Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Realgymnasiums
zu Duisburg. Ostern 1886.

Zur Theorie
der
Funktionen des elliptischen Cylinders.

Von

Dr. **E. Haentzschel.**

REALGYMNASIUM DÜSSELDORF BIBLIOTHEK

Dresden,
Druck von B. G. Teubner.
1886.

qdu
52 (1886)

1886. Progr. Nr. 437.

326, 4°

HT005365252

Zur Theorie der Funktionen des elliptischen Cylinders.

Die Lösung der Aufgabe, die Verteilung der Elektricität zu bestimmen für einen Körper begrenzt von einem geraden elliptischen Cylinder, ist abhängig von der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren partikuläre Integrale Heine als Funktionen des elliptischen Cylinders bezeichnet hat.[1]) Heine selbst hat der Gleichung eine eingehendere Untersuchung zu Teil werden lassen, nachdem vorher schon ein gleiches von Herrn Mathieu[2]) und für einen Grenzfall von Herrn Heinrich Weber[3]) geschehen war.

Neuerdings unternahm nun Herr Lindemann[4]) mit Anwendung Hermitescher Methoden die Integration. Zugleich deckte er die Beziehungen seiner Arbeit zu der Heineschen auf. Endlich hat Herr Karl Baer[5]) die Funktionen des parabolischen Cylinders, eines Grenzfalles der Funktionen des elliptischen Cylinders, ausführlicher behandelt.

Die nachstehende Arbeit stellt sich die Aufgabe, die von Lindemann und Heine erhaltenen Resultate einheitlich darzustellen und in einigen Punkten zu ergänzen. Dabei wird der Untersuchung eine Form der Differentialgleichung der Funktionen des elliptischen Cylinders zu Grunde gelegt, welche den Vorzug hat, dass sie den speziellen Fall der Besselschen Funktionen und den genannten Grenzfall in sich schliesst. Zur Ableitung der Differentialgleichung war aber eine neue Grundlegung nötig, weil keine der vorhandenen den zu stellenden Anforderungen genügte.

I. Teil. Ableitung der Differentialgleichung.

§ 1. Nach Darboux[6]) läßt sich die Differentialgleichung des Potentials:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

1) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen. Berlin 1878/81. Band I, S. 401—415. Band II, S. 202—210.

2) Mathieu, Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. Journal de Liouville, II. Serie, Tome XIII, p. 137—203. 1868.

3) H. Weber, Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$. Mathematische Annalen, Band I, 1868.

4) Lindemann, Ueber die Differentialgleichung der Funktionen des elliptischen Cylinders. Mathematische Annalen, Band 22, S. 117—123. 1883.

5) Karl Baer, Die Funktion des parabolischen Cylinders. Programm des Gymnasium zu Cüstrin. 1883.

6) Darboux, Sur une classe de systèmes orthogonaux comprenant comme cas particulier les systèmes isothermes. Comptes Rendus, Tome 84, p. 298—301. 1877.

bei Körpern, begrenzt von Cylinderflächen zweiten Grades und den aus diesen durch die Transformation mittelst reciproker Radien entstehenden, auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduzieren.

Ist die x-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems zugleich die Cylinderachse, sind ferner in der yz-Ebene zwei orthogonale Kurvenscharen durch ihre Parameter t und u gegeben und gehört die Leitkurve des geraden Cylinders einer dieser Scharen an, so ist:

1) $$y + iz = F(t + iu).$$

Daher ist das Linienelement:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + F'(t + iu)\, F'(t - iu)\,(dt^2 + du^2),$$

und die Laméschen Differentialparameter sind:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = h_3 = \frac{1}{\sqrt{F'(t + iu)\, F'(t - iu)}}.$$

Wegen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = h_1 h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial V}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial V}{\partial t}}{\partial t} + \frac{\partial \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u} \right\}$$

ist:

$$\Delta V = \frac{1}{F'(t + iu)\, F'(t - iu)} \left\{ F'(t + iu)\, F'(t - iu) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} \right\},$$

d. h.:

$$F'(t + iu)\, F'(t - iu) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = 0.$$

Setzt man:

2) $$V = \sum_h W_h \left[a_h \cos\left(\frac{h}{2} x\right) + b_h \sin\left(\frac{h}{2} x\right) \right],$$

wo h eine beliebige Konstante ist, so genügt W_h der Differentialgleichung:

3) $$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \frac{h^2}{4} F'(t + iu)\, F'(t - iu)\, W.$$

Knüpft man an diese die Bedingung:

4) $$W = TU,$$

so ist:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{du^2} = \frac{h^2}{4} F'(t + iu)\, F'(t - iu)$$

und es muß demnach:

5) $$F'(t + iu)\, F'(t - iu) = g(t) + g_1(u)$$

sein.

Daraus leitet man die Differentialgleichung ab:

6) $$\frac{F'''(t + iu)}{F'(t + iu)} = const = m^2,$$

deren Integral lautet[1]):

7) $$F(t + iu) = \gamma + \frac{\alpha}{m^2} e^{m(t + iu)} + \frac{\beta}{m^2} e^{-m(t + iu)}.$$

---

1) Man vergl. Besser, Über die Verteilung der induzierten Elektricität auf einem unbegrenzten elliptischen Cylinder. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 30. Jahrgang, 1885, und meine „Bemerkungen" zu dieser Arbeit im 31. Jahrgang.

§ 2. Zur Ableitung der Leitkurven ist zu setzen:

8) $$y + iz = \gamma + \frac{\alpha}{m^2} e^{m(t+iu)} + \frac{\beta}{m^2} e^{-m(t+iu)}.$$

Es ergeben sich die orthogonalen Scharen:

9) $$\text{a.} \quad \frac{(y-\gamma)^2}{\left(\frac{\alpha}{m^2} e^{mt} + \frac{\beta}{m^2} e^{-mt}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{\alpha}{m^2} e^{mt} - \frac{\beta}{m^2} e^{-mt}\right)^2} = 1,$$

$$\text{b.} \quad \frac{(y-\gamma)^2}{\cos^2 mu} - \frac{z^2}{\sin^2 mu} = \frac{4\alpha\beta}{m^4},$$

welche Ellipsen bez. Hyperbeln darstellen. Ihnen entsprechen gerade elliptische bez. hyperbolische Cylinder.

In dem besonderen Falle

$$\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \beta = 0$$

heißt die Abbildungsfunktion:

7a) $$\begin{cases} F(t+iu) = \gamma + \frac{\beta}{m^2} e^{-m(t+iu)}, \\ \text{bez. } F(t+iu) = \gamma + \frac{\alpha}{m^2} e^{m(t+iu)}, \end{cases}$$

und die Schar 9a) geht in konzentrische Kreise, die Schar 9b) in ein durch den Anfangspunkt gehendes Paar von geraden Linien über. Diesen Leitkurven sind gerade Kreiscylinder bez. ein Ebenenpaar mit der x-Achse als Durchschnittskante zuzuordnen.

Ein Grenzfall tritt für $m = 0$ ein. Geht man zur Erledigung desselben auf Gleichung 6) zurück und führt in das Integral derselben statt der Exponentialfunktion die entsprechende Reihe ein, bestimmt außerdem die willkürlichen Konstanten so, dass $\alpha = \beta$ und $\left[\gamma + \frac{2\alpha}{m^2}\right]_{m=0}$ einen endlichen Wert δ hat, so nimmt 7) die Form an:

7b) $$F(t+iu) = \delta + \alpha(t+iu)^2.$$

Die zugehörigen Kurven sind Parabelscharen, nämlich:

9b) $$\begin{cases} \text{a.} \quad z^2 = -4\alpha t^2 (y-\delta) + 4\alpha^2 t^4, \\ \text{b.} \quad z^2 = 4\alpha u^2 (y-\delta) + 4\alpha^2 u^4. \end{cases}$$

§ 3. Was die Bedingungsgleichung 5) betrifft, so ist:

$$F'(t+iu)\,F'(t-iu) = \left(\frac{\alpha e^{mt} - \beta e^{-mt}}{m}\right)^2 + \alpha\beta\left(\frac{e^{miu} - e^{-miu}}{mi}\right)^2.$$

Folglich:

10) $$\begin{cases} g(t) = \left(\frac{\alpha e^{mt} - \beta e^{-mt}}{m}\right)^2 \\ g_1(u) = \alpha\beta\left(\frac{e^{miu} - e^{-miu}}{mi}\right)^2. \end{cases}$$

Für den Kreiscylinder ist:

10a) $$g(t) = \frac{\alpha^2 e^{2mt}}{m^2} \quad \text{bez.} = \frac{\beta^2 e^{-2mt}}{m^2},$$
$$g_1(u) = 0.$$

Für den parabolischen Cylinder erhält man:

$$10b)\qquad \begin{cases} g(t) = 4\alpha^2 t^2, \\ g_1(u) = 4\alpha^2 u^2. \end{cases}$$

Demnach lauten für den geraden elliptischen bez. hyperbolischen Cylinder die zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$11)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 T}{dt^2} = \left[h^2\left(\dfrac{\alpha e^{mt} - \beta e^{-mt}}{2m}\right)^2 + \nu^2\right] T, \\ \dfrac{d^2 U}{du^2} = \left[h^2 \alpha\beta\left(\dfrac{e^{miu} - e^{-miu}}{2mi}\right)^2 - \nu^2\right] U. \end{cases}$$

Macht man in der ersten

$$12)\qquad w = it$$

zur Unabhängigen, so ist:

$$13)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 T}{dw^2} = \left[h^2\left(\dfrac{\beta e^{miw} - \alpha e^{-miw}}{2mi}\right)^2 - \nu^2\right] T, \\ \dfrac{d^2 U}{du^2} = \left[h^2 \alpha\beta\left(\dfrac{e^{miu} - e^{-miu}}{2mi}\right)^2 - \nu^2\right] U, \end{cases}$$

und beide Gleichungen haben jetzt dieselbe Form. Sie gehen für den Kreiscylinder über in:

$$13a)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 T}{dw^2} = \left[h^2\left(\dfrac{\beta e^{miw}}{2mi}\right)^2 - \nu^2\right] T, \\ \dfrac{d^2 U}{du^2} = -\nu^2 U, \end{cases}$$

endlich für den Fall des parabolischen Cylinders in:

$$13b)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 T}{dw^2} = [h^2 \alpha^2 w^2 - \nu^2] T, \\ \dfrac{d^2 U}{du^2} = [h^2 \alpha^2 u^2 - \nu^2] U. \end{cases}$$

13b) definiert die Funktionen des parabolischen Cylinders; 13) die Funktionen des elliptischen Cylinders, während 13a) einer eingehenden Erörterung bedarf.

§ 4. In die erste Gleichung des Systems 13a) führe man

$$14)\qquad \varrho = \frac{\beta e^{miw}}{2mi}$$

ein und mache ϱ zur Unabhängigen, so geht hervor:

$$15)\qquad \frac{d^2 T}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dT}{d\varrho} + \left\{\frac{h^2}{m^2} - \frac{\frac{\nu^2}{m^2}}{\varrho^2}\right\} T = 0.$$

Wir erkennen sofort, dass wir die Differentialgleichung der Besselschen Funktionen vor uns haben mit dem Integral:

$$16)\qquad T = G I_{\frac{\nu}{m}}\left(\frac{h}{m}\varrho\right) + G' K_{\frac{\nu}{m}}\left(\frac{h}{m}\varrho\right).$$

Das Argument ϱ ist rein imaginär; der Index $\frac{\nu}{m}$ darf zu ν vereinfacht werden, da es gestattet ist, m der Einheit gleichzusetzen. Vor allem ist aber hervorzuheben, dass die Funktion T

eine z-Funktion ist in dem Sinne, wie ich dies in meiner Abhandlung „Über den funktionentheoretischen Zusammenhang zwischen den Laméschen, Laplaceschen und Besselschen Funktionen" (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 31. Jahrgang, 1886) definiert habe.

Über die Parameter h und ν ist bisher in keiner Weise verfügt worden. Es läßt sich nun zeigen, dass für den Kreiscylinder ν ganzzahlig sein muss.

Aus 2) und 13a) ergiebt sich der folgende Ausdruck für das Potential eines Körpers von der Form des Kreiscylinders:

$$17)\quad V = \sum_h \sum_\nu \left[a_h \cos\left(\frac{h}{2}x\right) + b_h \sin\left(\frac{h}{2}x\right)\right] [\gamma_\nu \cos(\nu u) + \delta_\nu \sin(\nu u)]\, [G I_\nu(h\varrho) + G' K_\nu(h\varrho)].$$

Der Kreiscylinder

$$y^2 + z^2 = \beta^2 e^{-2t}$$

kann nun andererseits erzeugt werden durch Rotation einer Geraden, die parallel der x-Achse läuft, um die x-Achse als Drehungsachse. Mit Rücksicht auf S. 7 meiner Dissertation[1]) setze man daher:

$$\begin{aligned} F'(\varrho_1 + i\varrho') &= \sqrt{A'} = 2, \\ F(\varrho_1 + i\varrho') &= 2(\varrho_1 + i\varrho'), \\ x + ir &= 2(\varrho_1 + i\varrho'), \\ r &= 2\varrho' = \sqrt{y^2 + z^2}, \\ y^2 + z^2 &= 4\varrho'^2, \end{aligned}$$

d. h. der entstehende Kreiscylinder hat auch die x-Achse zur Cylinderachse. Es ist $2\varrho' = \beta e^{iw} = 2i\varrho$, wie der Vergleich mit der früheren Bezeichnung ergiebt; der Winkel ϑ der Dissertation, S. 4, ist identisch mit dem Winkel u des Ausdrucks 17).

Weiter ergiebt sich:

$$\frac{F'(\varrho_1 + i\varrho')\, F'(\varrho_1 - i\varrho')}{[F(\varrho_1 + i\varrho') - F(\varrho_1 - i\varrho')]^2} = \frac{1}{(2i\varrho')^2};$$

daher lautet Gleichung 14) auf S. 5 der Dissertation:

$$\frac{-(\nu^2 - \frac{1}{4})}{(2i\varrho')^2} = (\nu^2 - \tfrac{1}{4})\,\{\mu(2\varrho_1) + \mu_1(2\varrho')\}.$$

Folglich:

$$\begin{aligned} \mu(2\varrho_1) &= 0, \\ \mu_1(2\varrho') &= -\frac{1}{(2i\varrho')^2}, \end{aligned}$$

und die dort bezeichneten Funktionen P und Q genügen den Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 P}{d(2\varrho_1)^2} = -\frac{h^2}{4} P,$$

$$\frac{d^2 Q}{d(2i\varrho')^2} = \left[\frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})}{(2i\varrho')^2} - \frac{h^2}{4}\right] Q.$$

Demnach

$$Q = \sqrt{2\varrho'}\,[G I_\nu(h\varrho) + G' K_\nu(h\varrho)]$$

und

$$V = \sum_h \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[a_h \cos\left(\frac{h}{2}x\right) + b_h \sin\left(\frac{h}{2}x\right)\right] [\gamma_\nu \cos(\nu u) + \delta_\nu \sin(\nu u)]\, [G I_\nu(h\varrho) + G' K_\nu(h\varrho)],$$

1) Haentzschel, Über die Reduktion der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Beitrag zur Theorie der Laméschen Funktionen 2. Ordnung. Berlin 1883, Mayer & Müller.

so dass man zu demselben Ausdruck für das Potential gelangt ist, in welchem ν aber nur ganzzahlige Werte annehmen darf, während h willkürlich bleibt.

Dieses Resultat wird sich später noch einmal ergeben, indem gezeigt wird, dass die Bedingung $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ die andere, dass ν ganzzahlig ist, nach sich zieht.

II. Teil. Die Funktionen des elliptischen Cylinders sind Cylinderfunktionen dritter Ordnung.

§ 1. Die erste Gleichung des Systems 13) lautete:

$$\frac{d^2 T}{dw^2} = \left[h^2\left(\frac{\beta e^{miw} - \alpha e^{-miw}}{2mi}\right)^2 - \nu^2\right] T.$$

Mit Rücksicht auf die oben gemachte Bemerkung ersetzen wir T durch z und führen

1) $$\varrho = \frac{\beta e^{miw} + \alpha e^{-miw}}{2m}$$

als Unabhängige ein, so entsteht:

2) $$\left(\frac{\alpha\beta}{m^2} - \varrho^2\right)\frac{d^2 z}{d\varrho^2} - \varrho\frac{dz}{d\varrho} - \left[\frac{h^2}{m^2}\left(\frac{\alpha\beta}{m^2} - \varrho^2\right) - \frac{\nu^2}{m^2}\right] z = 0.$$

Durch die Substitution:

3) $$z = \frac{y}{\sqrt[4]{\frac{\alpha\beta}{m^2} - \varrho^2}}$$

erhält man die reduzierte Form:

4) $$\frac{d^2 y}{d\varrho^2} + \left[\frac{3\alpha\beta}{4m^2\left(\frac{\alpha\beta}{m^2} - \varrho^2\right)^2} + \frac{\frac{\nu^2}{m^2} - \frac{1}{4}}{\left(\frac{\alpha\beta}{m^2} - \varrho^2\right)} - \frac{h^2}{m^2}\right] y = 0.$$

Endlich mache man

5) $$s = \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{m^2} - \varrho^2}$$

zur unabhängigen Variabelen und erhält dadurch:

6) $$4s^3(\alpha\beta s - m^2)\frac{d^2 y}{ds^2} + 2s^2(4\alpha\beta s - 3m^2)\frac{dy}{ds} + \left[\frac{3}{4}\alpha\beta s^2 + \left(\nu^2 - \frac{m^2}{4}\right)s - h^2\right] y = 0.$$

In ähnlicher Weise behandle man die zweite Gleichung des Systems 13), indem man z statt U und

7) $$\varrho_1 = \sqrt{\alpha\beta}\left(\frac{e^{miu} + e^{-miu}}{2m}\right) = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{m}\cos(mu)$$

setzt. Macht man ϱ_1 zur Unabhängigen, so heißt die genannte Differentialgleichung:

8) $$\left(\frac{\alpha\beta}{m^2} - \varrho_1^2\right)\frac{d^2 z}{d\varrho_1^2} - \varrho_1\frac{dz}{d\varrho_1} - \left[\frac{h^2}{m^2}\left(\frac{\alpha\beta}{m^2} - \varrho_1^2\right) - \frac{\nu^2}{m^2}\right] z = 0,$$

die man wieder in die Gleichung 6) überführen kann.

Ich bezeichne deshalb die Gleichung 6) als die algebraische Normalform der Differentialgleichung für die Funktionen des elliptischen Cylinders.

§ 2. Wir erkennen in dieser Gleichung einen besonderen Fall der Wangerin-Darbouxschen Differentialgleichung[1]), welche lautet:

$$9)\qquad f(\tau)\frac{d^2z}{d\tau^2}+\frac{1}{2}f'(\tau)\frac{dz}{d\tau}+\frac{1}{16}(5\tau^3-3\mathfrak{a}\tau^2+C\tau+C')z=0,$$

wenn

$$10)\qquad f(\tau)=(\tau-a_1)(\tau-a_2)(\tau-a_3)(\tau-a_4)(\tau-a_5),\quad \mathfrak{a}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

gesetzt ist.

Führt man in dieselbe

$$11)\qquad \begin{cases}\tau-a_5=\dfrac{1}{s}\\ a_i-a_5=\dfrac{1}{\alpha_i}\end{cases}\quad (i=1,2,3,4)$$

ein und macht s zur Unabhängigen, so erhält man:

$$12)\qquad \frac{\varphi(s)}{s}\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{1}{2s}\left(\varphi'(s)-\frac{\varphi(s)}{s}\right)\frac{dz}{ds}+\frac{1}{16}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4(5\tau^3-3\mathfrak{a}\tau^2+C\tau+C')z=0,$$

wo

$$13)\qquad \varphi(s)=(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)(s-\alpha_3)(s-\alpha_4).$$

Die Substitution

$$14)\qquad z=ys^{\frac{1}{4}}$$

ergiebt:

$$15)\qquad \varphi(s)\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{1}{2}\varphi'(s)\frac{dy}{ds}$$
$$+\left[-\frac{5}{16}\frac{\varphi(s)}{s^2}+\frac{1}{8}\frac{\varphi'(s)}{s}+\frac{1}{16}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\left\{5s\left(\frac{1}{s}+a_5\right)^3-3\mathfrak{a}s\left(\frac{1}{s}+a_5\right)^2+Cs\left(\frac{1}{s}+a_5\right)+C's\right\}\right]y=0.$$

Bei der Berechnung der eckigen Klammer zeigt sich, daß die negativen Potenzen von s fortfallen und daß die Gleichung die Form[2]) annimmt:

$$16)\qquad \varphi(s)\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{1}{2}\varphi'(s)\frac{dy}{ds}+\left(\frac{3}{16}s^2+\mathfrak{C}s+\mathfrak{C}'\right)y=0,$$

auf welche man Gleichung 6) durch Division mit $4\alpha\beta$ sofort bringen kann.

§ 3. Dieser Exkurs klärt das Verhältnis der Funktionen des elliptischen Cylinders zu den Wangerinschen Cyklidenfunktionen auf. Letztere sind in Heines Bezeichnung Lamésche Funktionen dritter Ordnung, jene aus diesen abgeleitete Cylinderfunktionen dritter Ordnung. Gerade so nämlich, wie ich schon früher gezeigt habe, dass die Cylinderfunktionen zweiter Ordnung, d. h. die Besselschen Funktionen, sich streng funktionentheoretisch aus den Laméschen oder Laplaceschen Funktionen derselben Ordnung herleiten lassen, so kann auch hier der Übergang von den Laméschen

1) Wangerin, Über ein dreifach orthogonales Flächensystem, gebildet aus gewissen Flächen vierter Ordnung. Borchardts Journal, Band 82, 1877. — Darboux, Sur l'application des méthodes de la physique mathématique à l'étude des corps terminés par des cyclides. Comptes Rendus, Tome 83, p. 1037—1040. 1876.

2) Man vergl. Mehler, Über die Benutzung einer vierfachen Mannigfaltigkeit zur Ableitung orthogonaler Flächensysteme. Borchardts Journal, Band 84, 1878.

Funktionen dritter Ordnung durch die Laplaceschen Funktionen derselben Ordnung zu den zugehörigen Cylinderfunktionen dargethan werden.

Substituiert man:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)(s-\alpha_3)(s\,\alpha_4)}} = \varepsilon$$

in Gleichung 16), so werden die Koeffizienten derselben doppelt periodisch. Denkt man sich nun das elliptische Integral in die Weierstraßsche Normalform übergeführt:

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \varepsilon,$$

so haben wir es solange mit Laméschen Funktionen zu thun, als nicht die absolute Invariante $g_2^3 - 27 g_3^2$ gleich Null ist; weil, wenn dies eintritt, die genannten Funktionen zu Laplaceschen Funktionen, oder nach Heine zu Kugelfunktionen, dritter Ordnung herabsinken. Verschwindet aber $g_2^3 - 27 g_3^2$ identisch, oder sind $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, so handelt es sich um Cylinderfunktionen dritter Ordnung. Dieser Fall tritt hier für Gleichung 6) ein. Denn das Integral

$$\int \frac{ds}{\sqrt{4s^3(\alpha\beta s - m^2)}}$$

verwandelt sich für

17) $$s = \frac{m^2 x}{\alpha\beta x - m^4}$$

in

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3}}.$$

§ 4. Kehren wir noch einmal zur Gleichung 6) zurück, so erkennen wir, daß dieselbe für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ in die Differentialgleichung der Besselschen Funktionen übergeht.[1]) Da alsdann $s = \frac{1}{(\varrho i)^2}$ ist, so haben dieselben in der gewöhnlichen Bezeichnung das rein imaginäre Argument ϱi, wie dies im ersten Teil schon ausgesprochen ist.

Zu gleicher Zeit ist die von Heine angeregte Frage nach dem Verhältnis der Funktionen des elliptischen Cylinders zu den Laméschen Funktionen endgiltig erledigt. Gleichung 6) weist nach, daß Heine im Irrtum war, als er behauptete, die Funktionen des elliptischen Cylinders gingen in derselben Weise aus den Laméschen Funktionen (natürlich der zweiten Ordnung) hervor, wie die Besselschen aus den Kugelfunktionen (Handbuch I, S. 5), und daß die entsprechende Ableitung auf S. 403 falsch ist; sie weist nach, daß auch die andere Angabe, Band I, S. 401, unrichtig ist, wonach die Funktionen des elliptischen Cylinders mit den Funktionen des Kreiscylinders ebenso zusammenhängen, wie die Laméschen Funktionen zweiter Ordnung mit den Kugelfunktionen. Auf beides habe ich bereits in der citierten Abhandlung aufmerksam gemacht.

Wenn aber Heine drittens sagt: „Ist $p = 2$, so entstehen dadurch die Funktionen des elliptischen Cylinders, während die speziellen Funktionen derselben zweiten Ordnung sich in die Funktionen des Kreiscylinders verwandeln“ (Band I, S. 448), so ist durch die Gleichung 6) erwiesen, daß auch dies falsch ist; die Funktionen des elliptischen Cylinders sind Cylinderfunktionen dritter Ordnung.

---

1) Haentzschel, Über den funktionentheoretischen Zusammenhang zwischen den Laméschen, Laplaceschen und Besselschen Funktionen. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1886, S. 31.

Die im § 3 gegebene Definition für die Laplaceschen und Cylinderfunktionen deckt sich nicht mit der von Heine aufgestellten. Nach Heines Definition kann eine Cylinderfunktion höherer Ordnung niemals eine Laplacesche Funktion der nächst niederen Ordnung als besonderen Fall in sich schließen, während in der mathematischen Physik solche Funktionen thatsächlich auftreten. Ist daher auch der von Heine eingenommene Standpunkt zu verlassen, weil der Blick von ihm über das vorliegende Funktionengebiet ein zu enger ist, so wollen wir doch seine großen Verdienste um die Grundlegung nicht vergessen; seine gediegenen Arbeiten sind das Fundament, auf dem weiter zu bauen unsere Aufgabe ist.

Es verbleibt nun noch die Besprechung eines wichtigen Punktes, nämlich des Grenzfalles $m = 0$, für welchen Gleichung 6) die Funktionen des parabolischen Cylinders definiert, obschon die Gleichungen 1) bis 5) für $m = 0$ keine Giltigkeit haben. Es bedarf also dieser Fall einer besonderen Erledigung. Dazu gehen wir zurück zu den Gleichungen I, 13b), die wir zusammenfassen zu:

$$\frac{d^2 z}{dw^2} = [h^2 (\alpha w)^2 - \nu^2]\, z.$$

Setzt man

18) $$\varrho = \alpha w,$$

so ist

19) $$\frac{d^2 z}{d\varrho^2} = \left[h^2 \frac{\varrho^2}{\alpha^2} - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right] z.$$

Man mache

20) $$x = \varrho^2$$

zur Unabhängigen, so entsteht:

21) $$4x \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dz}{dx} + \left(h^2 \frac{x}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right) z = 0.$$

Für

22) $$z = \frac{y}{\sqrt[4]{x}}$$

reduziert sich 21) auf

23) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{3}{16 x^2} + \frac{\nu^2}{4 \alpha^2 x} - \frac{h^2}{4 \alpha^2}\right) y = 0,$$

welche Gleichung für

24) $$s = \frac{1}{x}$$

übergeht in:

6b) $$4 \alpha^2 s^4 \frac{d^2 y}{ds^2} + 8 \alpha^2 s^3 \frac{dy}{ds} + (\tfrac{3}{4} \alpha^2 s^2 + \nu^2 s - h^2)\, y = 0.$$

Nachträglich erkennt man, daß die besondere Ableitung für $m = 0$ bedingt wird durch die Natur des Integrals

$$\int \frac{ds}{\sqrt{4 s^3 (\alpha \beta s - m^2)}},$$

indem bei $m = 0$ die Substitution 17) nicht bloß unnötig, sondern auch unmöglich wird.

§ 5. Schließlich sei darauf aufmerksam gemacht, daß das gerade vorliegende Problem stets gestattet dreien von den fünf Konstanten der Gleichung 6) spezielle Werte zu geben, die ich hier zusammenstelle.

Körper:	m	α	β	ϱ	s
Gerader hyperbolischer / elliptischer Cylinder .	1	α	α	$\alpha \cos w$	$\frac{1}{\alpha^2 \sin^2 w}$
Gerader Kreiscylinder	1	0	1	$\frac{e^{iw}}{2}$	$-4e^{-2iw}$
		1	0	$\frac{e^{-iw}}{2}$	$-4e^{2iw}$
Gerader parabolischer Cylinder . .	0	1	1	w	$\frac{1}{w^2}$

III. Teil. Behandlung der gewöhnlichen Differentialgleichung.

A. Verhalten der Integrale an den singulären Stellen.

§ 1. Die durch die Differentialgleichung

1) $$4s^3(\alpha\beta s - m^2)\frac{d^2y}{ds^2} + 2s^2(4\alpha\beta s - 3m^2)\frac{dy}{ds} + \left[\frac{3}{4}\alpha\beta s^2 + \left(\nu^2 - \frac{m^2}{4}\right)s - h^2\right]y = 0$$

definierte Funktion y hat die drei singulären Stellen

$$s = 0, \quad s = \frac{m^2}{\alpha\beta}, \quad s = \infty,$$

welchen mit Rücksicht auf die Substitution II, 5)

2) $$s = \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{m^2} - \varrho^2},$$

die singulären Stellen

$$\varrho = \infty, \quad \varrho = 0, \quad \varrho = \pm\sqrt{\frac{\alpha\beta}{m^2}}$$

entsprechen.

Was zunächst die Stelle $s = 0$ betrifft, so ist es mir nicht gelungen, endgiltiges über den Charakter des Integrals in der Umgebung derselben beizubringen. Herr Lindemann deduziert, dieselbe sei wesentlich singulär; da aber seine Schlußweise mir nicht bindend erscheint, so will ich im folgenden wenigstens zeigen, daß die gebräuchlichen Methoden eine Antwort auf die Frage nicht geben.

Wendet man zuerst die von Fuchs gegebenen Vorschriften zur Bildung der determinierenden Fundamentalgleichung an und schreibt Gleichung 1):

3) $$s^2\frac{d^2y}{ds^2} = sP_1(s)\frac{dy}{ds} + P_2(s)y,$$

so ist

$$P_1(s) = -\frac{1}{2}\frac{(4\alpha\beta s - 3m^2)}{(\alpha\beta s - m^2)},$$

$$P_2(s) = -\frac{1}{4}\frac{\left[\frac{3}{4}\alpha\beta s^2 + \left(\nu^2 - \frac{m^2}{4}\right)s - h^2\right]}{s(\alpha\beta s - m^2)}.$$

Die determinierende Fundamentalgleichung:

$$4)\qquad r(r-1) - P_1(o)\,r - P_2(o) = 0$$

hat ein unendlich großes konstantes Glied, so dass ein Schluß auf ihre Wurzeln unmöglich ist. Die Theorie von Fuchs versagt deshalb, weil bei ihr der Grad der Vielfachheit der singulären Stelle die Ordnung der Differentialgleichung nicht übersteigen darf, was im vorliegenden Falle eintritt.

Versucht man weiter den von Herrn H. A. Schwarz in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe gegebenen Weg zur Bildung des Quotienten zweier partikulären Integrale einzuschlagen und reduziert Gleichung 1), indem man setzt:

$$5)\qquad y = \frac{\xi}{\sqrt[4]{4s^3(\alpha\beta s - m^2)}},$$

so entsteht:

$$6)\qquad \frac{d^2\xi}{ds^2} = \left\{ -\frac{3}{16}\frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha\beta s - m^2)^2} + \frac{3}{16}\frac{\alpha\beta}{s(\alpha\beta s - m^2)} - \frac{3}{16}\frac{1}{s^2} - \frac{\left(\nu^2 - \frac{m^2}{4}\right)}{4s^2(\alpha\beta s - m^2)} + \frac{h^2}{4s^3(\alpha\beta s - m^2)} \right\}\xi.$$

Sei für den Augenblick der Fall $m = 0$ ausgeschlossen, so kann man 6) schreiben:

$$7)\qquad \frac{d^2\xi}{ds^2} = \left\{ -\frac{3}{16}\frac{\alpha^2\beta^2}{m^4\left(1 - \frac{\alpha\beta}{m^2}s\right)^2} - \frac{3}{16}\frac{\alpha\beta}{m^2}\frac{1}{s\left(1 - \frac{\alpha\beta}{m^2}s\right)} - \frac{3}{16}\frac{1}{s^2} + \frac{\left(\frac{\nu^2}{m^2} - \frac{1}{4}\right)}{4s^2\left(1 - \frac{\alpha\beta}{m^2}s\right)} - \frac{\frac{h^2}{m^2}}{4s^3\left(1 - \frac{\alpha\beta}{m^2}s\right)} \right\}\xi.$$

Da unter dieser Voraussetzung der absolute Betrag von $\frac{\alpha\beta}{m^2}s$ kleiner als eine gegebene Größe δ angenommen werden darf, so ist die Entwickelung von $\frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha\beta}{m^2}\right)^k}$ gestattet und sie liefert auf keinen Fall negative Potenzen von s, welche demnach bis auf die dritte steigen. Die Methode von Schwarz setzt aber voraus, daß die höchste negative Potenz eine gerade sei, so daß auch sie nicht anwendbar ist, außer für $m = 0$. Für die Funktionen des parabolischen Cylinders zieht sich Gleichung 6) zusammen zu:

$$8)\qquad \frac{d^2\xi}{ds^2} = \left(-\frac{3}{16}\frac{1}{s^2} - \frac{\nu^2}{4\alpha^2 s^3} + \frac{h^2}{4\alpha^2 s^4}\right)\xi.$$

Sei η der Quotient zweier partikulären Integrale, so ist:

$$9)\qquad [\eta]_s = \frac{3}{8}\frac{1}{s^2} + \frac{\nu^2}{2\alpha^2 s^3} - \frac{h^2}{2\alpha^2 s^4}.$$

Man setze an:

$$r = \frac{a_{-2}}{s^2} + \frac{a_{-1}}{s} + a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_p s^p + \ldots,$$

also:

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{2a_{-2}}{s^3} - \frac{a_{-1}}{s^2} + a_1 + 2a_2 s + \ldots + p a_p s^{p-1} + \ldots$$

Folglich:

$$10)\qquad [\eta]_s = \frac{dr}{ds} - \frac{1}{2}r^2 = -\frac{a_{-2}^2}{2s^4} - \frac{2a_{-2}}{s^3} - \frac{a_{-1}}{s^2} + a_1 \ldots$$
$$- \frac{a_{-2}a_{-1}}{s^3} - \frac{a_{-1}^2}{2s^2} - \frac{a_{-2}a_1}{s} - \frac{a_0^2}{2} \ldots$$
$$- \frac{a_{-2}a_0}{s^2} - \frac{a_{-1}a_0}{s} - a_{-2}a_2 \ldots$$
$$- a_{-1}a_1 \ldots$$
$$\ldots$$

Durch Vergleichung von 9) und 10) folgt:

$$a_{-2} = \pm \frac{h}{\alpha}$$
$$a_{-1} = \pm \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{\alpha h} - 2,$$
$$-\frac{3}{8} = a_{-1} + \frac{a_{-1}^2}{2} + a_{-2}a_0,$$
$$a_{-2}a_1 + a_{-1}a_0 = 0,$$
$$a_1 - \frac{a_0^2}{2} - a_{-2}a_2 - a_{-1}a_1 = 0.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Daher ist:

$$r = \pm \frac{h}{\alpha}\frac{1}{s^2} + \left(\mp \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{\alpha h} - 2\right)\frac{1}{s} + a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots,$$
$$\log \frac{d\eta}{ds} = \int r\,ds = \log C \mp \frac{h}{\alpha}\frac{1}{s} + \left(\mp \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{\alpha h} - 2\right)\log s + a_0 s + \frac{1}{2}a_1 s^2 + \frac{1}{3}a_2 s^3 + \ldots,$$
$$\frac{d\eta}{ds} = C s^{-2 \mp \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{\alpha h}}\, e^{\mp \frac{h}{\alpha}\frac{1}{s} + a_0 s + \frac{1}{2}a_1 s^2 + \frac{1}{3}a_2 s^3 + \ldots},$$
$$\xi_1 = \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^{-\frac{1}{2}} = C^{-\frac{1}{2}} s^{1 \pm \frac{1}{4}\frac{\nu^2}{\alpha h}}\, e^{\pm \frac{h}{2\alpha}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\left(a_0 s + \frac{1}{2}a_1 s^2 + \frac{1}{3}a_2 s^3 + \ldots\right)},$$
$$11)\qquad \xi_1 = C s^{1 \pm \frac{1}{4}\frac{\nu^2}{\alpha h}}\left[1 \pm \frac{h}{2\alpha}\frac{1}{s} + \mathfrak{P}(s) + \frac{1}{2!}\left(\frac{h^2}{4\alpha^2}\frac{1}{s^2} + \ldots\right) + \frac{1}{3!}\left(\pm \frac{h^3}{8\alpha^3}\frac{1}{s^3} + \ldots\right) + \ldots\right].$$

Es enthält demnach sowohl das erste partikuläre Integral ξ_1, als der Quotient zweier solcher Integrale negative Potenzen in unendlicher Anzahl, woraus der Schluß gezogen werden darf, daß für die Funktionen des parabolischen Cylinders die Stelle $s = 0$ bez. $\varrho = \infty$ [II, 19)] eine wesentlich singuläre ist[1]).

§ 2. Zur Untersuchung des Verhaltens der Integrale an den beiden noch übrigen singulären Stellen $s = \frac{m^2}{\alpha\beta}$ und $s = \infty$ eignet sich besser eine andere Form der Differentialgleichung 1), welche die Stelle $s = \infty$ ins Endliche verlegt. Von einer solchen ist Herr Lindemann ausgegangen.

Die Gleichung I, 13) lautete:

$$12)\qquad \frac{d^2 z}{dw^2} = \left[h^2\left(\frac{\beta e^{miw} - \alpha e^{-miw}}{2mi}\right)^2 - \nu^2\right] z.$$

Man substituiere

1) Dieses Resultat kann aus den Entwickelungen, welche Herr Karl Baer auf S. 7—8 seiner Arbeit giebt, sofort abgelesen werden.

13) $$\sigma = \frac{\beta e^{miw} - \alpha e^{-miw}}{2mi}$$

und mache:

14) $$x = \sigma^2$$

zur unabhängigen Variabelen, so geht hervor:

15) $$4x(\alpha\beta - m^2x)\frac{d^2z}{dx^2} + 2(\alpha\beta - 2m^2x)\frac{dz}{dx} - (h^2x - \nu^2)z = 0.$$

Die Stelle $x = 0$ dieser Gleichung ist gleichbedeutend mit der Stelle $\varrho = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{m^2}}$ bez. $s = \infty$, denn

16) $$\varrho^2 + \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{m^2}.$$

Endlich ist die Stelle $s = \frac{m^2}{\alpha\beta}$ bez. $\varrho = 0$ offenbar gleichbedeutend mit der zweiten singulären Stelle von 15):

$$x = \frac{\alpha\beta}{m^2}.$$

Um aber auch diese in den Nullpunkt zu verlegen, erinnern wir an:

17) $$\varrho = \frac{\beta e^{miw} + \alpha e^{-miw}}{2m},$$

führen

18) $$x' = \varrho^2$$

als Unabhängige in 12) ein und erhalten:

19) $$4x'(\alpha\beta - m^2x')\frac{d^2z}{dx'^2} + 2(\alpha\beta - 2m^2x') - \left[h^2\left(\frac{\alpha\beta}{m^2} - x'\right) - \nu^2\right]z = 0.$$

Es ist dies Lindemanns Gleichung, wenn man:

$$\alpha = \beta = 1, \quad m = 1, \quad h^2 = \lambda^2, \quad \mathfrak{B} = h^2 - \nu^2$$

setzt, welche Substitutionen jedoch die Besselschen Funktionen und die des parabolischen Cylinders von der Untersuchung ausschließen.

Die determinierende Fundamentalgleichung für 15) lautet:

$$r(r-1) + \tfrac{1}{2}r = 0.$$

Sie hat die Wurzeln 0 und $\frac{1}{2}$. Die Stelle $x = 0$ ist folglich eine außerwesentlich singuläre. Sollten aber α oder β gleich Null sein, so heißt jene Gleichung:

$$r(r-1) + r - \frac{\nu^2}{4m^2} = 0.$$

Ihre Wurzeln sind $r_1 = \frac{\nu}{2m}$, $r_2 = -\frac{\nu}{2m}$. Da für die alsdann vorliegenden Besselschen Funktionen $m = 1$ gesetzt werden darf und ν eine ganze Zahl ist, so ist auch die Differenz $r_1 - r_2$ eine ganze Zahl. Die Stelle $x = 0$ ist folglich für die Besselschen Funktionen mit ganzzahligem Index wesentlich singulär; wir erhalten ein bekanntes Resultat.

Die Stelle $x' = 0$ kommt nur für die Funktionen des elliptischen Cylinders in Betracht. Auch sie ist außerwesentlich singulär, da zu ihr die Wurzeln 0 und $\frac{1}{2}$ gehören. Für die Funktionen des parabolischen Cylinders ist die Stelle $x' = 0$ überhaupt nicht vorhanden, für die Besselschen Funktionen ist dieselbe identisch mit $x = 0$. Für sie gilt die am Schluß meiner Abhandlung:

„Über den funktionentheoretischen Zusammenhang u. s. w.“ aufgestellte Behauptung, daß Heines Darstellung der Funktionen des elliptischen Cylinders durch:

$$\mathfrak{E}(\varphi) = 2 I_0(i\lambda \cos\varphi) - N_1 I_2(i\lambda \cos\varphi) + N_2 I_4(i\lambda \cos\varphi) - \cdots$$
$$\mathfrak{F}(\varphi) = 2 K_0(i\lambda \cos\varphi) - N_1 K_2(i\lambda \cos\varphi) + N_2 K_4(i\lambda \cos\varphi) - \cdots,$$

wenigstens was das zweite Integral betrifft, irrtümlich ist. Denn in dem eben hingeschriebenen Ausdruck für $\mathfrak{F}(\varphi)$ ist die Stelle $x' = \cos^2\varphi = 0$ wesentlich singulär, weil sie es für jeden Summanden ist, während doch nachgewiesen worden, daß das Integral in ihrer Umgebung außerwesentlich singulär ist.

B. Hermites Methode der Integration.

§ 1. Hermite geht von der Differentialgleichung aus:

1) $$2Ay'' + A'y' = 2By,$$

wo A und B explizite Funktionen der Unabhängigen x bedeuten. Sind y_1 und y_2 zwei partikuläre Integrale von 1) und bildet man

2) $$v = y_1 y_2,$$

so genügt v der Differentialgleichung:

3) $$2Av''' + 3A'v'' + A''v' = 8Bv' + 4B'v.$$

Diese Gleichung hat nicht bloß $y_1 y_2$, sondern auch y_1^2 bez. y_2^2 zu partikulären Integralen.

Das allgemeine Integral von 1) lautet nach Hermite:

4) $$y = Gy_1 + G'y_2 = Ge^{\frac{1}{2}\int\left(\frac{v'}{v} + \frac{C}{\sqrt{A}}\frac{1}{v}\right)dx} + G'e^{\frac{1}{2}\int\left(\frac{v'}{v} - \frac{C}{\sqrt{A}}\frac{1}{v}\right)dx}.$$

Die Konstante C wird folgendermaßen bestimmt. Durch Integration erhält 3) die Gestalt:

5) $$A(2vv'' - v'^2) + A'vv' = 4Bv^2 - N,$$

indem N die neu eingeführte Konstante ist.

Sei nun x_i eine einfache Wurzel der Gleichung:

6) $$y_1(x) = 0,$$

so folgt:

7) $$v(x_i) = y_1(x_i)\, y_2(x_i) = 0.$$

Daher:

$$v'(x_i) = y'_1(x_i)\, y_2(x_i),$$

indem der zweite Summand $y_1(x_i)\, y'_2(x_i)$ verschwindet.

Die Gleichung 5) nimmt folglich für $x = x_i$ die Gestalt an:

8) $$N = A(x_i)\,[v'(x_i)]^2 \quad \text{oder} \quad N = A(x_i)\,[y'_1(x_i)\, y_2(x_i)]^2.$$

Ist aber x_i eine Doppelwurzel oder zugleich eine solche der Gleichung

$$A = 0,$$

so ist

9) $$N = 0.$$

Nun gilt für die partikulären Integrale von 1) die bekannte Gleichung:

10) $$y_2 y'_1 - y_1 y'_2 = \frac{C}{\sqrt{A}},$$

welche auch aus 4) direkt abgeleitet werden kann.

Aus 10) folgt für $x = x_i$:

11) $$y'_1(x_i)\, y_2(x_i) = \frac{C}{\sqrt{A(x_i)}},$$

demnach durch Vergleichung mit 8):

$$C^2 = N, \quad \text{d. h.}$$

12) $$C = \pm\, y'_1(x_i)\, y_2(x_i) \sqrt{A(x_i)}.$$

Sollte aber N verschwinden, so ist auch $C = 0$ und die beiden partikulären Integrale in 4) werden identisch. Dann lautet das eine Integral von 1):

13) $$y_1 = \sqrt{v}$$

und das zweite ist

14) $$y_2 = \sqrt{v} \int \frac{dx}{v\sqrt{A}}.$$

C. Die erste Klasse der Funktionen des elliptischen Cylinders.

§ 1. Für das Integral der Differentialgleichung:

1) $$4x(\alpha\beta - m^2 x)\frac{d^2 z}{dx^2} + 2(\alpha\beta - 2m^2 x)\frac{dz}{dx} - (h^2 x - \nu^2)\, z = 0$$

gilt in der Umgebung der Stelle $x = 0$ die Entwickelung:

2) $$z_{00} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + \cdots,$$

zu welcher die Rekursionsformel gehört:

3) $$\alpha\beta(2p+1)(2p+2)\, a_{p+1} + (\nu^2 - 4m^2 p^2)\, a_p - h^2 a_{p-1} = 0.$$

Es ist demnach:

$$2!\, \alpha\beta\, a_1 = -\nu^2 a_0,$$

$$4!\, \alpha^2\beta^2 a_2 = \{\nu^2(\nu^2 - 4m^2) + 2h^2\alpha\beta\}\, a_0,$$

$$6!\, \alpha^3\beta^3 a_3 = -\{\nu^2(\nu^2 - 4m^2)(\nu^2 - 16m^2) + 14h^2\alpha\beta\nu^2 - 32h^2\alpha\beta m^2\}\, a_0,$$

$$8!\, \alpha^4\beta^4 a_4 = \{\nu^2(\nu^2 - 4m^2)(\nu^2 - 16m^2)(\nu^2 - 36m^2) + 44h^2\alpha\beta\nu^4 - 656h^2\alpha\beta m^2\nu^2 + 1152h^2\alpha\beta m^4 + 60h^4\alpha^2\beta^2\}\, a_0$$

. . . . . .

Mit Rücksicht auf die in A, Gleichung 14) gegebene Definition von x ergiebt sich, dass für $\alpha = \beta$

4) $$x = \frac{\alpha^2}{m^2}\, sin^2(mw)$$

ist. Es schreitet also z_{00} unter dieser Voraussetzung nach geraden Potenzen von $sin(mw)$ oder aber nach geraden Vielfachen von $cos(mw)$ fort. Mit Heine möge ein solches Integral als zur ersten Klasse gehörig bezeichnet werden.

Heine knüpft als notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe 2) an diese die Bedingung, dass der unendlich entfernte Koeffizient verschwinde Dies führt auf eine transcendente Gleichung, von der wir absehen können, da z_{00} in einer gewissen Umgebung der Stelle $x = 0$ stets konvergiert. Dieselbe wird aber notwendig, wenn man die Glieder der Reihe z_{00} so umordnet, dass sie statt nach Potenzen von $sin^2(w)$ nach geraden Vielfachen von $cos\, w$ fortschreitet, wie es Heine gethan hat.

§ 2. Zur Integration setze man:

5) $$A = x(\alpha\beta - m^2 x), \quad B = \tfrac{1}{4}(h^2 x - \nu^2),$$

so heisst Gleichung 1):

6) $$2A\frac{d^2z}{dx^2}+A'\frac{dz}{dx}=2Bz.$$

Es genügt also

7) $$v_{00}=z_{00}^{\,2}$$

der Differentialgleichung:

8) $$2x(\alpha\beta-m^2x)\,v'''+3(\alpha\beta-2m^2x)\,v''-2m^2v'=2(h^2x-\nu^2)\,v'+h^2v.$$

Die zu derselben gehörige determinierende Fundamentalgleichung hat die Wurzeln 0, 1 und $\frac{1}{2}$, deren erste dem v_{00} entspricht. Durch Ansetzen von

9) $$v_{00}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_px^p+\cdots$$

findet man zur Bestimmung der Grössen c die Gleichung:

10) $$(p+1)(p+2)(2p+3)\,\alpha\beta\,c_{p+2}+(2p+2)\,[\nu^2-m^2(p+1)^2]\,c_{p+1}-(2p+1)\,h^2c_p=0,$$

und zwar ist:

$$c_0=a_0^{\,2},$$

$$\alpha\beta\,c_1=-\nu^2c_0,$$

$$3!\,\alpha\beta\,c_2=-2(\nu^2-m^2)\,c_1+h^2c_0,\quad \text{d. h.}$$

$$\frac{4!}{2^2}\,\alpha^2\beta^2c_2=\{2\nu^2(\nu^2-m^2)+h^2\alpha\beta\}\,c_0,$$

$$\frac{6!}{2^3}\,\alpha^3\beta^3c_3=-\{4\nu^2(\nu^2-m^2)(\nu^2-4m^2)+11h^2\alpha\beta\nu^2-8h^2\alpha\beta m^2\}\,c_0,$$

$$\frac{8!}{2^4}\,\alpha^4\beta^4c_4=\{8\nu^2(\nu^2-m^2)(\nu^2-4m^2)(\nu^2-9m^2)+72h^2\alpha\beta\nu^4-264h^2\alpha\beta m^2\nu^2+144h^2\alpha\beta m^4+25h^4\alpha^2\beta^2\}\,c_0$$

. . . . . .

Zur Behandlung von:

11) $$\int\frac{dx}{v_{00}\sqrt{x(\alpha\beta-m^2x)}}$$

nehme man an, dass x_i eine der unendlich vielen Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$z_{00}(x)=0$$

sei; alsdann verschwindet auch $v_{00}(x)$ für $x=x_i$ und zwar von der zweiten Ordnung. Demnach ist $C=0$; es versagt Hermites Integrationsmethode. Folglich ist:

12) $$z_1=z_{00},\qquad z_2=z_{00}\int\frac{dx}{v_{00}\sqrt{x(\alpha\beta-m^2x)}}.$$

Nun sei

13) $$\frac{1}{v_{00}}=\sum_i\frac{1}{\varphi(x_i)}\frac{1}{(x-x_i)^2}-\frac{\varphi'(x_i)}{\varphi(x_i)^2}\frac{1}{x-x_i},$$

indem $v_{00}=(x-x_i)^2\,\varphi(x)$ gesetzt ist.

Alsdann ergiebt sich:

$$z_2=z_{00}\sum_i\left\{\frac{1}{\varphi(x_i)}\int\frac{dx}{(x-x_i)^2\sqrt{x(\alpha\beta-m^2x)}}-\frac{\varphi'(x_i)}{\varphi(x_i)^2}\int\frac{dx}{(x-x_i)\sqrt{x(\alpha\beta-m^2x)}}\right\},\ \text{oder:}$$

14) $$z_2=z_{00}\sum_i\left\{\frac{\sqrt{x(\alpha\beta-m^2x)}}{x_i(\alpha\beta-m^2x_i)\,\varphi(x_i)}\frac{1}{x_i-x}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\varphi(x_i)\sqrt{x_i(\alpha\beta-m^2x_i)}}\left[\frac{\varphi'(x_i)}{\varphi(x_i)}+\frac{\alpha\beta-2m^2x_i}{2x_i(\alpha\beta-m^2x_i)}\right]\log\left[\frac{\alpha\beta x_i+x(\alpha\beta-2m^2x_i)-2\sqrt{x_i(\alpha\beta-m^2x_i)}\sqrt{x(\alpha\beta-m^2x)}}{x-x_i}\right]\right\}.$$

§ 3. Auf Integrale der ersten Klasse wird man ebenfalls geführt, wenn man z in eine Reihe nach Potenzen von x in der Umgebung der Stelle $x = \frac{\alpha\beta}{m^2}$ bez. $x' = 0$ entwickelt. Legt man demnach Gleichung A, 19) zu Grunde und setzt:

15) $$z_{10} = a_0' + a_1' x' + a_2' x'^2 + \ldots + a'_p x'^p + \ldots,$$

so hat man in der Rekursionsformel 3) nur

16) $$-h^2 \text{ statt } h^2, \qquad \nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} \text{ statt } \nu^2$$

einzuführen und erhält:

17) $$\alpha\beta(2p+1)(2p+2)\,a'_{p+1} + \left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - 4m^2p^2\right)a'_p + h^2 a'_{p-1} = 0.$$

Im besonderen ist:

$$2!\,\alpha\beta\,a'_1 = -\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2}\right)a'_0,$$

$$4!\,\alpha^2\beta^2 a'^2 = \left\{\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2}\right)\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - 4m^2\right) - 2h^2\alpha\beta\right\}a'_0,$$

$$6!\,\alpha^3\beta^3 a'^3$$

$$= -\left\{\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2}\right)\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - 4m^2\right)\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - 16m^2\right) - 14h^2\alpha\beta\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2}\right) + 32h^2\alpha\beta m^2\right\}a'_0,$$ [1]

. . . . . .

Für $\alpha = \beta$ hat x' den Wert:

18) $$x' = \frac{\alpha^2}{m^2}\cos^2(mw).$$

Demnach schreitet z_{10} unter dieser Voraussetzung nach geraden Potenzen von $\cos(mw)$ oder aber nach geraden Vielfachen von $\cos(mw)$ fort. Auch hier bedürfen wir der transcendenten Gleichung Heines nicht. Weiter genügt

19) $$v_{10} = z_{10}^2$$

der Differentialgleichung:

20) $$2x'(\alpha\beta - m^2x')\,v''' + 3(\alpha\beta - 2m^2x')\,v'' - 2m^2v' = 2\left[h^2\left(\frac{\alpha\beta}{m^2} - x'\right) - \nu^2\right]v' - h^2 v.$$ [2]

Daher darf man setzen:

21) $$v_{10} = \gamma_0 + \gamma_1 x' + \gamma_2 x'^2 + \ldots + \gamma_p x'^p + \ldots$$

und erhält die Rekursionsformel:

22) $$(p+1)(p+2)(2p+3)\,\alpha\beta\gamma_{p+2} + (2p+2)\left[\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - m^2(p+1)^2\right]\gamma_{p+1} + (2p+1)\,h^2\gamma_p = 0.$$

Demnach ist:

$$\gamma_0 = a'^2_0$$

$$\alpha\beta\gamma_1 = -\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2}\right)\gamma_0;$$ [3]

---

1) Mathieu, l. c. p. 174.

2) Diese Gleichung entspricht der Gleichung III, 6) bei Herrn Lindemann, der hier einen Rechenfehler macht, welcher die folgenden Rekursionsformeln sehr beeinflusst.

3) Herr Lindemann nimmt an, dass in 21) unbeschadet der Allgemeinheit $\gamma_1 = 0$ gesetzt werden darf. Geschieht dies aber, so muss bei ihm $(h^2 - \nu^2)$ oder $\mathfrak{B}$ gleich Null sein, was im allgemeinen nicht statthaft ist.

$$3!\,\alpha\beta\gamma_2 = -2\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - m^2\right)\gamma_1 - h^2\gamma_0, \text{ oder}$$

$$\frac{4!}{2^2}\,\alpha^2\beta^2\gamma_2 = \left\{2\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2}\right)\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - m^2\right) - h^2\alpha\beta\right\}\gamma_0,$$

. . . . . .

Die Integrale lauten:

23)
$$z_1 = z_{10},$$
$$z_2 = z_{10}\int\frac{dx'}{v_{10}\sqrt{x'(\alpha\beta - m^2x')}}.$$

D. Die zweite Klasse der Funktionen des elliptischen Cylinders.

§ 1. Man gehe aus von A, Gleichung 19), also von:

1) $$4x'(\alpha\beta - m^2x')\frac{d^2z}{dx'^2} + 2(\alpha\beta - 2m^2x')\frac{dz}{dx'} - \left[h^2\left(\frac{\alpha\beta}{m^2} - x'\right) - \nu^2\right]z = 0.$$

Die determinierende Fundamentalgleichung für die Stelle $x' = 0$ hat die Wurzeln 0 und $\frac{1}{2}$. Die Wurzel 0 ist im vorhergehenden Paragraphen benutzt worden; für die zweite $\frac{1}{2}$ aber gilt in der Umgebung von $x' = 0$ die Entwickelung:

2) $$z_{11} = \sqrt{x'}\,(b'_0 + b'_1x' + b'_2x'^2 + \ldots + b'_px'^p + \ldots).$$

An dieselbe knüpft sich die Rekursionsformel:

3) $$(2p+2)(2p+3)\,\alpha\beta b'_{p+1} + \left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - m^2(2p+1)^2\right)b'_p + h^2b'_{p-1} = 0,$$

welche ergiebt:

$$3!\,\alpha\beta b'_1 = -\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - m^2\right)b'_0,$$

$$5!\,\alpha^2\beta^2b'_2 = \left\{\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - m^2\right)\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - 9m^2\right) - 6h^2\alpha\beta\right\}b'_0,$$

$$7!\,\alpha^3\beta^3b'_3 = -\left\{\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - m^2\right)\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - 9m^2\right)\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - 25m^2\right) - 26h^2\alpha\beta\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2}\right)$$
$$+ 170h^2\alpha\beta m^2\right\}b'_0,$$ [1]

. . . . . .

Da x' für $\alpha = \beta$ den Wert $\frac{\alpha^2}{m^2}\cos^2(mw)$ hat, so schreitet z_{11} nach ungeraden Potenzen von $\cos(mw)$ oder auch nach ungeraden Vielfachen von $\cos(mw)$ fort. Wir haben die zweite Klasse der Funktionen des elliptischen Cylinders vor uns.

Es genügt

4) $$v_{11} = z_{11}^2$$

der Differentialgleichung C, 20).

Deshalb setze man

5) $$v_{11} = x'(\gamma'_1 + \gamma'_2x' + \gamma'_3x'^2 + \ldots + \gamma'_px'^{p-1} + \ldots).$$

Die Rekursionsformel ist identisch mit C, 22); doch ist die Anfangsgleichung:

6) $$3!\,\alpha\beta\gamma'_2 = -2\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - m^2\right)\gamma'_1.$$

---

1) Mathieu, l. c. p. 174.

Darauf folgt:

$$\frac{6!}{2^3}\alpha^2\beta^2\gamma'_3 = \left\{4\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - m^2\right)\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - 4m^2\right) - 9h^2\alpha\beta\right\}\gamma'_1,$$

. . . . . .

Da $v_{11} = 0$ mit $A = x'(\alpha\beta - m^2x') = 0$ die Wurzel $x = 0$ gemeinsam und ausserdem nur Doppelwurzeln hat, so ist $C = 0$ und daher lauten die Integrale:

7) $$z_1 = z_{11},\qquad z_2 = z_{11}\int\frac{dx'}{v_{11}\sqrt{x'(\alpha\beta - m^2x')}}.$$

Die Ausführung des zweiten bietet nach dem in C, gegebenen keine Schwierigkeiten, wofern man die unendlich vielen Wurzeln von $v_{11} = 0$ kennen würde, wozu aber noch andere ausgedehnte Untersuchungen nötig sind.

E. Die dritte Klasse der Funktionen des elliptischen Cylinders.

§ 1. Die Differentialgleichung:

1) $$4x(\alpha\beta - m^2x)\frac{d^2z}{dx^2} + 2(\alpha\beta - 2m^2x)\frac{dz}{dx} - (h^2x - \nu^2)z = 0$$

lässt in der Umgebung der Stelle $x = 0$ für z die andere Entwickelung zu:

2) $$z_{01} = \sqrt{x}(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_px^p + \ldots).$$

Die Koeffizienten sind verbunden durch die Gleichung:

3) $$(2p+2)(2p+3)\alpha\beta b_{p+1} + [\nu^2 - m^2(2p+1)^2]b_p - h^2b_{p-1} = 0.$$

Aus ihr folgt:

$$3!\,\alpha\beta b_1 = -(\nu^2 - m^2)b_0,$$

$$5!\,\alpha^2\beta^2 b_2 = \{(\nu^2 - m^2)(\nu^2 - 9m^2) + 6h^2\alpha\beta\}b_0,$$

$$7!\,\alpha^3\beta^3 b_3 = -\{(\nu^2 - m^2)(\nu^2 - 9m^2)(\nu^2 - 25m^2) + 26h^2\alpha\beta\nu^2 - 170h^2\alpha\beta m^2)\}b_0,$$

. . . . . .

Unter der Voraussetzung $\alpha = \beta$ schreitet z_{01} nach ungeraden Potenzen von $sin\,(mw)$ oder aber nach ungeraden Vielfachen von $sin\,(mw)$ fort; es ist die dritte Klasse der Funktionen des elliptischen Cylinders.

Das Quadrat von z_{01}, also

4) $$v_{01} = z_{01}^2$$

genügt der Differentialgleichung C, 8). Es ist demnach

5) $$v_{01} = x(c'_1 + c'_2x + c'_3x^2 + \ldots + c'_px^{p-1} + \ldots),$$

und die Grössen c' werden bestimmt durch die Gleichung C, 10) mit dem Zusatz, dass die Anfangsgleichung lautet:

6) $$3!\,\alpha\beta c'_2 = -2(\nu^2 - m^2)c'_1.$$

Die Integrale heissen:

7) $$\begin{cases} z_1 = z_{01}, \\ z_2 = z_{01}\displaystyle\int\frac{dx}{v_{01}\sqrt{x(\alpha\beta - m^2x)}}. \end{cases}$$

F. Die vierte Klasse der Funktionen des elliptischen Cylinders.

Herr Lindemann hat darauf aufmerksam gemacht, dass man Heines vierte Klasse erhält, wenn sich von der Klammer in:

$$z_{01} = \sqrt{x}\,(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \ldots + b_p x^p + \ldots)$$

der Faktor $\sqrt{\alpha\beta - m^2 x}$ absondern lässt. Denn für $\alpha = \beta = 1$ und $m = 1$ erhält man eine Reihe, die nach geraden Vielfachen von $\sin w$ fortschreitet. Ein gleiches gilt, wenn sich von der Klammer in:

$$z_{11} = \sqrt{x'}\,(b'_0 + b'_1 x' + b'_2 x'^2 + \ldots + b'_p x'^p + \ldots)$$

der Faktor $\sqrt{\alpha\beta - m^2 x'}$ abtrennen lässt.

G. Die fünfte Klasse der Funktionen des elliptischen Cylinders.

§ 1. Von den drei Wurzeln der zu der Differentialgleichung C, 8) gehörenden determinierenden Fundamentalgleichung ist bisher die dritte $\frac{1}{2}$ noch nicht gebraucht worden. Wir setzen

1) $$v_{02} = z_{00}\, z_{01}$$

und haben in der Umgebung von $x = 0$ die Entwickelung:

2) $$v_{02} = \sqrt{x}\,\chi(x) = \sqrt{x}\,(c''_0 + c''_1 x + c''_2 x^2 + \ldots + c''_p x^p + \ldots).$$

Die zugehörige Rekursionsformel heißt:

3) $$(p+1)(2p+1)(2p+3)\,\alpha\beta\, c''_{p+1} + 2(2p+1)\,[\nu^2 - m^2(p+\tfrac{1}{2})^2]\, c''_p - 4ph^2 c''_{p-1} = 0$$

Daraus leitet man ab:

$$3\alpha\beta c''_1 = -2\left(\nu^2 - \frac{m^2}{4}\right) c''_0,$$

$$3.5\,\alpha^2\beta^2 c''_2 = \left\{2\left(\nu^2 - \frac{m^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{9}{4}m^2\right) + 2h^2\alpha\beta\right\} c''_0,$$

$$5.7.9\,\alpha^3\beta^3 c''_3 = -\left\{4\left(\nu^2 - \frac{m^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{9}{4}m^2\right)\left(\nu^2 - \frac{25}{4}m^2\right) + 52h^2\alpha\beta\nu^2 - 37h^2\alpha\beta m^2\right\} c''_0,$$

. . . . . .

Folglich:

4) $$\begin{cases} z_1 = \sqrt{v_{02}}, \\ z_2 = \sqrt{v_{02}} \displaystyle\int \frac{dx}{\chi(x)\, x \sqrt{\alpha\beta - m^2 x}}. \end{cases}$$

Wie ersichtlich, ist erst das Quadrat von z_1 eine nach ungeraden Potenzen von $\sin(mw)$ fortschreitende Reihe.

§ 2. Ebenso gelangt man zu Integralen der fünften Klasse, wenn man die Wurzel $\frac{1}{2}$ der zu der Differentialgleichung C, 20) gehörenden determinierenden Fundamentalgleichung benutzt. Es ist also

5) $$v_{12} = z_{10}\, z_{11}$$

ebenfalls ein Integral von C, 20. In der Umgebung von $x' = 0$ gilt die Reihe:

6) $$v_{12} = \sqrt{x'}\,(\gamma''_0 + \gamma''_1 x' + \gamma''_2 x'^2 + \ldots + \gamma''_p x^p + \ldots) = \sqrt{x'}\,\psi(x').$$

Die Koeffizienten werden erhalten aus:

7) $$(p+1)(2p+1)(2p+3)\,\alpha\beta\gamma''_{p+1} + 2(2p+1)\left[\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - m^2\left(p+\frac{1}{2}\right)^2\right]\gamma''_p + 4ph^2\gamma''_{p-1} = 0.$$

Daher:

$$3\alpha\beta\gamma''_1 = -2\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - \frac{m^2}{4}\right)\gamma''_0,$$

$$3.5\alpha^2\beta^2\gamma''_2 = \left\{2\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - \frac{m^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - \frac{9}{4}m^2\right) - 2h^2\alpha\beta\right\}\gamma''_0,$$

$$5.7.9\alpha^3\beta^3\gamma''_3 = -\left\{4\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - \frac{m^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - \frac{9}{4}m^2\right)\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2} - \frac{25}{4}m^2\right) - 52h^2\alpha\beta\left(\nu^2 - \frac{h^2\alpha\beta}{m^2}\right) + 37h^2\alpha\beta m^2\right\}\gamma''_0$$

. . . . . .

Weil v_{12} mit $A = x'(\alpha\beta - m^2x')$ für $x' = 0$ verschwindet, so sind:

$$8)\qquad \begin{cases} z_1 = \sqrt{v_{12}}, \\ z_2 = \sqrt{v_{12}}\displaystyle\int \frac{dx'}{\psi(x')\,x'\sqrt{\alpha\beta - m^2x'}} \end{cases}$$

Lösungen der gegebenen Differentialgleichung.

Für z_1 gilt die Bemerkung, dass erst das Quadrat dieser Funktion unter der Voraussetzung $\alpha = \beta$ eine nach ungeraden Potenzen von $cos(mw)$ bez. nach ungeraden Vielfachen von $cos(mw)$ fortschreitende Reihe ist.

H. Die sechste (Lindemannsche) Klasse der Funktionen des elliptischen Cylinders.

In den verschiedenen Ausdrücken für die gesuchten Integrale z_1 und z_2, welche bisher aufgestellt worden sind, waren stets Fundamentallösungen der Differentialgleichung für das Produkt zweier partikulären Integrale zu Grunde gelegt worden. Für alle diese verschwand die Konstante C in der Hermiteschen Darstellung der Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Indem Herr Lindemann sich von der genannten Beschränkung frei macht und passende lineare Verbindungen von zwei Fundamentallösungen der Differentialgleichung für das Produkt zweier partikulären Integrale unserer Gleichung bildet, erhält er für C bestimmte, endliche, von Null verschiedene Werte und kann somit Hermites Darstellung der Integrale anwenden. Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, dass, wenn man nach Ausführung von

$$e^{\int \frac{dx}{v\sqrt{x(\alpha\beta - m^2x)}}}$$

— wofern alles allgemein bleibt — für x seinen Wert $\alpha^2 sin^2(mw)$ setzt, beide Integrale einfach periodische Funktionen werden, die vollständig frei von Logarithmen sind.

J. Die Besselschen Funktionen.

Für die Besselschen Funktionen sind $m = 1$ und α oder β gleich Null zu setzen. Die Differentialgleichung lautet alsdann:

$$1)\qquad 4x^2\frac{d^2z}{dx^2} + 4x\frac{dz}{dx} + (h^2x - \nu^2)\,z = 0.$$

Die zur wesentlich singulären Stelle $x = 0$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung hat die Wurzeln $\frac{\nu}{2}$ und $-\frac{\nu}{2}$. Man hat daher die Entwickelung anzusetzen:

$$2)\qquad z_{00} = x^{\frac{\nu}{2}}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_ix^i + \cdots).$$

Zu demselben Resultat gelangt man durch Betrachten der Rekursionsformeln C, 3) bez. E, 3). Setzt man in denselben α oder β gleich Null, so verschwinden sämtliche Koeffizienten, es sei denn, dass ν eine ganze Zahl ist Dies vorausgesetzt, verschwinden nur $a_0, a_1, a_2 \ldots a_{p-1}$ und man wird zu der Bestimmungsgleichung geführt:

3) $$4i(\nu+i)\,a_i + h^2 a_{i-1} = 0,$$

aus welcher folgt:

$$1!\,4(\nu+1)\,a_1 = -h^2 a_0,$$
$$2!\,4^2(\nu+1)(\nu+2)\,a_2 = h^4 a_0,$$
$$3!\,4^3(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\,a_3 = -h^6 a_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Während nun bei beliebigem ν die Wurzel $-\frac{\nu}{2}$ der Fundamentalgleichung ein neues Integral liefert, ist dies bei ganzzahligem ν bekanntlich nicht der Fall. Bildet man deshalb die Differentialgleichung, welcher

4) $$v_{00} = z_{00}^{\,2} = x^\nu \varphi(x)$$

genügt, nämlich:

5) $$2x^2 v''' + 6xv'' + 2v' = -2(h^2 x - \nu^2)\,v' - h^2 v,$$

so ist:

6) $$v_{00} = x^\nu (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_i x^i + \cdots)$$

und man findet folgende Relation zwischen den Grössen c:

7) $$(2\nu+i)(2\nu+2i)\,c_i + h^2(2\nu+2i-1)\,c_{i-1} = 0, \quad \text{d. h.}$$
$$(2\nu+1)(2\nu+2)\,c_1 = -h^2(2\nu+1)c_0,$$
$$2!\,(2\nu+1)(2\nu+2)\,.\,(2\nu+2)(2\nu+4)\,c_2 = h^4(2\nu+1)(2\nu+3)c_0,$$
$$3!\,(2\nu+1)(2\nu+2)(2\nu+3)\,.\,(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)\,c_3 = -h^6(2\nu+1)(2\nu+3)(2\nu+5)c_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Integrale haben folglich die Gestalt:

$$z_1 = z_{00},$$
$$z_2 = z_{00}\int \frac{dx}{x^{\nu+1}\varphi(x)}$$

und zwar ist z_2 aus Logarithmen und algebraischen Funktionen zusammengesetzt, worauf ich jedoch an dieser Stelle nicht eingehe.

Mangel an Raum nötigt mich, die Untersuchung hier abzubrechen.

Zu demselben Resultat gelangt man durch Betrachten der Rekursionsformeln C, 3) bez. E, 3). Setzt man in denselben α oder β gleich Null, so verschwinden sämtliche Koeffizienten, es sei denn, dass ν eine ganze Zahl ist. Dies vorausgesetzt, [illegible] $a_0, a_1, a_2 \ldots a_{p-1}$ und man wird zu der Bestimmungsgleichung

3)

aus welcher folgt:

1!

2!

3!

.

Während nun bei beliebige [illegible] algleichung ein neues Integral liefert, ist dies bei ganzzahlig [illegible] Bildet man deshalb die Differentialgleichung, welcher

4)

genügt, nämlich:

5) $2x^2 v''' +$

so ist:

6) $v_{00} = x$

und man findet folgende Relation z [illegible] d. h.

7) $(2\nu + i)(2\nu$

$(2\nu$

$2!\,(2\nu+1)(2\nu+2)$ [illegible] $2\nu + 3)c_0,$

$3!\,(2\nu+1)(2\nu+2)(2\nu+3)\,.\,(2\nu$ [illegible] $+1)(2\nu+3)(2\nu+5)c_0,$

. . . . . .

Die Integrale haben folglich [illegible]

und zwar ist z_2 aus Logarithmen un [illegible] ngesetzt, worauf ich jedoch an dieser Stelle nicht eingehe.

Mangel an Raum nötigt m [illegible] hen.