha_\lambda^{(2)} + \binom{n+1}{4} \alpha_\lambda^{(3)} \ldots + \binom{n+1}{n} \alpha_\lambda^{(n-1)} + \binom{n+1}{n+1} \alpha_\lambda^{(n)} \qquad (18)$$

Ist $n \geqq \lambda$, so sind alle Glieder dieser Gleichung, welche $\alpha_\lambda^{(\lambda+1)}$ $\alpha_\lambda^{(\lambda+2)}$ bis $\alpha_\lambda^{(n)}$ enthalten, gleich Null; für diesen Fall erhalten wir daher

$$\frac{\Sigma n^\lambda}{\lambda!} = \binom{n+1}{2} \alpha_\lambda^{(1)} + \binom{n+1}{3} \alpha_\lambda^{(2)} + \binom{n+1}{4} \alpha_\lambda^{(3)} \ldots + \binom{n+1}{\lambda+1} \alpha_\lambda^{(\lambda)}. \qquad (18^a)$$

Man kann (18) sowie (18^a) als die allgemein gültige Gleichung wählen, denn bei der letzteren verschwinden, wenn $n \leqq \lambda$, alle Glieder, welche $\binom{n+1}{n+2}$ $\binom{n+1}{n+3}$ bis $\binom{n+1}{\lambda+1}$ enthalten. Ersetzen wir die α durch β, so erhalten wir

$$\Sigma n^\lambda = \binom{n+1}{2} \beta_\lambda^{(1)} + \binom{n+1}{3} \beta_\lambda^{(2)} + \binom{n+1}{4} \beta_\lambda^{(3)} \ldots + \binom{n+1}{n+1} \beta_\lambda^{(n)}, \text{ wenn } n \leqq \lambda, \qquad (19)$$
$$= \binom{n+1}{2} \beta_\lambda^{(1)} + \binom{n+1}{3} \beta_\lambda^{(2)} + \binom{n+1}{4} \beta_\lambda^{(3)} \ldots + \binom{n+1}{\lambda+1} \beta_\lambda^{(\lambda)}, \text{ wenn } n \geqq \lambda. \qquad (19^a)$$

Wir können die Gleichung (19) verwerten, um Beziehungen unter den Binomialkoefficienten herzuleiten.

Hat man nämlich die Gleichung

$$D_1 \cdot 1^\lambda + D_2 \cdot 2^\lambda + D_3 \cdot 3^\lambda \ldots + D_n \cdot n^\lambda = C_1 \cdot 1^\lambda + C_2 \cdot 2^\lambda + C_3 \cdot 3^\lambda \ldots + C_n \cdot n^\lambda$$

und weifs man, dafs die Koefficienten C und D von dem veränderlichen Exponenten λ unabhängig sind, dann ist $C_1 = D_1$, $C_2 = D_2$ u. s. f. Von diesem Satz soll jetzt eine Anwendung gemacht werden. Nach (3) können wir schreiben:

$$\binom{n+1}{2} \beta_\lambda^{(1)} = \binom{n+1}{2} (1^\lambda)$$
$$\binom{n+1}{3} \beta_\lambda^{(2)} = \binom{n+1}{3} \left(2^\lambda - \binom{2}{1} 1^\lambda \right)$$
$$\binom{n+1}{4} \beta_\lambda^{(3)} = \binom{n+1}{4} \left(3^\lambda - \binom{3}{1} 2^\lambda + \binom{3}{2} 1^\lambda \right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\binom{n+1}{n+1} \beta_\lambda^{(n)} = \binom{n+1}{n+1} \left(n^\lambda - \binom{n}{1} (n-1)^\lambda + \binom{n}{2} (n-2)^\lambda - \binom{n}{3} (n-3)^\lambda \ldots (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} \right).$$

Folglich nach (19)

$$1^\lambda + 2^\lambda + 3^\lambda + 4^\lambda \ldots + n^\lambda =$$
$$1^\lambda \left(\binom{n+1}{2} - \binom{n+1}{3} \binom{2}{1} + \binom{n+1}{4} \binom{3}{2} - \binom{n+1}{5} \binom{4}{3} \ldots (-1)^{n-1} \cdot \binom{n+1}{n+1} \binom{n}{n-1} \right)$$
$$+ 2^\lambda \left(\binom{n+1}{3} - \binom{n+1}{4} \binom{3}{1} + \binom{n+1}{5} \binom{4}{2} - \binom{n+1}{6} \binom{5}{3} \ldots (-1)^{n-2} \cdot \binom{n+1}{n+1} \binom{n}{n-2} \right)$$
$$+ 3^\lambda \left(\binom{n+1}{4} - \binom{n+1}{5} \binom{4}{1} + \binom{n+1}{6} \binom{5}{2} - \binom{n+1}{7} \binom{6}{3} \ldots (-1)^{n-3} \cdot \binom{n+1}{n+1} \binom{n}{n-3} \right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \varrho^\lambda \left(\binom{n+1}{\varrho+1} - \binom{n+1}{\varrho+2} \binom{\varrho+1}{1} + \binom{n+1}{\varrho+3} \binom{\varrho+2}{2} - \binom{n+1}{\varrho+4} \binom{\varrho+3}{3} \ldots (-1)^{n-\varrho} \binom{n+1}{n+1} \binom{n}{n-\varrho} \right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ n^\lambda \binom{n+1}{n+1}.$$

Weil nun die Ausdrücke in den grofsen Klammern von dem Exponenten λ unabhängig sind, so ergeben sich folgende Beziehungen unter den Binomialkoefficienten, wenn wir $\binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} \ldots + (-1)^n \cdot \binom{n+1}{n+1} = 1$ hinzunehmen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left|\begin{array}{l}
\binom{n+1}{1}-\binom{n+1}{2}\binom{1}{1}+\binom{n+1}{3}\binom{2}{2}-\binom{n+1}{4}\binom{3}{3}\ \ldots\ldots\ldots(-1)^n\cdot\binom{n+1}{n+1}\binom{n}{n}=1\\
\binom{n+1}{2}-\binom{n+1}{3}\binom{2}{1}+\binom{n+1}{4}\binom{3}{2}-\binom{n+1}{5}\binom{4}{3}\ \ldots\ldots\ldots(-1)^{n-1}\cdot\binom{n+1}{n+1}\binom{n}{n-1}=1\\
\binom{n+1}{3}-\binom{n+1}{4}\binom{3}{1}+\binom{n+1}{5}\binom{4}{2}-\binom{n+1}{6}\binom{5}{3}\ \ldots\ldots\ldots(-1)^{n-2}\cdot\binom{n+1}{n+1}\binom{n}{n-2}=1\\
\binom{n+1}{4}-\binom{n+1}{5}\binom{4}{1}+\binom{n+1}{6}\binom{5}{2}-\binom{n+1}{7}\binom{6}{3}\ \ldots\ldots\ldots(-1)^{n-3}\cdot\binom{n+1}{n+1}\binom{n}{n-3}=1\\
\qquad\text{allgemein}\\
\binom{n+1}{\varrho+1}-\binom{n+1}{\varrho+2}\binom{\varrho+1}{1}+\binom{n+1}{\varrho+3}\binom{\varrho+2}{2}-\binom{n+1}{\varrho+4}\binom{\varrho+3}{3}\ \ldots(-1)^{n-\varrho}\cdot\binom{n+1}{n+1}\binom{n}{n-\varrho}=1\\
\qquad\qquad(\varrho=0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ n).
\end{array}\right| \tag{20}$$

V.

In den nächsten drei Artikeln werden Determinanten hergeleitet, die alle in ihrem Aussehen eine grofse Ähnlichkeit haben, deren Werte aber teils durch die Gröfsen α bezw. β, teils durch die Bernoullischen Zahlen, teils durch die Binomialkoefficienten, teils durch andere Zahlen bestimmt sind.

Aus (9) und (11) können wir folgern

$$\frac{n^\varkappa}{\varkappa!}=\binom{n}{1}\alpha_\varkappa^{(1)}+\binom{n}{2}\alpha_\varkappa^{(2)}+\binom{n}{3}\alpha_\varkappa^{(3)}\ \ldots+\binom{n}{n}\alpha_\varkappa^{(n)}.$$

Legen wir dem n nacheinander die Werte 1 2 3 4 . . . n bei, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\binom{1}{1}\alpha_\varkappa^{(1)} &&=\frac{1^\varkappa}{\varkappa!}\\
&\binom{2}{1}\alpha_\varkappa^{(1)}+\binom{2}{2}\alpha_\varkappa^{(2)} &&=\frac{2^\varkappa}{\varkappa!}\\
&\binom{3}{1}\alpha_\varkappa^{(1)}+\binom{3}{2}\alpha_\varkappa^{(2)}+\binom{3}{3}\alpha_\varkappa^{(3)} &&=\frac{3^\varkappa}{\varkappa!}\\
&\binom{4}{1}\alpha_\varkappa^{(1)}+\binom{4}{2}\alpha_\varkappa^{(2)}+\binom{4}{3}\alpha_\varkappa^{(3)}+\binom{4}{4}\alpha_\varkappa^{(4)} &&=\frac{4^\varkappa}{\varkappa!}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\binom{n}{1}\alpha_\varkappa^{(1)}+\binom{n}{2}\alpha_\varkappa^{(2)}+\binom{n}{3}\alpha_\varkappa^{(3)}+\binom{n}{4}\alpha_\varkappa^{(4)}\ \ldots+\binom{n}{n}\alpha_\varkappa^{(n)} &&=\frac{n^\varkappa}{\varkappa!}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dafs die Determinante

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
1^\varkappa & 2^\varkappa & 3^\varkappa & 4^\varkappa & \ldots & (n-1)^\varkappa & n^\varkappa\\
\binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \ldots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1}\\
0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \ldots & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2}\\
0 & 0 & \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \ldots & \binom{n-1}{3} & \binom{n}{3}\\
0 & 0 & 0 & \binom{4}{4} & \ldots & \binom{n-1}{4} & \binom{n}{4}\\
. & . & . & . & \ldots & . & .\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1}
\end{array}\right| \tag{21}$$

wenn $\varkappa=1\ 2\ 3\ \ldots\ n-1$, den Wert Null, wenn $\varkappa=n$, den Wert $(-1)^{n-1}\cdot n!$, wenn $\varkappa\geqq n$, den Wert $(-1)^{n-1}\cdot\varkappa!\ \alpha_\varkappa^{(n)}$ hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn wir die Determinante in der Form schreiben

$$\begin{vmatrix} 1^\varkappa & \frac{2^\varkappa \cdot 2!}{2!} & \frac{3^\varkappa \cdot 3!}{3!} & \frac{4^\varkappa \cdot 4!}{4!} & \cdots & \frac{n^\varkappa \cdot n!}{n!} \\ \frac{1!}{1!} & \frac{2!}{1!\,1!} & \frac{3!}{1!\,2!} & \frac{4!}{1!\,3!} & \cdots & \frac{n!}{1!\,(n-1)!} \\ 0 & \frac{2!}{2!} & \frac{3!}{1!\,2!} & \frac{4!}{2!\,2!} & \cdots & \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \\ 0 & 0 & \frac{3!}{3!} & \frac{4!}{3!\,1!} & \cdots & \frac{n!}{3!\,(n-3)!} \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n!}{(n-1)!\,1!} \end{vmatrix} \tag{21^a}$$

so können wir in den Vertikalreihen die Faktoren absondern $2!\ 3!\ 4!\ \ldots\ n!$ und in den Horizontalreihen $\frac{1}{2!}\ \frac{1}{3!} \cdots \frac{1}{(n-1)!}$.

Es ergiebt sich demnach die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1^\varkappa & \frac{2^\varkappa}{2!} & \frac{3^\varkappa}{3!} & \frac{4^\varkappa}{4!} & \frac{5^\varkappa}{5!} & \cdots & \frac{(n-1)^\varkappa}{(n-1)!} & \frac{n^\varkappa}{n!} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} \\ . & . & . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{21^b}$$

Der Wert derselben ist Null, wenn $\varkappa < n$, und $(-1)^{n-1} \cdot \frac{\varkappa!}{n!}\, \alpha_\varkappa^{(n)}$, wenn $\varkappa \geqq n$.

Versteht man bei (21) unter $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \ldots\ \delta_n$ die Unterdeterminanten der Glieder in der ersten Horizontalreihe, so kann man schreiben

$$\varkappa!\, \alpha_\varkappa^{(n)} = (-1)^{n-1} \left(1^\varkappa \delta_1 + 2^\varkappa \delta_2 + 3^\varkappa \delta_3 \ \ldots\ + (n-1)^\varkappa \delta_{n-1} + n^\varkappa \delta_n\right).$$

Es ist aber auch nach (8) und (3)

$$\varkappa!\, \alpha_\varkappa^{(n)} = \beta_\varkappa^{(n)} = (-1)^{n-1}\left(1^\varkappa \cdot \binom{n}{1} - 2^\varkappa \cdot \binom{n}{2} + 3^\varkappa \cdot \binom{n}{3} \ldots + (-1)^{n-2} \cdot (n-1)^\varkappa \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^{n-1} n^\varkappa\right).$$

Weil nun die rechten Seiten dieser Gleichungen für sämtliche ganzzahligen Werte des Exponenten $\varkappa$ gleich sind, so folgt

$$\delta_1 = \binom{n}{1},\ \delta_2 = -\binom{n}{2},\ \delta_3 = +\binom{n}{3},\ \delta_4 = -\binom{n}{4} \ldots \delta_{n-1} = (-1)^{n-2} \cdot \binom{n}{n-1},\ \delta_n = (-1)^{n-1}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Gleichungen geben uns die Werte nachstehender Determinanten. Zunächst ist $\delta_1 = n =$

$$\begin{vmatrix} \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \binom{5}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} \\ 0 & \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & \cdots & \binom{n-1}{3} & \binom{n}{3} \\ 0 & 0 & \binom{4}{4} & \binom{5}{4} & \cdots & \binom{n-1}{4} & \binom{n}{4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}, \quad (n = 2\ 3\ 4\ \ldots). \tag{22}$$

Vermindert man die zweite Vertikalreihe um die erste, die dritte um die zweite, die vierte um die dritte u. s. w., endlich die letzte um die vorletzte, wenn man dann bei der neuen Determinante die beiden ersten Vertikalreihen unverändert läſst, die dritte um die zweite vermindert u. s. w., ferner bei der jetzt entstandenen Determinante die drei ersten Vertikalreihen nicht ändert, dagegen die vierte um die dritte vermindert u. s. w., so erhält man, wenn man dies Verfahren hinreichend fortsetzt, schlieſslich

$$n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} \tag{22^a}$$

Diese Determinante hat $(n-1)$ Vertikal- und $(n-1)$ Horizontalreihen. Wir können aus (22) wie bei (21) auch folgende Determinante herleiten:

$$\frac{1}{(n-1)!} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{22^b}$$

Da $\delta_4 = -\binom{n}{4}$, so ist

$$\binom{n}{4} = \begin{vmatrix} \binom{5}{4} & \binom{6}{4} & \binom{7}{4} & \binom{8}{4} & \cdots & \binom{n-1}{4} & \binom{n}{4} \\ \binom{5}{5} & \binom{6}{5} & \binom{7}{5} & \binom{8}{5} & \cdots & \binom{n-1}{5} & \binom{n}{5} \\ 0 & \binom{6}{6} & \binom{7}{6} & \binom{8}{6} & \cdots & \binom{n-1}{6} & \binom{n}{6} \\ 0 & 0 & \binom{7}{7} & \binom{8}{7} & \cdots & \binom{n-1}{7} & \binom{n}{7} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix} \quad (n = 5\ 6\ 7\ \ldots). \tag{23}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Verfahren wir ebenso wie bei (22), so erhalten wir

$$\binom{n}{4} = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 10 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 5 \end{vmatrix} \tag{23^a}$$

Diese Determinante hat $(n-4)$ Vertikal- und ebensoviele Horizontalreihen, der kleinste Wert für n ist 5.

Aus (23) folgt auch

$$\frac{1}{(n-4)!} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{5!} & \cdots & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(n-6)!} & \frac{1}{(n-5)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-7)!} & \frac{1}{(n-6)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-8)!} & \frac{1}{(n-7)!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-9)!} & \frac{1}{(n-8)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{23^b}$$

Allgemein ist

$$\binom{n}{\sigma} = \begin{vmatrix} \binom{\sigma+1}{\sigma} & \binom{\sigma+2}{\sigma} & \binom{\sigma+3}{\sigma} & \binom{\sigma+4}{\sigma} & \cdots & \binom{n-1}{\sigma} & \binom{n}{\sigma} \\ \binom{\sigma+1}{\sigma+1} & \binom{\sigma+2}{\sigma+1} & \binom{\sigma+3}{\sigma+1} & \binom{\sigma+4}{\sigma+1} & \cdots & \binom{n-1}{\sigma+1} & \binom{n}{\sigma+1} \\ 0 & \binom{\sigma+2}{\sigma+2} & \binom{\sigma+3}{\sigma+2} & \binom{\sigma+4}{\sigma+2} & \cdots & \binom{n-1}{\sigma+2} & \binom{n}{\sigma+2} \\ 0 & 0 & \binom{\sigma+3}{\sigma+3} & \binom{\sigma+4}{\sigma+3} & \cdots & \binom{n-1}{\sigma+3} & \binom{n}{\sigma+3} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{\sigma+4}{\sigma+4} & \cdots & \binom{n-1}{\sigma+4} & \binom{n}{\sigma+4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix} \tag{24}$$

oder auch

$$\binom{n}{\sigma} = \begin{vmatrix} \binom{\sigma+1}{\sigma} & \binom{\sigma+1}{\sigma-1} & \binom{\sigma+1}{\sigma-2} & \binom{\sigma+1}{\sigma-3} & \binom{\sigma+1}{\sigma-4} & \cdots & \binom{\sigma+1}{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \binom{\sigma+1}{\sigma} & \binom{\sigma+1}{\sigma-1} & \binom{\sigma+1}{\sigma-2} & \binom{\sigma+1}{\sigma-3} & \cdots & \binom{\sigma+1}{2} & \binom{\sigma+1}{1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \binom{\sigma+1}{\sigma} & \binom{\sigma+1}{\sigma-1} & \binom{\sigma+1}{\sigma-2} & \cdots & \binom{\sigma+1}{3} & \binom{\sigma+1}{2} & \binom{\sigma+1}{1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \binom{\sigma+1}{\sigma} & \binom{\sigma+1}{\sigma-1} & \cdots & \binom{\sigma+1}{4} & \binom{\sigma+1}{3} & \binom{\sigma+1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{\sigma+1}{\sigma} \end{vmatrix} \tag{24^a}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In der letzten Determinante sind $(n-\sigma)$ Horizontal- und $(n-\sigma)$ Vertikalreihen, n ist $\sigma+1$, $\sigma+2$, $\sigma+3$ u. s. w.

Aus (24) ergiebt sich auch $\frac{1}{(n-\sigma)!} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(n-\sigma-1)!} & \frac{1}{(n-\sigma)!} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-\sigma-2)!} & \frac{1}{(n-\sigma-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-\sigma-3)!} & \frac{1}{(n-\sigma-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-\sigma-4)!} & \frac{1}{(n-\sigma-3)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (24^b)$$

VI.

Die im vorigen Artikel aufgestellten Determinanten haben eine sehr grofse Ahnlichkeit mit einer Anzahl von Determinanten, deren Werte entweder durch die Bernoullischen Zahlen oder durch Null dargestellt werden.

Aus der Gleichung

$$(a+1)^n - a^n = \binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \binom{n}{3} a^{n-3} \ldots + \binom{n}{n-1} a + \binom{n}{n}$$

ergeben sich folgende $(n+1)$ Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} \binom{1}{0} a^0 & = (a+1)^1 - a^1 \\ \binom{2}{0} a^0 + \binom{2}{1} a^1 & = (a+1)^2 - a^2 \\ \binom{3}{0} a^0 + \binom{3}{1} a^1 + \binom{3}{2} a^2 & = (a+1)^3 - a^3 \\ \binom{4}{0} a^0 + \binom{4}{1} a^1 + \binom{4}{2} a^2 + \binom{4}{3} a^3 & = (a+1)^4 - a^4 \\ \cdots & \cdots \\ \binom{n}{0} a^0 + \binom{n}{1} a^1 + \binom{n}{2} a^2 \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} & = (a+1)^n - a^n \end{vmatrix} \qquad (25)$$

Setzen wir nun $a^{n-1} = \frac{E}{D}$, so ist demnach $D = n!$ und $E =$

$$(-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} ((a+1)-a) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ ((a+1)^2 - a^2) & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ ((a+1)^3 - a^3) & 1 & 3 & \binom{3}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ ((a+1)^4 - a^4) & 1 & 4 & \binom{4}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ((a+1)^{n-2} - a^{n-2}) & 1 & (n-2) & \binom{n-2}{2} & \cdots & \binom{n-2}{n-4} & \binom{n-2}{n-3} & 0 \\ ((a+1)^{n-1} - a^{n-1}) & 1 & (n-1) & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-4} & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n-1}{n-2} \\ ((a+1)^n - a^n) & 1 & n & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-4} & \binom{n}{n-3} & \binom{n}{n-2} \end{vmatrix} \qquad (25^a)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bezeichnen wir die der ersten Vertikalreihe zugehörigen Unterdeterminanten wieder mit $\delta_1\ \delta_2\ .\ .\ .\ \delta_n$ und setzen wir

$$a^{n-1}\cdot n!\,(-1)^{n-1}=\big((a+1)-a\big)\,\delta_1+\big((a+1)^2-a^2\big)\,\delta_2+\big((a+1)^3-a^3\big)\,\delta_3\ .\ .\ .\ .\ +\big((a+1)^n-a^n\big)\,\delta_n, \qquad (26)$$

so können wir folgende Gleichungen zusammenstellen:

$$\begin{array}{lllll}
0 = & \delta_1+ & \delta_2+ & \delta_3\ .\ .\ .+ & \delta_n \\
(-1)^{n-1}\cdot n!\,1^{n-1}=(2-1) & \delta_1+(2^2-1^2) & \delta_2+(2^3-1^3) & \delta_3\ .\ .\ .+(2^n-1^n) & \delta_n \\
(-1)^{n-1}\cdot n!\,2^{n-1}=(3-2) & \delta_1+(3^2-2^2) & \delta_2+(3^3-2^3) & \delta_3\ .\ .\ .+(3^n-2^n) & \delta_n \\
(-1)^{n-1}\cdot n!\,3^{n-1}=(4-3) & \delta_1+(4^2-3^2) & \delta_2+(4^3-3^3) & \delta_3\ .\ .\ .+(4^n-3^n) & \delta_n \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & & & & \\
(-1)^{n-1}\cdot n!\,a^{n-1}=\big((a+1)-a\big) & \delta_1+\big((a+1)^2-a^2\big) & \delta_2+\big((a+1)^3-a^3\big) & \delta_3\ .\ .\ .+\big((a+1)^n-a^n\big) & \delta_n
\end{array}$$

Mithin ist

$$(-1)^{n-1}\cdot n!\,(1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}\ .\ .\ .\ +a^{n-1})=$$
$$(a+1)\,\delta_1+(a+1)^2\,\delta_2+(a+1)^3\,\delta_3+(a+1)^4\,\delta_4\ .\ .\ .\ +(a+1)^n\,\delta_n. \qquad (27)$$

Nach der von Bernoulli aufgestellten Summenformel ist

$$\Sigma\, a^\varkappa=\frac{1}{\varkappa+1}(a+1)^{\varkappa+1}-\frac{1}{2}(a+1)^\varkappa+\frac{1}{\varkappa+1}\cdot\binom{\varkappa+1}{2}B_1\,(a+1)^{\varkappa-1}-\frac{1}{\varkappa+1}\cdot\binom{\varkappa+1}{4}B_2\,(a+1)^{\varkappa-3}$$
$$+\frac{1}{\varkappa+1}\cdot\binom{\varkappa+1}{6}B_3\cdot(a+1)^{\varkappa-5}\ .\ .\ .\ +(-1)^{\frac{\varrho-1}{2}}\cdot\frac{1}{(\varkappa+1)}\cdot\binom{\varkappa+1}{\varrho+1}B_{\frac{\varrho+1}{2}}\,(a+1)^{\varkappa-\varrho}\ .\ .\ .\ , \qquad (28)$$

die Entwicklung schliefst, wenn $\varkappa$ gerade, mit der ersten Potenz von $(a+1)$, im anderen Fall mit der zweiten Potenz. Mit Rücksicht hierauf führt die Gleichsetzung der rechten Seiten von (27) und (28) zu den zwei Gleichungen:

$$\left|\begin{array}{l}
\dfrac{(-1)^{2n}}{(2n+1)!}\,(a^{2n+1}\,\delta_{2n+1}+a^{2n}\,\delta_{2n}+a^{2n-1}\,\delta_{2n-1}\ .\ .\ .\ +a^2\,\delta_2+a\,\delta_1) \\
=\dfrac{1}{2n+1}\cdot a^{2n+1}-\dfrac{1}{2}\,a^{2n}+\dfrac{1}{2n+1}\cdot\binom{2n+1}{2}B_1\cdot a^{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\cdot\binom{2n+1}{4}B_2\,a^{2n-3} \\
\qquad+\dfrac{1}{2n+1}\cdot\binom{2n+1}{6}B_3\,a^{2n-5}\ .\ .\ .\ (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{2n+1}\cdot\binom{2n+1}{2n}B_n\,a.
\end{array}\right| \qquad (29^a)$$

und

$$\left|\begin{array}{l}
\dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+2)!}\,(a^{2n+2}\,\delta_{2n+2}+a^{2n+1}\,\delta_{2n+1}+a^{2n}\,\delta_{2n}\ .\ .\ .\ +a^2\,\delta_2+a\,\delta_1) \\
=\dfrac{1}{2n+2}\,a^{2n+2}-\dfrac{1}{2}\,a^{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}\cdot\binom{2n+2}{2}B_1\cdot a^{2n}-\dfrac{1}{2n+2}\cdot\binom{2n+2}{4}B_2\,a^{2n-2} \\
\qquad+\dfrac{1}{2n+2}\cdot\binom{2n+2}{6}B_3\,a^{2n-4}\ .\ .\ .\ (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{2n+2}\cdot\binom{2n+2}{2n}B_n\cdot a^2.
\end{array}\right| \qquad (29^b)$$

Aus (29^a) folgt

$$\frac{\delta_{2n+1}}{(2n)!}=1\,,\quad \frac{\delta_{2n}}{(2n+1)!}=-\frac{1}{2}\,,\quad \frac{\delta_{2n-1}}{(2n)!}=\binom{2n+1}{2}B_1\,,\quad \delta_{2n-2}=0\,,\quad \frac{\delta_{2n-3}}{(2n)!}=-\binom{2n+1}{4}B_2\,,$$

$$\delta_{2n-4}=0\,,\ \text{allgemein}\ \frac{\delta_{2n-(2\sigma-1)}}{(2n)!}=(-1)^{\sigma-1}\cdot\binom{2n+1}{2\sigma}B_\sigma\ \text{und}\ \delta_{2n-2\sigma}=0\,,$$

wo σ gleich $1\ 2\ 3\ .\ .\ .\ n$ zu setzen ist. Von besonderer Wichtigkeit sind für uns die zwei Gleichungen:

$$\frac{\delta_1}{(2n)!}=(-1)^{n-1}\cdot\binom{2n+1}{2n}B_n\ \text{und}\ \delta_2=0;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aus denselben ergiebt sich

$$B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \binom{3}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & (2n-1) & \binom{2n-1}{2} & \binom{2n-1}{3} & \dots & \binom{2n-1}{2n-3} & \binom{2n-1}{2n-2} & 0 \\ 1 & 2n & \binom{2n}{2} & \binom{2n}{3} & \dots & \binom{2n}{2n-3} & \binom{2n}{2n-2} & \binom{2n}{2n-1} \\ 1 & (2n+1) & \binom{2n+1}{2} & \binom{2n+1}{3} & \dots & \binom{2n+1}{2n-3} & \binom{2n+1}{2n-2} & \binom{2n+1}{2n-1} \end{vmatrix} \tag{30}$$

oder auch

$$B_n = (-1)^{n-1} \cdot (2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{5!} & \dots & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n+1)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \dots & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \dots & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \tag{30^a}$$

ferner

$$0 = \begin{vmatrix} \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{2n-1}{1} & \binom{2n-1}{2} & \binom{2n-1}{3} & \binom{2n-1}{4} & \dots & \binom{2n-1}{2n-3} & \binom{2n-1}{2n-2} & 0 \\ \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \binom{2n}{3} & \binom{2n}{4} & \dots & \binom{2n}{2n-3} & \binom{2n}{2n-2} & \binom{2n}{2n-1} \\ \binom{2n+1}{1} & \binom{2n+1}{2} & \binom{2n+1}{3} & \binom{2n+1}{4} & \dots & \binom{2n+1}{2n-3} & \binom{2n+1}{2n-2} & \binom{2n+1}{2n-1} \\ & & & (n = 2\ 3\ 4\ \dots) & & & & \end{vmatrix} \tag{31}$$

oder auch

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{5!} & \dots & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \dots & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \dots & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \tag{31^a}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus (29[b]) folgt

$$\frac{\delta_{2n+2}}{(2n+1)!} = -1,\ \frac{\delta_{2n+1}}{(2n+2)!} = \frac{1}{2},\ \frac{\delta_{2n}}{(2n+1)!} = -\binom{2n+2}{2} B_1,\ \delta_{2n-1} = 0,\ \frac{\delta_{2n-2}}{(2n+1)!} =$$

$$\binom{2n+2}{4} B_2,\ \delta_{2n-3} = 0,\ \text{allgemein}\ \frac{\delta_{2n-(2\sigma-2)}}{(2n+1)!} = (-1)^{\sigma} \cdot \binom{2n+2}{2\sigma} B_{\sigma},\ \delta_{2n-(2\sigma-1)} = 0,$$

wo σ gleich 1 2 3 . . . n zu setzen ist. Auch hier betrachten wir besonders die beiden Gleichungen

$$\delta_1 = 0 \text{ und } \frac{\delta_2}{(2n+1)!} = (-1)^n \cdot \binom{2n+2}{2n} B_n;$$

aus denselben ergiebt sich:

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n+2)!} \begin{vmatrix} \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . \\ \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \binom{2n}{3} & \binom{2n}{4} & \dots & \binom{2n}{2n-2} & \binom{2n}{2n-1} & 0 \\ \binom{2n+1}{1} & \binom{2n+1}{2} & \binom{2n+1}{3} & \binom{2n+1}{4} & \dots & \binom{2n+1}{2n-2} & \binom{2n+1}{2n-1} & \binom{2n+1}{2n} \\ \binom{2n+2}{1} & \binom{2n+2}{2} & \binom{2n+2}{3} & \binom{2n+2}{4} & \dots & \binom{2n+2}{2n-2} & \binom{2n+2}{2n-1} & \binom{2n+2}{2n} \\ & & & & (n = 1\ 2\ 3\ \dots) & & & \end{vmatrix} \quad (32)$$

ferner

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \binom{3}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . \\ 1 & 2n & \binom{2n}{2} & \binom{2n}{3} & \dots & \binom{2n}{2n-2} & \binom{2n}{2n-1} & 0 \\ 1 & 2n+1 & \binom{2n+1}{2} & \binom{2n+1}{3} & \dots & \binom{2n+1}{2n-2} & \binom{2n+1}{2n-1} & \binom{2n+1}{2n} \\ 1 & 2n+2 & \binom{2n+2}{2} & \binom{2n+2}{3} & \dots & \binom{2n+2}{2n-2} & \binom{2n+2}{2n-1} & \binom{2n+2}{2n} \end{vmatrix}$$

Die Umformung der zwei letzten Determinanten führt wieder zu (30[a]) und (31[a]).

VII.

Die in (28) angegebene Summenformel können wir ebenfalls zur Herleitung von Determinanten benutzen, deren Werte sich durch die Bernoullischen Zahlen ausdrücken. Setzen wir in derselben a = Null, so erhalten wir die zwei Gleichungen:

$$\binom{2n+1}{2} B_1 - \binom{2n+1}{4} B_2 + \binom{2n+1}{6} B_3 \dots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{2n+1}{2n} B_n = \frac{2n-1}{2} \quad (33^a)$$

$$\binom{2n+2}{2} B_1 - \binom{2n+2}{4} B_2 + \binom{2n+2}{6} B_3 \dots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{2n+2}{2n} B_n = n \quad (33^b)$$

Aus denselben ergiebt sich durch Subtraktion

$$\binom{2n+1}{1} B_1 - \binom{2n+1}{3} B_2 + \binom{2n+1}{5} B_3 \dots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} \quad (33^c)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn wir in jeder Gleichung dem n die Werte 1 2 3 u. s. w. beilegen und die so gewonnenen Gleichungen nach B_1 B_2 u. s. w. auflösen, so finden wir $B_n =$

$$\frac{2^{n-1}}{(2n+1)!} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \binom{3}{1} & \binom{5}{1} & \binom{7}{1} & \binom{9}{1} & \cdots & \binom{2n-1}{1} & \binom{2n+1}{1} \\ 0 & \binom{5}{3} & \binom{7}{3} & \binom{9}{3} & \cdots & \binom{2n-1}{3} & \binom{2n+1}{3} \\ 0 & 0 & \binom{7}{5} & \binom{9}{5} & \cdots & \binom{2n-1}{5} & \binom{2n+1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{9}{7} & \cdots & \binom{2n-1}{7} & \binom{2n+1}{7} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{2n-1}{2n-3} & \binom{2n+1}{2n-3} \end{vmatrix} \tag{34}$$

oder =

$$2^{n-1} \cdot (2n-1)! \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{7!} & \frac{1}{9!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n+1)!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{8!} & \cdots & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n)!} \\ 0 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{6!} & \cdots & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-2)!} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(2n-6)!} & \frac{1}{(2n-4)!} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(2n-8)!} & \frac{1}{(2n-6)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{4!} \end{vmatrix} \tag{34^a}$$

Ferner $B_n = \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \ldots (2n-3)(2n-1)(2n+1)}$ mal

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{3}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 5 & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 7 & \binom{9}{2} & \binom{9}{4} & \binom{9}{6} & \binom{9}{8} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ (2n-1) & \binom{2n+1}{2} & \binom{2n+1}{4} & \binom{2n+1}{6} & \binom{2n+1}{8} & \cdots & \binom{2n+1}{2n-4} & \binom{2n+1}{2n-2} \end{vmatrix} \tag{35}$$

oder =

$$\frac{(2n)!}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{5}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{7}{9!} & \frac{1}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \frac{2n-1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-5)!} & \frac{1}{(2n-7)!} & \cdots & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} \end{vmatrix} \tag{35^a}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine mit (35) beinahe übereinstimmende Darstellung der Bernoullischen Zahlen hat auch Nägelsbach gegeben (cfr. Günther's Determinantentheorie, Seite 127 u. flgde.).

Endlich $B_n =$

$$\frac{2^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \binom{4}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & \binom{6}{2} & \binom{6}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & \binom{8}{2} & \binom{8}{4} & \binom{8}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & \binom{10}{2} & \binom{10}{4} & \binom{10}{6} & \binom{10}{8} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ n & \binom{2n+2}{2} & \binom{2n+2}{4} & \binom{2n+2}{6} & \binom{2n+2}{8} & \dots & \binom{2n+2}{2n-4} & \binom{2n+2}{2n-2} \end{vmatrix} \tag{36}$$

oder auch =

$$2^n \cdot (2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{4}{10!} & \frac{1}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ \frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-6)!} & \dots & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} \end{vmatrix} \tag{36^a}$$

VIII.

Aus (18^a) folgt, wenn man $(n-1) > \varkappa$ annimmt,

$$\Sigma (n-1)^\varkappa = \binom{n}{2} \beta_\varkappa^{(1)} + \binom{n}{3} \beta_\varkappa^{(2)} + \binom{n}{4} \beta_\varkappa^{(3)} \dots + \binom{n}{\varkappa+1} \beta_\varkappa^{(\varkappa)}$$

oder auch (37)

$$\frac{\Sigma (n-1)^\varkappa}{\varkappa!} = \binom{n}{2} \alpha_\varkappa^{(1)} + \binom{n}{3} \alpha_\varkappa^{(2)} + \binom{n}{4} \alpha_\varkappa^{(3)} \dots + \binom{n}{\varkappa+1} \alpha_\varkappa^{(\varkappa)}.$$

Die Unabhängigkeit der Gröfsen α und β von der Zahl n in diesen Gleichungen setzt uns instand, nicht nur neue Beziehungen unter diesen Zahlen selbst, sondern auch zwischen diesen und den Bernoullischen Zahlen herzuleiten, Beziehungen, welche insbesondere zu unabhängigen Darstellungen der letztgenannten Gröfsen verwertet werden können. Verstehen wir nämlich unter $SC_\varrho(\lambda)$ die Summe aller Kombinationen ohne Wiederholung zur ϱ^{ten} Klasse in Bezug auf die Elemente 1 2 3 . . . λ, so ist

$$\frac{n \cdot (n-1)(n-2) \dots (n-(\lambda-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \lambda} = n^\lambda - n^{\lambda-1} SC_1(\lambda-1) + n^{\lambda-2} SC_2(\lambda-1) -$$

$$- n^{\lambda-3} SC_3(\lambda-1) \dots + (-1)^{\lambda-1} SC_{\lambda-1}(\lambda-1) \cdot n \tag{38}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nehmen wir diese Umformung der Binomialkoefficienten in (37) vor, so erhalten wir $\frac{\Sigma(n-1)^{\varkappa}}{\varkappa!} =$

$$n^{\varkappa+1} \cdot \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} + n^{\varkappa}\left(\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-1)}}{\varkappa!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_1(\varkappa)\right) + n^{\varkappa-1}\left(\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-2)}}{(\varkappa-1)!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-1)}}{\varkappa!} SC_1(\varkappa-1) + \right.$$

$$\left. \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_2(\varkappa)\right) + n^{\varkappa-2}\left(\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-3)}}{(\varkappa-2)!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-2)}}{(\varkappa-1)!} SC_1(\varkappa-2) + \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-1)}}{\varkappa!} SC_2(\varkappa-1) - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_3(\varkappa)\right)$$

$$\ldots\ldots + n^{\varkappa-\lambda}\left(\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-\lambda-1)}}{(\varkappa-\lambda)!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-\lambda)}}{(\varkappa-\lambda+1)!} SC_1(\varkappa-\lambda) + \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-\lambda+1)}}{(\varkappa-\lambda+2)!} SC_2(\varkappa-\lambda+1)\right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\lambda+1} \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} S_{\lambda+1}(\varkappa)\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ n^2\left(\frac{\alpha_{\varkappa}^{(1)}}{2!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(2)}}{3!} SC_1(2) + \frac{\alpha_{\varkappa}^{(3)}}{4!} SC_2(3) \ldots\ldots\ldots\ldots (-1)^{\varkappa-1} \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_{\varkappa-1}(\varkappa)\right)$$

$$+ n\left(\frac{\alpha_{\varkappa}^{(0)}}{1!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(1)}}{2!} SC_1(1) + \frac{\alpha_{\varkappa}^{(2)}}{3!} SC_2(2) \ldots\ldots\ldots\ldots (-1)^{\varkappa} \cdot \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_{\varkappa}(\varkappa)\right) \quad (39)$$

Entwickelt man $\frac{\Sigma(n-1)^{\varkappa}}{\varkappa!}$ auch nach der Bernoullischen Summenformel, so führt die Gleichsetzung der Koefficienten gleich hoher Potenzen von n zu nachstehenden Gleichungen:

$$\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1!)} = \frac{1}{(\varkappa+1)!}$$

$$\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-1)}}{\varkappa!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_1(\varkappa) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varkappa!}$$

$$\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-2)}}{(\varkappa-1)!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-1)}}{\varkappa!} SC_1(\varkappa-1) + \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_2(\varkappa) = \frac{1}{(\varkappa+1)!} \cdot \binom{\varkappa+1}{2} B_1$$

$$\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-3)}}{(\varkappa-2)!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-2)}}{(\varkappa-1)!} SC_1(\varkappa-2) + \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-1)}}{\varkappa!} SC_2(\varkappa-1) - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_3(\varkappa) = 0$$

$$\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-4)}}{(\varkappa-3)!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-3)}}{(\varkappa-2)!} SC_1(\varkappa-3) + \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-2)}}{(\varkappa-1)!} SC_2(\varkappa-2) - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-1)}}{\varkappa!} SC_3(\varkappa-1) + \quad (40)$$

$$+ \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_4(\varkappa) = -\frac{1}{(\varkappa+1)!} \cdot \binom{\varkappa+1}{4} B_2$$

allgemein

$$\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-\lambda-1)}}{(\varkappa-\lambda)!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-\lambda)}}{(\varkappa-\lambda+1)!} SC_1(\varkappa-\lambda) + \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-\lambda+1)}}{(\varkappa-\lambda+2)!} SC_2(\varkappa-\lambda+1) \ldots (-1)^{\lambda+1} \cdot$$

$$\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_{\lambda+1}(\varkappa) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \lambda \text{ gerade}, \\ (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \cdot \frac{1}{(\varkappa+1)!} \cdot \binom{\varkappa+1}{\lambda+1} B_{\frac{\lambda+1}{2}}, \text{ wenn } \lambda \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzen wir demnach $\lambda = 2n$ und $\lambda = 2n+1$, so erhalten wir

$$\frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-2n-1)}}{(\varkappa-2n)!} - \frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-2n)}}{(\varkappa-2n+1)!} SC_1(\varkappa-2n) + \frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-2n+1)}}{(\varkappa-2n+2)!} SC_2(\varkappa-2n+1) \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{2n+1} \cdot \frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_{2n+1}(\varkappa) = 0 \qquad (41)$$

$$\frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-2n-2)}}{(\varkappa-2n-1)!} - \frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-2n-1)}}{(\varkappa-2n)!} SC_1(\varkappa-2n-1) + \frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-2n)}}{(\varkappa-2n+1)!} SC_2(\varkappa-2n) \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{2n+2} \cdot \frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa)}}{(\varkappa+1)!} SC_{2n+2}(\varkappa) = (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+2)!} \cdot \binom{\varkappa+1}{2n+2} B_{n+1}. \qquad (41^a)$$

Die beiden letzten Gleichungen werden besonders einfach und bequem bei den Koefficienten von n, hier erhalten wir

$$-\frac{\alpha_{2n}^{(1)}}{2} + \frac{\alpha_{2n}^{(2)}}{3} - \frac{\alpha_{2n}^{(3)}}{4} + \frac{\alpha_{2n}^{(4)}}{5} \ldots + (-1)^{2n} \cdot \frac{\alpha_{2n}^{(2n)}}{(2n+1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{B_n}{(2n)!} \qquad (42)$$

$$-\frac{\alpha_{2n+1}^{(1)}}{2} + \frac{\alpha_{2n+1}^{(2)}}{3} - \frac{\alpha_{2n+1}^{(3)}}{4} + \frac{\alpha_{2n+1}^{(4)}}{5} \ldots + (-1)^{2n+1} \cdot \frac{\alpha_{2n+1}^{(2n+1)}}{(2n+2)} = 0. \qquad (42^a)$$

$(n = 1, 2, 3$ u. s. w.$)$

Wenn wir die α durch β ersetzen, so finden wir zwei Gleichungen, welche schon von Staudt in seiner Abhandlung „de numeris Bernoullianis", Erlangen 1845, aufgestellt und behandelt hat, nämlich

$$(-1)^{n-1} \cdot B_n = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=2n} (-1)^\varrho \cdot \frac{\beta_{2n}^{(\varrho)}}{\varrho+1} \text{ und } 0 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=2n+1} (-1)^\varrho \cdot \beta_{2n+1}^{(\varrho)} \qquad (43)$$

Mit Benutzung von (3) gehen dieselben in die Form über

$$(-1)^{n-1} \cdot B_n = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2n} (-1)^\lambda \cdot \lambda^{2n} \left(\frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda+2} \cdot \binom{\lambda+1}{1} + \frac{1}{\lambda+3} \cdot \binom{\lambda+2}{2} \ldots + \frac{1}{2n+1} \cdot \binom{2n}{2n-\lambda} \right) \qquad (44)$$

$$0 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2n+1} (-1)^\lambda \cdot \lambda^{2n+1} \left(\frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda+2} \cdot \binom{\lambda+1}{1} + \frac{1}{\lambda+3} \cdot \binom{\lambda+2}{2} \ldots + \frac{1}{2n+2} \cdot \binom{2n+1}{2n+1-\lambda} \right) \qquad (44^a)$$

Behandeln wir die Gleichung (11)

$$\frac{n^\varkappa}{\varkappa!} = \binom{n}{1} \alpha_\varkappa^{(1)} + \binom{n}{2} \alpha_\varkappa^{(2)} + \binom{n}{3} \alpha_\varkappa^{(3)} \ldots + \binom{n}{n} \alpha_\varkappa^{(\varkappa)}$$

in ganz entsprechender Weise wie (37), so gewinnen wir ähnliche Beziehungen unter den Gröfsen α wie in (40), nämlich

$$\frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-1)}}{(\varkappa-1)!} - \frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa)}}{\varkappa!} SC_1(\varkappa-1) = 0$$

$$\frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-2)}}{(\varkappa-2)!} - \frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-1)}}{(\varkappa-1)!} SC_1(\varkappa-2) + \frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa)}}{\varkappa!} SC_2(\varkappa-1) = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

allgemein

$$\frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-\lambda)}}{(\varkappa-\lambda)!}-\frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-\lambda+1)}}{(\varkappa-\lambda+1)!}\,\mathrm{SC}_1(\varkappa-\lambda)+\frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa-\lambda+2)}}{(\varkappa-\lambda+2)!}\,\mathrm{SC}_2(\varkappa-\lambda+1)\;\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^\lambda\frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa)}}{\varkappa!}\,\mathrm{SC}_\lambda(\varkappa-1)=0\,; \tag{45}$$

endlich

$$\frac{\alpha_\varkappa^{(1)}}{1}-\frac{\alpha_\varkappa^{(2)}}{2}+\frac{\alpha_\varkappa^{(3)}}{3}-\frac{\alpha_\varkappa^{(4)}}{4}\;\ldots\;+(-1)^{\varkappa-1}\cdot\frac{\alpha_\varkappa^{(\varkappa)}}{\varkappa}=0$$

$$(\varkappa=2,\ 3,\ 4 \text{ u. s. w.}).$$

Demnach ist auch

$$\frac{\beta_\varkappa^{(1)}}{1}-\frac{\beta_\varkappa^{(2)}}{2}+\frac{\beta_\varkappa^{(3)}}{3}-\frac{\beta_\varkappa^{(4)}}{4}\;\ldots\;+(-1)^{\varkappa-1}\cdot\frac{\beta_\varkappa^{(\varkappa)}}{\varkappa}=0$$

oder

$$0=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa}(-1)^{\lambda+1}\cdot\lambda^\varkappa\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda+1}\cdot\binom{\lambda+1}{1}+\frac{1}{\lambda+2}\cdot\binom{\lambda+2}{2}\cdot\;\ldots\;+\frac{1}{\varkappa}\cdot\binom{\varkappa}{\varkappa-\lambda}\right) \tag{46}$$

$$(\varkappa=2,\ 3,\ 4 \text{ u. s. w.}).$$

Ersetzen wir die α durch ihre Summenausdrücke, sowie die β durch die Gröfsen γ bezw. deren Summenausdrücke, so gehen die Gleichungen (46), (44[a]) und (44) in nachstehende über:

$$0=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa}(-1)^{\lambda+1}\cdot\Sigma\frac{1}{\varepsilon_0!\,\varepsilon_1!\ldots\varepsilon_{\lambda-1}!_{(=\varkappa)}}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda+1}\cdot\binom{\lambda+1}{1}+\frac{1}{\lambda+2}\cdot\binom{\lambda+2}{2}\cdot\cdot+\frac{1}{\varkappa}\cdot\binom{\varkappa}{\varkappa-\lambda}\right)$$

$$(\varkappa=2,\ 3,\ 4 \text{ u. s. w.}).$$

$$0=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2n+1}(-1)^\lambda\,\Sigma\frac{1}{\varepsilon_0!\,\varepsilon_1!\ldots\varepsilon_{\lambda-1}!_{(=2n+1)}}\left(\frac{1}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda+2}\cdot\binom{\lambda+1}{1}+\frac{1}{\lambda+3}\cdot\binom{\lambda+2}{2}\cdot\;\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n+2}\cdot\binom{2n+1}{2n+1-\lambda}\right)$$

$$(-1)^{n-1}\cdot\frac{B_n}{(2n)!}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2n}(-1)^\lambda\,\Sigma\frac{1}{\varepsilon_0!\,\varepsilon_1!\ldots\varepsilon_{\lambda-1}!_{(=2n)}}\left(\frac{1}{\lambda+1}+\frac{1}{\lambda+2}\cdot\binom{\lambda+1}{1}+\frac{1}{\lambda+3}\cdot\binom{\lambda+2}{2}\right.$$

$$\left.\ldots\;+\frac{1}{2n+1}\cdot\binom{2n}{2n-\lambda}\right)$$

$$0=\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\varkappa}(-1)^\varrho\cdot\frac{1}{\varrho}\cdot\Sigma\frac{1}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_\varrho!_{(=\varkappa)}}$$

$$0=\sum_{\varrho=1}^{\varrho=2n+1}(-1)^\varrho\cdot\frac{1}{\varrho+1}\,\Sigma\frac{1}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_\varrho!_{(=2n+1)}}$$

$$(-1)^{n-1}\cdot\frac{B_n}{(2n)!}=\sum_{\varrho=1}^{\varrho=2n}(-1)^\varrho\cdot\frac{1}{\varrho+1}\,\Sigma\frac{1}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_\varrho!_{(=2n)}}.$$

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

allgemein

$$\frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-\lambda)}}{(\varkappa-\lambda)!} - \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa-\lambda+1)}}{(\varkappa-\lambda+1} \qquad -\lambda+1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{45}$$

endlich

$$\frac{\alpha_{\varkappa}^{(1)}}{1} - \qquad {}^{-1} \cdot \frac{\alpha_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{\varkappa} = 0$$

Demnach ist

$$\frac{\beta_{\varkappa}^{(1}}{1} \qquad {}^{1} \cdot \frac{\beta_{\varkappa}^{(\varkappa)}}{\varkappa} = 0$$

oder

$$0 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa} (-1)^{\lambda+1} \cdot \lambda^{\varkappa} \left(- \qquad . \; . \; . \; . \; + \frac{1}{\varkappa} \cdot \binom{\varkappa}{\varkappa-\lambda} \right) \tag{46}$$

Ersetzen wir ke, sowie die β durch die Gröfsen γ bezw. derer eichungen (46), (44[a]) und (44) in nachstehende über:

$$0 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa} (-1)^{\lambda+1} \cdot \Sigma \frac{}{\varepsilon_0!} \qquad \frac{1}{\lambda+2} \cdot \binom{\lambda+2}{2} \cdot \cdot + \frac{1}{\varkappa} \cdot \binom{\varkappa}{\varkappa-\lambda} \Big)$$

$$0 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2n+1} (-1)^{\lambda} \; \Sigma \frac{}{\varepsilon_0! \; \varepsilon_1! \; .} \qquad \Big) + \frac{1}{\lambda+3} \cdot \binom{\lambda+2}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$(-1)^{n-1} \cdot \frac{B_n}{(2n)!} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2} (\qquad \frac{1}{\lambda+2} \cdot \binom{\lambda+1}{1} + \frac{1}{\lambda+3} \cdot \binom{\lambda+2}{2}$$

$$\Big)$$

$$\overline{\qquad (=\varkappa)}$$

$$\overline{\qquad = 2n+1)}$$

$$(-1 \qquad \frac{1}{! \ldots \varepsilon_\varrho! \; (=2n)} \, .$$

Grauskala #13 B.I.G.
C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf