§ 1.

Ansatz zur Lösung. Unterscheidung der möglichen Fälle.

Jede Fläche mit einer Schar reeller Hyperbeln kann durch ein Gleichungssystem von der Form

$$
(1) \qquad \begin{aligned} tx &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \\ ty &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2, \\ tz &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \end{aligned}
$$

analytisch dargestellt werden. Die neun Größen a_i, b_i, c_i sind reelle Funktionen eines Argumentes v, das von der Veränderlichen t unabhängig ist.

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde.

Bei den folgenden Untersuchungen wird von vornherein der Fall ausgeschlossen, wo die Hyperbeln in Gerade zerfallen, denn es ist bekannt, daß die Ebene und die Schraubenfläche

$$
z = a \; arctg \frac{y}{x}
$$

die einzigen reellen geradlinigen Minimalflächen sind.

Wenn die oben erklärten Flächen Minimalflächen sein sollen, so müssen für die Koordinaten x, y, z die Formeln gelten:

$$
(2a) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int^{s} (1 - s^2)\, \mathfrak{F}(s)\, ds + \frac{1}{2}\int^{s_1} (1 - s_1^2)\, \mathfrak{F}_1(s_1)\, ds_1, \\ y &= \frac{i}{2}\int^{s} (1 + s^2)\, \mathfrak{F}(s)\, ds - \frac{i}{2}\int^{s_1} (1 + s_1^2)\, \mathfrak{F}_1(s_1)\, ds_1, \\ z &= \int^{s} s\, \mathfrak{F}(s)\, ds + \int^{s_1} s_1\, \mathfrak{F}_1(s_1)\, ds_1 \end{aligned}
$$

oder

$$
(2b) \qquad \begin{aligned} x = \Re\int^{s} (1 - s^2)\, \mathfrak{F}(s)\, ds, \quad y = \Re\int^{s} i\,(1 + s^2)\, \mathfrak{F}(s)\, ds, \\ z = \Re\int^{s} 2\, s\, \mathfrak{F}(s)\, ds. \end{aligned}
$$

Hierin ist $\mathfrak{F}$ eine Funktion von s allein und $\mathfrak{F}_1$ die konjugierte komplexe Funktion des konjugierten komplexen Argumentes s_1. Der Buchstabe $\Re$ dient zur Bezeichnung des reellen Teiles der dahinter stehenden komplexen Größe.

Der Zusammenhang von (1) und (2) wird durch die Beziehungen

$$s = \frac{X + iY}{1 - Z}, \tag{3a}$$

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{dx + i(Zdy - Ydz)}{(1 - s^2)\,ds} = \frac{dy + i(Xdz - Zdx)}{i(1 + s^2)\,ds} = \frac{dz + i(Ydx - Xdy)}{2\,s\,ds}, \tag{3b}$$

vermittelt, die Herr H. A. Schwarz aufgestellt hat.

Berechnet man aus (1) dx, dy, dz und die Richtungskosinus X, Y, Z für einen konstanten Wert v_0 von v, so erhält man durch Elimination von t aus den Formeln (3a) und (3b) im allgemeinen nur eine Funktion $\mathfrak{F}(s)$, zwei jedoch dann, wenn die Irrationalität der Größen X, Y, Z in Bezug auf t wegfällt und deshalb durch (3a) zwei Funktionen s von t erklärt sind. Beide Funktionen $\mathfrak{F}(s)$ bestimmen aber dieselbe Fläche.

Jede Funktion $\mathfrak{F}(s)$ muß im vorliegenden Falle eine algebraische Funktion von s und unabhängig von v sein, wenn diese Größe jetzt als veränderlicher Parameter aufgefaßt wird.

Alle gesuchten Flächen werden von der unendlich fernen Ebene in den reellen Kurven $t = 0$ und $t = \infty$ geschnitten. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems ist $\mathfrak{F}(s)$ für $t = 0$ und $t = \infty$ unendlich groß. Die Größe s muß also längs jener Kurven konstant sein, etwa gleich s' und s''. Man kann infolgedessen die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ für die Umgebung der Stellen s' und s'' in Potenzreihen entwickeln, deren Koeffizienten von v nicht mehr abhängig sein dürfen. Dadurch erhält man Differentialgleichungen für die Größen a_i, b_i, c_i.

Zu diesen Gleichungen gelangt man auch in der Weise, daß man zunächst nur den Charakter der Entwicklung von $\mathfrak{F}(s)$ bestimmt, die Koeffizienten konstant wählt, nach (2b) die Integration ausführt, hinterher wieder zu den Veränderlichen t und v übergeht und die gefundenen Ausdrücke für x, y, z mit den ursprünglichen vergleicht.

Aus dem Verhalten der Größe s längs der Kurven $t = 0$ und $t = \infty$ geht hervor, daß alle Asymptoten der einen Schar einer festen Ebene parallel sein müssen, ebenso alle der andern Schar, daß man also zwei reelle Konstante μ, ν und eine reelle Funktion q von v einführen und

$$c_0 = 0, \quad b_2 = \mu q, \quad c_2 = \nu q \tag{4}$$

setzen kann.

Werden die Größen A, B, C in der gewohnten Weise erklärt, so ergibt sich:

$$A : B : C : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = X : Y : Z : 1, \tag{5}$$

$$
(6) \qquad \begin{aligned} A &= \quad A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3, \\ B &= \quad B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3 + B_4 t^4, \\ C &= C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4, \end{aligned}
$$

falls

$$
(7) \qquad \begin{aligned} &C_0 = a_0 b_0' - a_0' b_0,\ C_1 = a_0 b_1' - a_1' b_0,\ C_2 = a_0 b_2' - a_2' b_0 + a_0' b_2 - a_2 b_0', \\ &C_3 = a_1' b_2 - a_2 b_1',\ C_4 = a_2' b_2 - a_2 b_2' \end{aligned}
$$

ist und falls hieraus die andern Größen A_i, B_i durch selbstverständliche cyklische Vertauschungen gebildet werden.

Wird das Vorzeichen der in (5) auftretenden Wurzel passend gewählt, so gilt für die Umgebung der Stelle $t = 0$ folgende Potenzentwicklung:

$$
(8) \qquad s = \omega_1 t + \omega_2 t^2 + \omega_3 t^3 + \ldots,
$$

allerdings, wie man aus der Gleichung

$$
2\, C_0 \omega_1 + A_1 + i B_1 = 0
$$

erkennt, mit der Beschränkung, daß die Größen C_0 und $A_1 + iB_1$ nicht überall den Wert 0 annehmen, daß also die Werte von $a_0 : b_0$ und c_1 nicht konstant sind.

Man kann deshalb zunächst nach allen Flächen fragen, bei denen die Hyperbelasymptoten der einen Schar weder parallel sind noch derselben Ebene angehören (Fall $\mathfrak{A}$), dann nach allen, bei denen jene Asymptoten parallel sind (Fall $\mathfrak{B}$), und endlich nach den noch übrigen, bei denen die Asymptoten in derselben Ebene liegen (Fall $\mathfrak{C}$). Bei Fall $\mathfrak{B}$ soll das gleichzeitige Eintreten des Falls $\mathfrak{C}$ nicht ausgeschlossen sein.

Durch die Entwicklung von s für die Umgebung der Stelle $t = \infty$ gelangt man ebenso zur Scheidung von drei Fällen ($\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$), die den vorher aufgezählten entsprechen.

Die weitere Untersuchung gliedert sich demnach in folgender Weise:

1) $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, 2) $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$, 3) $\mathfrak{A}\mathfrak{C}'$, 4) $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, 5) $\mathfrak{B}\mathfrak{C}'$, 6) $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$.

Nimmt man in (1) die Substitution $t \parallel t^1$ vor, so ist die Übereinstimmung der Fälle $\mathfrak{B}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{B}'$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}'$ ersichtlich.

§ 2.

Fall $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$.

Die Quotienten $a_0 : b_0$, $a_2 : b_2$ und die Größen c_1, $\nu b_1 - \mu c_1$ sind nicht konstant.

Das Verhalten der Funktion $s(t)$ an der Stelle $t = 0$ wird durch das erste Glied $\omega_1 t$ der Potenzreihe (8) bestimmt. Daher ergibt sich, wenn man die beiden Ausdrücke (1) und (2) für jede der Koordinaten vergleicht, daß die Reihenentwicklung des in Betracht kommenden Zweiges von $\mathfrak{F}(s)$ folgender Art sein muß:

$$
\mathfrak{F}(s) = (a' - ia)\, s^{-2} + (b' - ib)\, s^{-1} + \ldots
$$

und daß x, y, z nur dann algebraische Funktionen von t sein können, wenn a', b', b verschwinden. Mithin ist

$$x - iy = ias^{-1} + * + s\mathfrak{P}_1(s) + s_1\mathfrak{P}_2(s_1), \tag{9}$$

$$z = \Re(-2ialgs + * + ce^{i\gamma}s^2 + de^{i\delta}s^3 + \ldots). \tag{10}$$

Wir dürfen annehmen, es sei das Gleichungssystem (1) aus einem andern durch die Substitution $t \parallel rt$ hervorgegangen. Geeignete Wahl von r und geeignete Einführung der Veränderlichen v ermöglichen es dann

$$a_0 = asinv, \quad b_0 = -acosv \tag{11}$$

zu setzen. Diese Relationen bestehen neben den oben aufgestellten

$$c_0 = 0, \quad b_2 = \mu q, \quad c_2 = \nu q. \tag{12}$$

Die Abhängigkeit der Koeffizienten ω_i von den Größen A_i, B_i, C_i wird durch die Gleichung

$$s^2(A - iB) = 2sC + A + iB$$

bestimmt. Es ist

$$\begin{aligned} 2\omega_1 C_0 + A_1 + iB_1 &= 0, \\ 2(\omega_1 C_1 + \omega_2 C_0) + A_2 + iB_2 &= 0, \\ 2(\omega_1 C_2 + \omega_2 C_1 + \omega_3 C_0) + A_3 + iB_3 &= \omega_1^2(A_1 - iB_1), \\ 2(\omega_1 C_3 + \omega_2 C_2 + \omega_3 C_1 + \omega_4 C_0) \qquad + iB_4 &= \omega_1^2(A_2 - iB_2) + 2\omega_1\omega_2(A_1 - iB_1). \end{aligned} \tag{13}$$

Statt der Größen $lgs, s, s^2 \ldots$ in (9) und (10) führen wir nun die Reihenentwicklungen an der Stelle $t = 0$ ein. Wird die Fläche in der Richtung der Koordinatenachsen passend verschoben, so muß der Koeffizient von t^0 in (10) gleich c_1, der von t^0 in (9) gleich $a_1 - ib_1$ sein, und die Koeffizienten von t^2 und t^3 in (10) müssen verschwinden. Dadurch erhält man

$$c_1 = 2av, \quad 2(a_1cosv + b_1sinv) = c_2, \tag{14), (15}$$

$$2a(a_2cosv + b_2sinv) = c_2(a_1sinv - b_1cosv) + accos(2v + \gamma), \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &c_2^3 + 12ac_2(a_2sinv - b_2cosv) - 12acc_2sin(2v + \gamma) \\ &= 12ac(a_1sinv - b_1cosv)cos(2v + \gamma) - 6a^2dcos(3v + \delta). \end{aligned} \tag{17}$$

Es wird jetzt ganz entsprechend das Verhalten der Fläche längs der Kurve $t = \infty$ betrachtet.

Wir nehmen die Koordinatentransformation

$$\xi = x, \ \eta = \mu_1 y + \nu_1 z, \ \zeta = \mu_1 z - \nu_1 y,$$
$$\mu_1 : \nu_1 : 1 = \mu : \nu : \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$$

vor, führen durch

$$a_2 = a'\rho sin\varphi, \ \sqrt{\mu^2 + \nu^2}q = -a'\rho cos\varphi, \ \rho t\tau = 1 \tag{18}$$

die Konstante a', die Funktionen ρ und φ von v und statt t die Veränderliche τ ein und stellen die Koordinaten ξ, η, ζ durch die Gleichungen

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
\tau\xi &= a'\sin\varphi + a_1\tau + a\rho\sin v\,\tau^2,\\
\tau\eta &= -a'\cos\varphi + (\mu_1 b_1 + \nu_1 c_1)\,\tau - \mu_1 a\rho\cos v\,\tau^2,\\
\tau\zeta &= (\mu_1 c_1 - \nu_1 b_1)\,\tau + \nu_1 a\rho\cos v\,\tau^2
\end{aligned}
$$

in derselben Form dar wie früher x, y, z.

Ersetzen wir in (14) bis (17) die Funktionen von v durch die ihnen jetzt entsprechenden und berücksichtigen wir, daß eine beliebige Wahl der Integrationskonstanten in (2a) und (2b) nicht mehr statthaft ist, wodurch sich das Auftreten der Konstanten α_1, β_1, γ_1 erklärt, so entstehen die Gleichungen

$$(20)\qquad \mu_1 c_1 - \nu_1 b_1 + 2a\gamma_1 = 2a'\varphi,$$

$$(21)\qquad 2\,(a_1 + \alpha_1)\cos\varphi + 2\,(\mu_1 b_1 + \nu_1 c_1 + \beta_1)\sin\varphi = \nu_1 a\rho\cos v,$$

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
&2aa'\rho\,(\sin v\cos\varphi - \mu_1\cos v\sin\varphi) = a'c'\cos(2\varphi + \gamma')\\
&+ \nu_1 a\rho\cos v\,[(a_1 + \alpha_1)\sin\varphi - (\mu_1 b_1 + \nu_1 c_1 + \beta_1)\cos\varphi],
\end{aligned}
$$

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
&(\nu_1 a\rho\cos v)^3 + 12\nu_1 a^2 a'\rho^2\cos v\,(\sin v\sin\varphi + \mu_1\cos v\cos\varphi)\\
&- 12\nu_1 a\,a'c'\rho\cos v\sin(2\varphi + \gamma') = -6a'^2 d'\cos(3\varphi + \delta')\\
&+ 12a'c'\,[(a_1 + \alpha_1)\sin\varphi - (\mu_1 b_1 + \nu_1 c_1 + \beta_1)\cos\varphi]\cos(2\varphi + \gamma').
\end{aligned}
$$

Wir gehen jetzt von der Annahme aus, ν sei von 0 verschieden.

Unter F_i sollen algebraische Funktionen der jedesmal beigefügten Argumente verstanden werden.

Durch Elimination von $a_1\sin v - b_1\cos v$ aus (16) und (17) ergibt sich, wenn $b_2 = \mu q$ gesetzt wird, $a_2 = F_1(q, \sin v)$, solange nicht

$$(24)\qquad \nu^2 q^2\sin v - 2a c\cos(2v + \gamma)\cos v = 0$$

ist. Aus (15), (16) und dann aus (18) folgt

$$a_1 = F_2(q, \sin v), \qquad b_1 = F_3(q, \sin v),$$
$$\rho = F_4(q, \sin v), \quad \sin\varphi = F_5(q, \sin v).$$

Eliminieren wir ferner $\mu_1 b_1 + \nu_1 c_1 + \beta_1$ aus (21) und (23) und führen wir statt ρ, $\sin\varphi$, . . die eben erhaltenen Funktionen von q und $\sin v$ ein, so entsteht zwischen q und $\sin v$ eine algebraische Gleichung $F_6(q, \sin v) = 0$. Die Entwicklung von F_6 nach fallenden Potenzen von q besitzt im ersten Gliede einen Koeffizienten, der nur mit dem Faktor ν gleichzeitig verschwinden kann. Hiernach ist

$$q = F_7(\sin v).$$

Für den besonderen Fall, der an das Bestehen der Gleichung (24) geknüpft ist, ergeben sich der Reihe nach aus (24), (15) und (16), (18) q, a_1, b_1, ρ, $\sin\varphi$ als algebraische Funktionen von a_2 und $\sin v$. Die vorher aus (21) und (23) hergeleitete Gleichung erklärt a_2 als algebraische Funktion von $\sin v$ allein, wie eine der früheren entsprechende Betrachtung erweist.

a_1, b_1, a_2, q, ρ, $sin\varphi$ müssen demnach algebraische Funktionen von $sin v$ sein. Die Folgerung aus (21):

$$c_1 = F_8 (sin v)$$

ist aber mit (14) nicht vereinbar.

Wir dürfen somit setzen:

(25) $$\nu = 0, \quad \nu_1 = 0, \quad \mu = 1, \quad \mu_1 = 1, \quad q = b_2.$$

Die Hyperbeln liegen in den parallelen Ebenen $z = 2av$. Jede der beiden von den Hyperbelasymptoten erzeugten Flächen ist eine geradlinige Minimalfläche.

Das Eintreten eines der Fälle $c = 0$, $c' = 0$ hätte auch das Eintreten des andern zur Folge, die gesuchten Minimalflächen und jene geradlinigen Flächen wären identisch.

Da die Hyperbeln in den parallelen Ebenen $z =$ konst. liegen, können wir das Koordinatensystem von vornherein so um die Z-Achse drehen, daß das konstante Glied in der Entwicklung von $\mathfrak{F}(s)$ einen reellen Wert besitzt, daß also

(26) $$\gamma = 0$$

ist. Der Koeffizient von s^2 bleibt bei einer solchen Drehung ungeändert.

Die oben aufgestellten Gleichungen (14) bis (18) und (20) bis (23) erhalten jetzt folgende Form:

(27a, b) $$c_1 = 2av, \quad a_1 cos v + b_1 sin v = 0,$$

(28) $$2 (a_2 cos v + b_2 sin v) = c cos 2v,$$

(29) $$2c (a_1 sin v - b_1 cos v) cos 2v = a d cos (3v + \delta),$$

(30a, b) $$a_2 = a' \rho sin\varphi, \quad b_2 = - a' \rho cos\varphi,$$

(31a, b) $$a (v + \gamma_1) = a'\varphi, \quad (a_1 + \alpha_1) cos\varphi + (b_1 + \beta_1) sin\varphi = 0,$$

(32) $$2a (a_2 cos v + b_2 sin v) = - a'c' cos (2\varphi + \gamma'),$$

(33) $$2c' [(a_1 + \alpha_1) sin\varphi - (b_1 + \beta_1) cos\varphi] cos (2\varphi + \gamma') = a'd' cos (3\varphi + \delta').$$

Aus der gleichzeitigen Betrachtung von (28), (31a), (32) ergibt sich

(34) $$a' = \varkappa a, \quad \varphi = \varkappa (v + \gamma_1), \quad \varkappa = \pm 1.$$

Setzt man die aus (27b) und (29) für a_1 und b_1 berechneten Ausdrücke und den aus der Beziehung (31a) für φ hergeleiteten in die Gleichung (31b) ein, so muß die linke Seite identisch verschwinden. Deshalb bleiben nur die beiden Fälle zu erledigen:

(I) $$a' = a, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = n\pi;$$

(II) $$a' = \pm a, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad d = 0, \quad a_1 = b_1 = 0.$$

Im Falle (I) kann aber (30) durch

$$a_2 = a\rho sin v cos n\pi, \quad b_2 = - a\rho cos v cos n\pi$$

und (27b) durch

$$a_1 = p sin v, \quad b_1 = - p cos v$$

ersetzt werden, woraus zu entnehmen ist, daß die Fläche geradlinig wird.

Im Falle (II) folgt aus (28), (30), (31a):

$$2\varkappa a\rho \sin(\varkappa v - v + \varkappa\gamma_1) = c\cos 2v, \quad \varkappa = \pm 1. \tag{35}$$

Die Koordinaten sind dabei durch die Relationen

$$\begin{aligned} tx &= a\sin v + a\rho\sin(v+\gamma_1)\,t^2, \\ ty &= -a\cos v - \varkappa a\rho\cos(v+\gamma_1)\,t^2, \\ z &= 2av \end{aligned} \tag{36}$$

bestimmt.

Sind die beiden Seiten der Gleichung (35) einzeln gleich 0, so enthält die Minimalfläche wieder eine Schar von Geraden.

Die Annahme, daß ρ konstant sei, führt auf die Gleichungen

$$\begin{gathered} tx = a\sin v + m\cos v\,t^2, \quad ty = -a\cos v - m\sin v\,t^2, \\ z = 2av \quad [m \text{ konstant}]. \end{gathered} \tag{37}$$

Jede Kurve, längs der die Größe t ihren Wert nicht ändert, schneidet die Hyperbeln unter rechten Winkeln. Da aber die in parallelen Ebenen liegenden Hyperbeln ein isometrisches Kurvensystem bilden müssen, dessen Parameter als Abstand der Hyperbelebenen von einer festen Hyperbelebene gedeutet werden kann, so gelangen wir auch hier zu einer geradlinigen Minimalfläche.

Die Größe ρ ist also von v abhängig und verschwindet gleichzeitig mit $\cos 2v$. Den Nullstellen entsprechen Gerade, die Symmetrielinien der Fläche sein müssen.

Für $\varkappa = +1$ ergibt sich daher $\gamma_1 = n\pi + \frac{1}{2}\pi$, wo statt n jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann.

Nach den Ausführungen im ersten Paragraphen ist es jetzt möglich, aus den Gleichungen (35) und (36) s als Funktion von t und $\mathfrak{F}(s)$ als Funktion von s zu bestimmen. Legt man der Berechnung von $\mathfrak{F}(s)$ zuerst die Kurve $v = \frac{1}{4}\pi$, darauf die Kurve $v = \frac{3}{4}\pi$ zu Grunde, so müssen die Resultate identisch sein.

Wir behalten die Z-Achse bei und drehen die XY-Ebene im positiven Sinne um 45°. Es ergeben sich dann für $\mathfrak{F}(s)$ die Ausdrücke

$$\frac{a}{2is^2}\left(1 \pm \frac{s^2-1}{\sqrt{(s^2-1)^2+4ks^2}}\right) \text{ und } \frac{a}{2is^2}\left(1 \pm \frac{s^2+1}{\sqrt{(s^2+1)+4ks^2}}\right),$$

falls $ak = c$ ist. Übereinstimmung dieser Funktionen ist aber nur für eine geradlinige Fläche zu erzielen.

Wird $\varkappa = -1$ gewählt, so muß wiederum jede der Geraden $\cos 2v = 0$ Symmetrielinie sein. Deshalb ist $\gamma_1 = n\pi$. Dieselbe Eigenschaft muß aber allen Geraden dieser Flächen

$$4\,(x^2\cos^2 v - y^2\sin^2 v) = ac\sin 4v, \quad z = 2av,$$

also auch der Geraden $v = 0$ zukommen.

Nur eine Minimalfläche mit einer Schar von Geraden genügt den gestellten Bedingungen.

§ 3.

Fall $\mathfrak{AB}'$.

Die Asymptotenlinien der einen Schar sind nicht parallel und liegen nicht in einer Ebene, die der andern Schar sind parallel. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems und der Veränderlichen v ist — vergl. (4) und (11) —

$$(38)\qquad \begin{gathered} c_0 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = \mu q, \quad c_2 = \nu q, \\ a_0 = a \sin v, \quad b_0 = -a \cos v. \end{gathered}$$

Die Werte der Größen $a_0 : b_0$ und c_1 sind nicht konstant.

Wir gehen zunächst von der Annahme aus:

$$\nu \gtrless 0.$$

Für den vorliegenden Fall bleiben die Gleichungen (14) bis (17) gültig, wenn in ihnen $a_2 = 0$ gesetzt wird. Aus (15) und (16) ergeben sich a_1 und b_1 als algebraische Funktionen von q und $\sin v$. Mithin sind q — vergl. (17) — und a_1, b_1 algebraische Funktionen von $\sin v$. Da nun s für $t = \infty$ einen von v unabhängigen Wert annehmen muß und da

$$A_4 = 0, \quad B_4 = 0,$$
$$A_3 = (\nu b_1' - \mu c_1')\, q, \quad B_3 = -\nu a_1' q, \quad C_3 = \mu a_1' q$$

ist, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Formel $c_1 = 2av$

$$a_1 = \text{konst. oder } \mu = 0 \text{ und } a_1' : b_1' = \text{konst.}$$

Der zweite Fall kann durch eine Koordinatentransformation auf den ersten zurückgeführt werden.

Wäre jetzt außer B_3 und C_3 auch $A_3 = 0$, d. h. $\mu = 0$, $b_1 = \text{konst.}$, so müßte wegen (15) $q = 0$ sein, damit s für $t = \infty$ konstant ist.

Davon abgesehen läßt sich die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ an der Stelle $s = 1$ $(t = \infty)$ in eine Potenzreihe entwickeln. Wird der Koeffizient des ersten Gliedes berechnet und gleich einer Konstanten gesetzt, so ergibt sich

$$\mu = 0, \quad q \sin v = \varepsilon b_1 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon = \text{konst.} \gtrless 0, \quad \varepsilon_1 = \text{konst.}$$

Aus den Gleichungen (15), (16), (17) folgt dann, daß die Annahme $\nu \gtrless 0$ unhaltbar ist.

Die Hyperbeln liegen also in parallelen Ebenen.

Wir wählen deshalb

$$\nu = 0, \quad \mu = 1.$$

Da die Größe s längs der Kurve $t = \infty$ ihren Wert nicht ändern darf, erhält man

$$a_1 = \alpha v + \alpha_1, \quad \alpha = \text{konst.}, \quad \alpha_1 = \text{konst.}$$

Auf der Fläche liegt, wie aus (14) bis (17) zu ersehen ist, eine Schar von Geraden, wenn nicht die Gleichungen

$$a_1 = b_1 = 0, \quad 2q\sin v = c\cos(2v + \gamma)$$

gleichzeitig bestehen.

Berechnet man aber für diesen Fall wieder den ersten Koeffizienten in der Entwicklung von $\mathfrak{F}(s)$, der konstant sein muß, so folgt, daß auch die Ableitung von $q\sin v$ nach v konstant, mithin $c = 0$ ist.

Ein neues Resultat wird, wie die Gleichung (16) zeigt, auch hier nicht erzielt.

§ 4.

Fall $\mathfrak{A}\mathfrak{C}'$.

Die Asymptotenlinien der einen Schar sind nicht parallel und liegen nicht in einer Ebene, die der andern Schar gehören alle derselben Ebene an. Der Fall, wo diese Asymptotenlinien auch untereinander parallel sind, ist bereits im § 3 erledigt worden.

Wir können

(39a) $a_0 = a\sin v, \quad b_0 = -a\cos v, \quad c_0 = 0, \quad b_2 = \mu q, \quad c_2 = \nu q,$

(39b) $\mu c_1 - \nu b_1 = \text{konst.}, \quad \nu \gtrless 0$

setzen. Die Größen $a_0 : b_0$, c_1, $a_2 : q$ sind nicht konstant.

Auch jetzt gelten die Gleichungen (14) bis (17). Man gelangt wieder durch eine passende Koordinatentransformation zu dem Gleichungssystem (18), (19).

Entwickelt man nun $\mathfrak{F}(s)$ für die Stelle $s = 0$ ($t = \infty$, $\tau = 0$) in eine nach Potenzen von $s^{1/2}$ fortschreitende Reihe und setzt man den Koeffizienten des ersten Gliedes ($s^{-1/2}$) gleich einer Konstanten, so erhält man bei geeigneter Wahl von a'

$$a\rho\cos v = -2a'\sin(\varphi + \varepsilon),$$

worin ε konstant ist. Wir drücken die Größen ρ, φ mittels der Beziehungen (18) durch a_2 und q aus. Dann nimmt jene Gleichung folgende Gestalt an:

$$a(a_2^2 + k^2q^2)\cos v + 2a'^2(a_2\cos\varepsilon - kq\sin\varepsilon) = 0,$$

wenn die Größe $\mu^2 + \nu^2$ durch k^2 bezeichnet wird.

Hiernach ist a_2 sicher eine algebraische Funktion von q und $\sin v$.

Falls ν nicht den Wert 0 annimmt, folgt aus den Gleichungen (15) und (16), daß a_1 und b_1 algebraische Funktionen von a_2, q, $\sin v$, also auch von q und $\sin v$ allein sind.

Setzt man die für a_1, b_1, a_2 erhaltenen Ausdrücke in die Gleichung (17) ein und entwickelt man die linke Seite der auf Null gebrachten Gleichung nach fallenden Potenzen von q, so erkennt man, daß der Koeffizient des ersten Gliedes nicht verschwinden kann, wenn ν von 0 verschieden ist. Deshalb muß q, also auch b_1 eine algebraische

Funktion von $sin v$ sein. Aus (14) und (39b) folgt $\mu = 0$, $b_1 =$ konst. Berechnet man das von τ unabhängige Glied in $\xi - i\eta$ (19) für den vorliegenden Fall noch einmal mit Hilfe von $\mathfrak{F}(s)$ und setzt man die beiden Größen einander gleich, so ergibt sich

$$a_1 cos\,(2\varphi + \varepsilon) + 2\,a v sin\,(2\varphi + \varepsilon) = 0.$$

Da aber a_1, a_2, q, $sin\varphi$ — vergl. (18) — algebraische Funktionen von $sin v$ sind, so gelangen wir zu einem Widerspruch.

§ 5.

Fall $\mathfrak{BB}'$.

Die Asymptotenlinien jeder der beiden Scharen sind unter einander parallel.

Nach Wahl eines geeigneten Koordinatensystems und nach Ausführung der passenden Substitution $t \parallel rt$ ist

$$tx = 1 + a_1 t + \lambda qt, \quad y = b_1 + \mu qt, \quad z = c_1 + \nu qt,$$

worin jetzt λ eine neue Konstante bedeutet.

Da s längs der Kurve $t = 0$ denselben Wert behalten muß, so dürfen wir bei einer noch möglichen Drehung der Fläche um die X-Achse $c_1 =$ konst. setzen.

Wir sehen von dem Falle ab, wo die Fläche eine Ebene wird, können mithin b_1 mit der Veränderlichen v zusammenfallen lassen.

Die Forderung, daß s auch längs der Kurve $t = \infty$ konstant sei, führt auf die Beziehung $a_1 = \lambda_1 v + \lambda_0$.

Wenn man schließlich $\mathfrak{F}(s)$ an der Stelle $s = 0$ $(t = 0)$ in eine Reihe entwickelt und den ersten Koeffizienten gleich einer Konstanten setzt, so erhält man $q = \varepsilon_1 v + \varepsilon_0$.

Die Größen λ_0, λ_1, ε_0, ε_1 haben unveränderliche Werte.

Alle in Betracht kommenden Flächen enthalten eine Schar von Geraden.

§ 6.

Fall $\mathfrak{BC}'$.

Die Asymptotenlinien der einen Schar sind parallel, die der andern liegen in einer Ebene.

Man kann in den Gleichungen (1) eine geeignete Substitution $t \parallel rt$ vornehmen und dann

$$a_0 = \lambda_0, \quad b_0 = \mu_0, \quad c_0 = 0, \quad b_1 = \mu c_1, \quad b_2 = \mu c_2$$

setzen, wenn λ_0, μ_0, μ konstante Größen bezeichnen.

Infolge der Bedingung, daß s für $t = 0$ einen von v unabhängigen Wert besitzen muß, ergibt sich eine lineare Gleichung zwischen a_1 und c_1.

Die Mittelpunkte aller Hyperbeln gehören mithin derselben Geraden an. Es müssen also auch die parallelen Asymptotenlinien in einer Ebene liegen.

Wenn im besonderen alle Hyperbelmitten zusammenfallen, so erhält man, da jene Bedingung für s weitergilt, noch eine lineare Gleichung zwischen a_2 und c_2.

Die Fläche ist dann geradlinig.

Man kann jetzt, von diesem Falle abgesehen, das Koordinatensystem so wählen, daß

$$tx = \lambda_0 + vt + a_2 t^2, \quad ty = 1 + \mu c_2 t^2, \quad z = c_2 t$$

wird. Die Bezeichnung für die Funktionen von v ist beibehalten worden.

Wir betrachten wieder das Verhalten der Fläche im Unendlichen an der Stelle $t = 0$ und berechnen für den vorliegenden Fall die ersten beiden Koeffizienten ω_1, ω_2 in der Reihe

$$s = \omega_1 t + \omega_2 t^2 + \cdots$$

Dieselben Schlüsse wie am Anfang des zweiten Paragraphen führen auf die Gleichung

$$x - iy = ias^{-1} + * + s\mathfrak{P}_1(s) + s_1\mathfrak{P}_2(s_1).$$

Gehen wir nun zu den unabhängigen Veränderlichen t und v zurück, so muß der Koeffizient von t^{-1} gleich $\lambda_0 - i$ und der von t^0 gleich v sein. Die Rechnung ergibt a_2 als ganze lineare Funktion zweiten, c_2 als ganze lineare Funktion ersten Grades von v.

Jede Funktion $\mathfrak{F}(s)$, die zu einer algebraischen Minimalfläche gehört, ist aber die dritte Ableitung einer algebraischen Funktion.

Da nun die Reihenentwicklung von $\mathfrak{F}(s)$ für die Umgebung der Stelle $s = 0$ mit dem Gliede $-ias^{-2}$ beginnt, gelangen wir zu einem Widerspruch.

§ 7.

Fall $\mathfrak{CC}'$.

Die Asymptoten jeder Schar liegen in einer Ebene und sind nicht parallel.

Im Gleichungssystem (1) ist jetzt

$$c_0 = 0, \quad b_1 = c_1 = 0, \quad b_2 = \mu c_2$$

zu setzen. Der Fall, wo von den Quotienten $a_0 : b_0$, $a_2 : b_2$ einer oder beide konstante Werte besitzen, hat schon seine Erledigung gefunden.

Es kann also wie im § 2

$$a_0 = a\sin v, \quad b_0 = -a\cos v$$

gewählt und über den Wert der Konstanten a noch verfügt werden — siehe unten $\mathfrak{F}(s)$.

Entwickelt man nun die Größe s in die Reihe

$$s = \omega_2 t^2 + \omega_3 t^3 + \omega_4 t^4 + \cdots,$$

die für die Umgebung der Stelle $t = 0$ gilt, kehrt man dann die Reihe um und bildet die Ableitung von t nach s, so erhält man unter Benutzung der Formeln (3) für $\mathfrak{F}(s)$ eine Reihe von folgender Gestalt:

$$\mathfrak{F}(s) = \tfrac{1}{2} i a e^{i\alpha} s^{-1/2} + b e^{i\beta} s^{-1} + 3 c e^{i\gamma} s^{-1/2} + \ldots$$

Alle Koeffizienten in dieser Reihe müssen konstant, der zweite muß gleich 0 sein, da die Koordinaten algebraische Funktionen von t sind. Setzen wir den ersten berechneten Koeffizienten gleich dem oben angegebenen, den zweiten gleich 0, so gelangen wir zu den Beziehungen

(40) $$c_2 = 2 a \sin(v + 2\alpha), \quad a_1 = \text{konst.} = \alpha_1.$$

Durch Ausführung der in (2b) angedeuteten Integration wird die Funktion von s gewonnen, deren reeller Teil z ist. Beim Übergang von s zu den Veränderlichen t und v finden wir jetzt

$$z = 2 a \sin(v + 2\alpha)\, t + * + f(v)\, t^3 + \ldots$$

und hieraus, da $f = 0$ sein muß,

(41) $$a_2 \cos 2(v + \alpha) + \mu c_2 \sin 2(v + \alpha) + 2 c \cos 3(v + \lambda) = 0.$$

λ ist eine Konstante.

Alle in den Ausdrücken für die Koordinaten vorkommenden Funktionen von v sind algebraisch in Bezug auf $\sin v$. Die Fläche ist deshalb algebraisch.

Führt man durch die Gleichungen

$$\xi = x - \alpha_1, \quad k\eta = \mu y + z, \quad k\zeta = \mu z - y, \quad k^2 = \mu^2 + 1$$

die Koordinaten ξ, η, ζ ein, setzt man ferner

$$a_2 = a' \rho \sin\varphi, \quad k c_2 = -a' \rho \cos\varphi, \quad t = \rho^{-1} \tau^{-1},$$

so ergibt sich

$$\tau\xi = a' \sin\varphi + a \rho \sin v\, \tau^2, \quad \tau\eta = -a' \cos\varphi - \mu k^{-1} a \rho \cos v\, \tau^2,$$
$$z = k^{-1} a \rho \cos v\, \tau.$$

Derselbe Gedankengang wie oben für die Stelle $t = 0$ kann jetzt für die Stelle $\tau = 0$, $t = \infty$ wiederholt werden.

Entsprechend der Relation (40) gilt

$$a \rho \cos v = 2 k a' \sin(\varphi + 2\alpha'),$$

falls a' passend gewählt ist, oder bei Elimination von ρ und φ:

(42) $$(a_2^2 + k^2 c_2^2)\, a \cos v = 2 a'^2 k\, (a_2 \cos 2\alpha' - k c_2 \sin 2\alpha').$$

Sollen aber die Gleichungen (40), (41), (42) nebeneinander bestehen, so müssen die Konstanten a, a', α, α', λ, μ durch gewisse Beziehungen verknüpft sein. Sie besagen, wie eine nähere Betrachtung zeigt, daß unter jenen algebraischen Flächen die Ebene allein den gestellten Bedingungen genügt. —

Wir können somit das Ergebnis der Untersuchung in dem Satz aussprechen:

Außer der Ebene gibt es keine Minimalfläche, die Träger einer Schar reeller, nicht zerfallender Hyperbeln ist.

Funktion lgt $\mu = 0$, $b_1 =$ konst.
Berechnet n $\xi - i\eta$ (19) für den
vorliegend (*s*) und setzt man die
beiden Gr

$= 0$.

Da al gebraische Funktionen
von *sinv* s rspruch.

Die As en sind unter einander
parallel.

Nach stems und nach Aus-
führung de

tx $= c_1 + \nu qt$,

worin jetzt

Da s ert behalten muß, so
dürfen wir läche um die X-Achse
$c_1 =$ konst

Wir se he eine Ebene wird,
können mit nmenfallen lassen.

Die Fo ve $t = \infty$ konstant
sei, führt a

Wenn $= 0$ $(t = 0)$ in eine
Reihe entwi ich einer Konstanten
setzt, so erh

Die Gr he Werte.

Alle in lten eine Schar von
Geraden.

Die Asy allel, die der andern
liegen in ein

Man ka eignete Substitution
$t \parallel rt$ vorneh

$a_0 =$ $b_2 = \mu c_2$
setzen, wenn n.

Infolge von v unabhängigen
Wert besitzen zwischen a_1 und c_1.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
R G B W G K C Y M