Apparate und Versuche

zur

induktiven Behandlung

der

Statik.

Von

Wilhelm Neu,

Gymnasialprofessor.

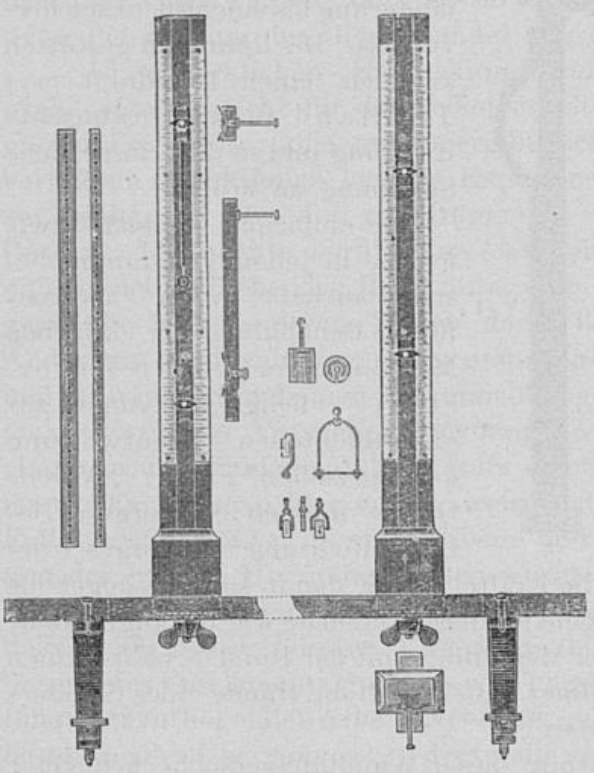
Augsburg 1894.

Druck des Literarischen Instituts von Haas & Grabherr.

I.

Einleitung.

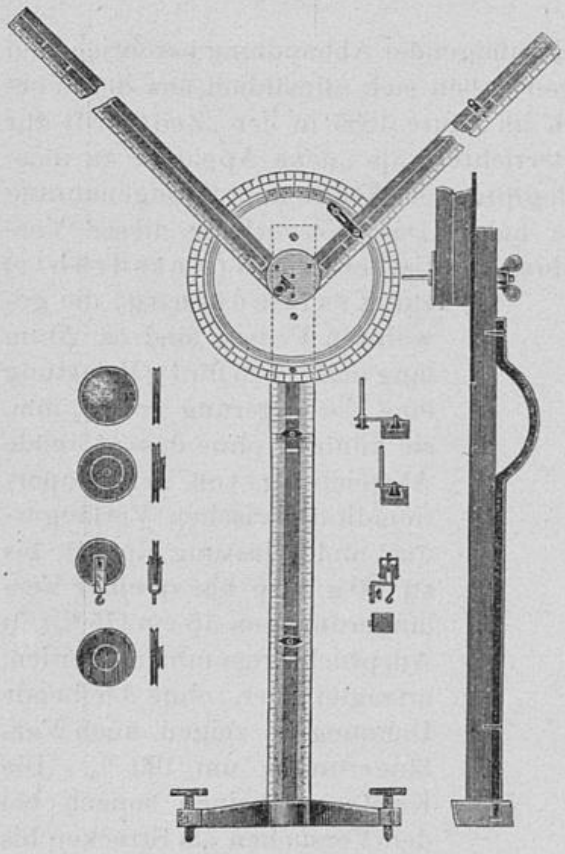
I. Vorbemerkungen. Die in nachfolgender Abhandlung beschriebenen Apparate und Versuchsanordnungen haben sich allmählich aus den Vorrichtungen entwickelt, welche ich im Jahre 1885 in der „Zeitschrift zur Förderung des physikalischen Unterrichtes“ als „neue Apparate zu messenden Versuchen über das Parallelogramm der Kräfte und die sogenannten einfachen Maschinen“ beschrieben habe. Das Wesentliche dieser Vorrichtungen besteht in der Anwendung elastischer Federn (Messdrähte) zur Kraftmessung; die gewählten Federn sind ca. 20 cm lang und geben für 1 g Belastung eine Verlängerung von $^1/_2$ mm, sie können, ohne dass störende Abweichung von der Proportionalität zwischen Verlängerung und Belastung eintritt, bis zu 300 g, also bis zu einer Verlängerung von 15 cm (75 %) in Anspruch genommen werden, ertragen aber, ohne bleibende Dehnung zu zeigen, auch Verlängerungen um 120 %. Die Kräfte erscheinen sonach bei den Versuchen als Strecken bis zu 15 cm Länge.



Die beiden zur Ausführung der Versuche nötigen Gestelle,*) von denen das eine aus einem Grundbrett mit zwei vertikalen Säulen von veränderlichem Abstand, das andere aus einer Säule auf Dreifuss mit zwei scherenförmigen Armen von veränderlichem Winkel besteht, sind mit mm-Teilungen versehen. Die Genauigkeit einer Kraftmessung auf 1 g kann nur erzielt werden durch Ablesung der Verlängerungen jener Federn auf $^1/_2$ mm. Bei vorsichtiger Ausführung ergeben die Versuche nur Abweichungen von 1 bis 2 %.

*) Die beigedruckten Figuren zeigen diese Apparate in der Form, wie sie von der Firma Max Kohl in Chemnitz in augenscheinlich sehr guter Ausführung geliefert werden.

Durch die Kleinheit der zu messenden Strecken ist die Verwendbarkeit der Apparate etwas beschränkt. Die Absicht nun, die bei denselben durchgeführte Methode der Messdrähte auch zur Demonstration im grossen zu verwenden, führte zu einer ersten Umgestaltung der Versuchsanordnungen, wie ich sie in dem Programme der kgl. Realschule Neuburg a/D. pro 1888: „Beiträge zur induktiven Behandlung der Elementar-Mechanik" veröffentlicht habe. Darnach werden die grundlegenden Versuche von der vertikalen Schultafel — als „Wandtafelversuche" — mit Messdrähten von 40 cm Länge ausgeführt; man hat es also mit kraftmessenden Strecken bis 30 cm Länge zu thun, und diese liefern, an der Tafel mit Kreide nachgezeichnet, genügend grosse Figuren — gewissermassen als zurückbleibende Spuren des ausgeführten Experimentes. Das Besondere besteht darin, dass die Messdrähte in Messingröhren eingelagert sind, aus welchen bei Spannung der Drähte die Verlängerung als solche deutlich hervortritt. Die Röhrchen gestatten zugleich, einen Messdraht mit der Hand in die gewünschte Richtung und in die erforderliche Spannung zu bringen.



Die einfachen Versuche, wie ich sie in jenem Programme beschrieben habe, waren — als Basis für die Behandlung der einfachen Maschinen im ersten Unterrichte — lediglich bestimmt zur experimentellen Beantwortung der speziellen Frage: „Welche Grösse müssen bei vorgeschriebener Richtung und vorgeschriebener Lage der Angriffspunkte die Kräfte haben, damit sie eine gegebene Last im Gleichgewicht halten?" Und für diese Versuche war die angegebene einfache Methode — Spannung der Messdrähte mit der Hand — vollkommen ausreichend, wenn auch in einzelnen Fällen noch die Hände eines Schülers zuhilfe genommen werden mussten.

Das Bestreben, die Ausführung dieser Wandtafelversuche bequemer zu gestalten, insbesondere aber die für mich eintretende Notwendigkeit, die Versuche auszudehnen auf die eingehende Behandlung der Statik im allgemeinen (im Anschluss an Walberers Mechanik von Recknagel), wie sie als Pensum der 8. Klasse der bayerischen Gymnasien bisher vorgeschrieben war, gaben mir weiter Veranlassung die ganze Methode der Messdrähte zu verallgemeinern. Infolge ihrer Verwendung im Unterrichte am humanistischen Gymnasium und unter beständiger Umformung

haben sich dann die Vorrichtungen im wesentlichen so herausgebildet, wie ich sie im nachfolgenden beschreibe. Im einzelnen aber haben sie seitdem entsprechend ihrer jetzigen Verwendung am Realgymnasium und infolge der ausserordentlichen Anregung und Förderung seitens meines jetzigen Vorstandes noch mancherlei Verbesserungen und Ergänzungen erfahren, manche Bestandteile wurden erst im letzten Jahre im Interesse einer möglichst bequemen Handhabung fast völlig umgestaltet. Welchen Einfluss auf die ganze Anordnung des Stoffes selbst insbesondere das „Lehrbuch der Physik zur ersten Einführung in das Studium derselben von Dr. G. Recknagel“ geübt hat, dürfte dem Kundigen nicht entgehen.

2. Wesen der induktiven Methode für das Gebiet der Statik. Wenn ich die Apparate als zur induktiven Behandlung der Statik bestimmt bezeichne, so will damit keineswegs gesagt sein, dass sie nur im Sinne der induktiven Methode benützt werden sollen; sie sind vielmehr wie alle für das fragliche Gebiet üblichen Vorrichtungen zur blossen Verifizierung der Gesetze ohne weiteres brauchbar. Es soll vielmehr durch obige Bezeichnung nur hervorgehoben werden, dass sie in der durchgeführten Art einer induktiven Behandlung des Gegenstandes zugrunde gelegt werden können.

Einer wirklichen „Entdeckung“ auf experimentellem Wege bedarf nach meiner Ansicht für das Gebiet der Statik nur der Satz vom Parallelogramm der Kräfte; alles andere ergibt sich daraus durch Deduktion. Aber bei diesen Deduktionen hat das Experiment denn doch eine andere Rolle zu spielen als die der nachträglichen Verifizierung schon deduzierter Gesetze. Ich möchte der üblichen mathematischen Deduktion durch Hinzunahme sich aufhebender Hilfskräfte eine Art experimenteller Deduktion gegenüberstellen, deren Wesen darin besteht, dass durch successive Änderung der Bedingungen des ursprünglichen fundamentalen Versuches und in ununterbrochenem Zusammenhang mit demselben schliesslich diejenige Form des Versuches gewonnen wird, welche den neuen Satz als einen aus dem fundamentalen Gesetz ableitbaren speziellen Fall erscheinen lässt. Es kommen hier vorzugsweise in Betracht der Übergang zu dem Falle zweier Kräfte in einer Ebene mit verschiedenen Angriffspunkten und der weitere Übergang zu den parallelen Kräften.

Die konsequente Durchführung einer derartigen experimentellen Deduktion für die erwähnten Übergänge bildet nächst der induktiven Herleitung des Fundamentalgesetzes vom Parallelogramm der Kräfte den Hauptinhalt der vorliegenden Arbeit. Nebenher geht jedesmal die experimentelle Erläuterung des Überganges von dem Falle zweier Kräfte zu mehreren Kräften, also die experimentelle Veranschaulichung der Methoden, nach welchen man die zunächst für zwei Kräfte gefundenen Gesetze auf den Fall mehrerer Kräfte ausdehnt und die Resultante mehrerer Kräfte praktisch bestimmt.

Dass zur abschliessenden Behandlung eines physikalischen Pensums Schülerübungen, d. h. die experimentelle Lösung von Aufgaben durch die Schüler, gehören, ist eine Ansicht, die sich immer mehr Bahn bricht. Auch für solche Schülerübungen glaube ich mit dem folgenden neues Material geschaffen zu haben; denn die hiefür vor allem

nötige Übersichtlichkeit, Einfachheit und vollkommene Zuverlässigkeit dürfte den Apparaten nicht abzusprechen sein. Und wenn Noack in seinem Leitfaden für Schülerübungen Seite 36 urteilt, dass die Aufgaben über die Seite 3 erwähnten Apparate zu den schönsten gehören, welche sich überhaupt für Schülerübungen finden lassen, so hoffe ich, dass die jetzige Form der Apparate den Anforderungen der Brauchbarkeit für solche Übungen noch mehr entspricht und zugleich den Bereich der Aufgaben wesentlich erweitert.

3. Allgemeine Bemerkungen über die neue Versuchsanordnung. Das experimentelle Verfahren; welches bei den zu beschreibenden Versuchen eingehalten ist, gründet sich wesentlich auf eine andere Verwendung der elastischen Drähte. Dieselben dienen im folgenden nicht zur Messung der Kräfte selbst, diese werden vielmehr, wie sonst üblich, durch Gewichte dargestellt, deren Schnüre über leicht bewegliche, in Spitzen laufende Rollen geführt sind. Die Drähte spielen trotzdem eine Hauptrolle; wie aus dem nachstehenden sofort hervorgehen wird, ist ohne sie keiner der folgenden Versuche ausführbar.

Zunächst wird von den Drähten nicht mehr Proportionalität zwischen Belastung und Verlängerung, sondern nur Konstanz der Verlängerung für die Dauer der Belastung beansprucht. Beide Forderungen werden von den Drähten ja nur annähernd erfüllt; bezüglich der Proportionalität sind die Abweichungen bei dem besten mir zur Verfügung stehenden Drahtmaterial derart, dass bei einem für 50 % Verlängerung abgepassten Drahte einer Streckung um 25 % eine ca. 1 % zu grosse und einer Streckung um 75 % eine ca. 1 % zu kleine Kraft entspricht. Demgemäss ergeben sich bei Drähten von 60 cm Länge Abweichungen bis zu 5 mm (4,5 mm), welche bei messenden Versuchen sich bereits störend geltend machen und die Verwendung so langer Drähte für Schulversuche als ungeeignet erscheinen lassen, weil sie die Eichung jedes einzelnen Drahtes erfordern.

In ungleich höherem Grade erfüllen die Drähte die Bedingung der Konstanz der Verlängerung: ein Draht von 100 cm Länge, durch ein passendes Gewicht auf 175 cm gestreckt, zeigt deutlich eine mit der Zeit wachsende Nachdehnung, allein der Zuwachs pro Minute nimmt so rasch ab, dass schon nach einer Stunde so gut wie keine Änderung mehr wahrgenommen wird. Der störende Einfluss von Nachdehnungen während der anzustellenden Versuche kann also, wenn es sich um grössere Genauigkeit handelt, dadurch vermieden werden, dass man die Drähte schon vor Ausführung der Versuche annähernd auf die Verlängerungen streckt, bis zu welchen sie bei den Versuchen in Anspruch genommen werden sollen; am sichersten wird man demnach alle Einstellungen schon bei der Vorbereitung der Versuche vornehmen.

Was nun den Grundgedanken der folgenden Versuche anlangt, so handelt es sich im Gegensatz zu den sonst üblichen hier einschlägigen Versuchen und im Gegensatz zu den von mir selbst in den erwähnten Abhandlungen beschriebenen durchgehends darum, zunächst die Angriffslinie und dann die Grösse der Resultante gegebener Kräfte direkt

zu bestimmen — also nicht etwa die zur Herstellung des Gleichgewichtes nötige sogenannte Gegenresultante.

Das dabei zur Anwendung kommende Verfahren, welches ich „Tarier-Methode“ nennen möchte, besteht darin, dass die Wirkung der gegebenen Kräfte einschliesslich des Gewichtes der Angriffskörper tariert wird und zwar mit Hilfe der elastischen Drähte, die ich desshalb „Tarierdrähte“ nenne. Die gesuchten Kräfte sind dann diejenigen, welche der Tara Gleichgewicht halten, also die ursprünglich gegebenen Kräfte in aller Form ersetzen. Die Methode liefert also direkt die Ersatzkraft für gegebene Kräfte.

Die Tariermethode kann übrigens ohne weiteres auch zur Bestimmung der Gegenresultante verwendet werden, indem man zunächst nur den Angriffskörper tariert, die gegebenen Kräfte erst nachträglich anbringt und durch eine neue Kraft ins Gleichgewicht setzt. Die nachfolgend beschriebenen Versuche zur Bestimmung der Ersatzkraft sind also mit dieser Modifikation auch geeignet zur Bestimmung der Gegenresultante. Dabei tritt sogar die Vereinfachung ein, dass nur Tarierdrähte von vertikaler Richtung erforderlich werden, während zur gleichzeitigen Tarierung der gegebenen Kräfte im allgemeinen auch Tarierdrähte in horizontaler Richtung anzubringen sind.

Allein didaktisch ist es sicher viel entsprechender, die Resultante direkt zu bestimmen, als erst auf dem Umweg über die Gegenresultante zu ihr zu gelangen; gelegentliche Benützung dieses Umweges neben dem direkten kann natürlich nur förderlich sein.

Man könnte versucht sein die elastische Tarierung durch Federn zu ersetzen durch Tarierung mittels Gegengewichten, also durch „Ausbalancieren“ der Angriffskörper; allein eine einfache Überlegung zeigt, dass damit das, was die Federn leisten, absolut nicht erreicht werden kann, abgesehen von der Umständlichkeit der Tarierung durch sprungweises Zulegen von Gewichten gegenüber der durch stetige Spannung einer Feder. Dagegen lassen sich die Drähte zum Zwecke der Tarierung (nicht der Messung) ohne weiteres durch Gummischnüre, beziehungsweise Gummibänder von entsprechender Tragkraft ersetzen; doch wird man bei dem unverhältnismässig höheren Preise und der kurzen Lebensdauer derselben von ihrer Verwendung wohl absehen müssen.

Bezüglich der Bestimmung der Gegenresultante durch alleinige Tarierung des Angriffskörpers möchte ich noch bemerken, dass bei geringem Gewichte des letzteren auch die Spannung der Tarierfedern nur unbedeutend und demgemäss die Stabilität der Gleichgewichtslage des Angriffskörpers wenig energisch ist; in diesen Fällen empfiehlt sich die von mir schon früher (Zeitschr. zur Förd. des phys. Unt. 1885) beschriebene Methode des Gegendrahtes: man spannt zwei Federn gegen einander hinreichend stark und tariert durch weitere Anspannung der einen. Bei gewaltsamer Veränderung der so gewonnenen Gleichgewichtslage des Angriffskörpers ist das Bestreben zur Rückkehr in dieselbe doppelt so gross als bei einfacher Tarierung.

II.

Beschreibung der Apparate.*

4. Die Tafel und ihre Ausrüstung. Zur Ausführung der Versuche ist vor allem die gewöhnliche Schultafel erforderlich, welche in passender Höhe an der vertikalen Wand befestigt oder in der Höhe verstellbar sein kann. Die Dimensionen der Tafel spielen nur insoferne eine Rolle, als sich nach ihnen die Grösse der Versuche richtet. Die von mir bisher benützte besondere Tafel hat bei quadratischer Form nur 105 cm Seite und reicht für alle Versuche aus. Für viele Versuche als sehr bequem und auch sonst vielfach verwendbar hat sich die Einteilung der Tafelfläche in dm-Quadrate, sowie die Aufzeichnung konzentrischer Kreise von 10, 20, 30 ... cm Radius erwiesen. Der äusserste dieser Kreise ist zugleich in ganze Grade geteilt, welche bei 1 m Kreisdurchmesser ca. $8^1/_2$ mm breit ausfallen. Auf solche Weise können aus grosser Entfernung die rechtwinkeligen, sowie die Polarkoordinaten eines Tafelpunktes auf ganze cm (durch Schätzung), bez. auf ganze Grade angegeben werden. Diese Systeme feiner, mit hellroter Ölfarbe hergestellter Linien stören die sonstige Verwendung der Tafel gar nicht, sind aber für viele Zwecke ausserordentlich nützlich. Für unsere Versuche spielen sie, ohne absolut notwendig zu sein, in manchen Fällen eine Rolle, insofern sie Zeichnung und Rechnung überflüssig machen und das Ablesen von Strecken und Winkeln auf grosse Entfernung ermöglichen. Die Verwendbarkeit der Tafel für den ersten Unterricht in der analytischen und darstellenden Geometrie sowie für die graphische Darstellung von physikalischen Gesetzen überhaupt ist naheliegend.

Die Schultafel wird nun in folgender Weise ausgerüstet:

1. Auf der Vorderseite werden längs des Umfanges Holzschienen von schwalbenschwanzförmigem Querschnitt festgeschraubt; dieselben sind mattschwarz und stören weder das Aussehen noch die sonstige Verwendung der Tafel, da sie nur einen Randstreifen von 4 cm Breite für das Beschreiben unbrauchbar machen.

2. Auf diesen Schienen lassen sich schwarzgebeizte Holzschieber von 6 cm Länge durch Andrücken bequem fortbewegen; sich selbst überlassen sitzen sie durch die Wirkung von kräftigen Druckfedern an der betreffenden Stelle hinreichend fest; die umständliche Handhabung von Presschrauben zum Festklemmen fällt also weg. Das Anbringen und Entfernen der Schieber lässt sich ohne Umstände vornehmen, indem bei jeder der 4 Schienen an passender Stelle der Querschnitt auf eine Länge von 6,2 cm von der Form des gleichschenkeligen Trapezes auf die eines Rechteckes reduziert ist, so dass man nur an einer solchen Stelle den betreffenden Schieber anzudrücken und weiterzuschieben hat.

* Die Apparate werden nach den Angaben und unter der Kontrolle des Verfassers von Universitäts-Instrumentenmacher A. Bopp in München gefertigt und sind von demselben zu beziehen.

3. Drei dieser Schieber dienen als Träger von Rollen. Dieselben bestehen aus Aluminium und besitzen eine besondere längere Achse, mittels deren sie zwischen harten Stahlspitzen laufen. Die sehr kräftigen Scheren sind durch besondere Zapfen an den Schiebern befestigt und um diese Zapfen drehbar, so dass, an welcher Stelle des Tafelumfanges die Rolle sich auch befinden mag, die betreffende Schnur nur übergelegt zu werden braucht, mithin das lästige Durchziehen der Schnur durch die Schere unter allen Umständen vermieden wird. Eine besondere Rolle, deren Schere am Querstücke mit einer Messinghülse zum Aufstecken auf einen längeren Zapfen versehen ist, kommt bei den Versuchen über Kräftepaare zur Verwendung.

4. Drei weitere Schieber tragen die zur Spannung der Tarierfedern dienenden Wirbel. Ein solcher Wirbel besteht aus einem in dem betreffenden Schieber befestigten Stahlzapfen von 3 mm Durchmesser und 5 cm Länge, auf welchen eine starkfedernde Hülse aus Messingrohr mit randeriertem Kopf gesteckt ist. Dieser Kopf ist mit einer breiten Rinne versehen, welche mehrere Lagen einer dünnen Schnur aufnehmen kann, so dass eine zu spannende Schnur zunächst in dieser Rinne und schliesslich, wenn die gewünschte Spannung nahezu erreicht ist, nach Abstreifen vom Wirbelkopfe auf der erwähnten Messinghülse aufgewunden werden kann. Die Operation des Aufwindens vollzieht sich auf solche Weise rasch, und die letzte Einstellung ist trotzdem sehr empfindlich. Jeder dieser drei Schieber trägt noch einen besonderen Stift mit kleinem Loch, durch welches die Spannschnur vor der Befestigung am Wirbel gezogen wird.

Die Schnurrinnen der unter Nr. 3 erwähnten Rollen und diese Löcher zum Durchziehen der Spannschnüre befinden sich in gleichem Abstande von der Tafelfläche, so dass sämtliche Schnüre in einer zur Tafelfläche parallelen Ebene liegen. Für Versuche über parallele Kräfte im Raum wird der Zapfen des einen Wirbels durch einen solchen von 40 cm Länge ersetzt, bez. ein besonderer Schieber mit so langem Zapfen verwendet.

5. Die Tarierdrähte. Für sämtliche Versuche sind nur 3 bez. 6 Tarierdrähte erforderlich. Die Länge derselben richtet sich nach den Dimensionen der Tafel und beträgt am günstigsten ca. 28 % der Tafelhöhe, also bei einer Tafel von 140 cm Höhe etwa 40 cm. Das Material ist als sogenannter Hosenträgerdraht überall bei Nadlern und Säcklern um billigen Preis (2—3 m für 20 Pf.) zu haben; für die Zwecke der Tarierung ist jede Sorte gut genug.

Für das Herrichten des gekauften Drahtes diene folgende Anleitung: Bei dem frischen Drahte sitzen die Windungen so fest aufeinander, dass derselbe gegen das Licht gehalten keine Zwischenräume zwischen den Windungen zeigt, und dass man ein Stück von 10 bis 15 cm Länge horizontal hinaushalten kann, ohne dass es durch sein Eigengewicht eine nennenswerte Biegung erfährt. Man schneidet ein Stück von der gewünschten Länge ab und biegt an jedem Ende die letzten drei Windungen durch Einschieben eines Stechers (Stricknadel) so um, dass sie eine kleine Öse bilden. Die eine dieser Ösen hängt man über einen in

den Tisch geschlagenen kleinen Nagel und zieht den Draht mit Hilfe eines passenden Hackens längs eines auf den Tisch gelegten Masstabes so weit aus, dass er um ca. 120 % verlängert erscheint. Der Draht zeigt dann eine bleibende Streckung um 3—5 % seiner ursprünglichen Länge, welche sich bei einer wiederholten oder dauernden Dehnung um 120 % nur wenig ändert. Der Draht befindet sich nun in einem vollständig veränderten Zustande: gegen das Licht gehalten erscheinen die Windungen von einander getrennt, und horizontal hinausgehalten biegt sich schon ein kurzes Stück ab. In diesem Zustande ist der Draht innerhalb 75 % Verlängerung sogar zur Messung geeignet; für Messungszwecke ist dann nur noch die Länge so zu regulieren, dass eine bestimmte Belastung (etwa 200 g) die gewünschte Verlängerung (z. B. 20 cm) gibt.

Ich bemerke noch, dass geringere Sorten schon durch eine Dehnung um 100 % in den erwähnten Zustand versetzt werden, während besonders gute Sorten gewaltsame Streckung um 140 % der ursprünglichen Länge erfordern.

Indem man den hergerichteten Draht auf 10 cm Entfernung in einem Bogen lose von Hand zu Hand laufen lässt, kann man leicht erkennen, ob er homogen ist: zu Messdrähten wird man nur die besten Stücke auswählen, zur Tarierung dagegen ist jedes, auch ein aus Abfällen (durch Ineinanderdrehen der erwähnten kleinen Ösen) zusammengesetztes Stück brauchbar.

An der einen Öse des hergerichteten Drahtes wird ein kleines Häkchen aus steifem Draht angebracht, während an der anderen Öse eine weisse, ziemlich kräftige Schnur von 50 cm Länge festgeknüpft wird. Schliesslich hat man noch das freie Ende dieser Schnur durch den unter Nr. 4 erwähnten besonderen Stift zu ziehen und am Wirbelkopf zu befestigen.

6. Die Angriffskörper. Als Angriffskörper kommen besonders zur Verwendung:

a) ein Metallring von 2—3 cm Weite;

b) ein ebenes dünnes Brettchen aus sogenanntem Zedernholz, welches zum Schutz gegen das Verziehen und zum Aufzeichnen der Kraftrichtungen beiderseits mit Zeichenpapier überklebt ist. Die Dimensionen richten sich nach der Grösse der Tafel; bei unserer Tafel von 105/105 cm können Brettchen von 50 cm Länge und 40 cm Breite verwendet werden. An einer Längsseite sind in 40 cm Abstand 2 starke Ringösen von 2—3 cm lichter Weite festgeschraubt, mit Hilfe deren das Brettchen über 2 Stifte bezw. an 2 Tarierdrähte gehängt werden kann (Fig. 5, Seite 17);

c) ein gerader, in mm geteilter Masstab von dem üblichen rechteckigen Querschnitt, jedoch 105 cm Länge, auf welchen an beliebigen Stellen mittels federnder Klammern 2 starke Ringösen (zur Aufhängung des Stabes) aufgesteckt werden können. Ausserdem sind in eine der schmalen Flächen 2 kurze zylindrische Messinghülsen so eingelassen, dass ihre zur Längsrichtung des Stabes senkrechten Achsen in jener Fläche liegen und genau mit den Teilstrichen 0 und 50 cm zusammenfallen;

mittels einer solchen Hülse kann der Stab auf einen in der Tafel zu befestigenden Zapfen von 3 mm Stärke aufgesteckt werden (Fig. 8, S. 23);

d) ein Brettchen wie unter b mit 3 beweglichen Ringösen, von denen 2 an der einen Längsseite in 40 cm Entfernung und eine in der Mitte der anderen Längsseite befestigt sind (Fig. 11, S. 28);

e) ein Gestelle aus 2 solchen Brettchen, welche durch 4 Stäbe von je 15 cm Länge derart mit einander verbunden werden, dass ihre Ebenen parallel sind; zur Aufhängung dieses Gestelles dienen 3 Ringösen, von denen 2 an dem einen, die dritte an dem anderen Brettchen angebracht sind (Fig. 15, S. 38).

Einige besondere Einrichtungen sind bei den betreffenden Versuchen beschrieben.

7. Tragstifte und Gewichte. Als Träger zur vorläufigen Aufhängung der Angriffskörper, sowie als Marken für die richtige Einstellung der an Tarierdrähte gehängten Ringösen dienen besondere Tragstifte (glatte Stahlzapfen von 3 mm Durchmesser und 7 cm Länge). Dieselben werden in passend angebrachte Löcher der Tafel eingesteckt, welche so genau gebohrt sind, dass die Stifte beim Rütteln sich nicht lockern. Von diesen Löchern ist eines in der Mitte der Tafel, zwei weitere sind auf der horizontalen Mittellinie in je 40 cm Entfernung vom ersteren anzubringen; für manche Zwecke ist es bequem, wenn die ganze horizontale Mittellinie der Tafelfläche von 10 zu 10 cm mit solchen Löchern versehen ist, die der sonstigen Verwendbarkeit der Tafel absolut keinen Eintrag thun. Zur Aufhängung der unter 6 d und e erwähnten Vorrichtungen ist ein Tragstift von ca. 40 cm Länge in ein 20 cm von der Mitte der Tafel entferntes Loch einzustecken.

Als Gewichte zur Darstellung der Kräfte empfehlen sich in erster Linie die üblichen Plattengewichte mit Schlitzen zum Aufsetzen auf einen gemeinsamen Halter, bes. in der Form, wie sie von Recknagel (Lehrbuch der Physik S. 32) angegeben wurden. Man reicht aber auch aus mit je 3—4 gewöhnlichen zylindrischen Eisengewichten von 200 und 100 g, welche mit gegenüberstehenden Haken versehen sind, so dass man sie untereinander hängen kann. Besonders in den Fällen, in welchen die Resultante durch Addition oder Subtraktion der Komponenten gebildet wird, sind sie ausserordentlich bequem. Für die übrigen Versuche, bei welchen die Resultante herausprobiert werden muss, sind sie durch Stücke aus Bleiblech von 50, 20, 10, 5 (2 und 1) g zu ergänzen, welche durchlocht sind und nebeneinander auf einen geräumigen Haken gereiht werden.

III.

Beschreibung der Versuche.

8. Resultante zweier Kräfte P_1 und P_2 mit gemeinsamem Angriffspunkte A und beliebigem Winkel. Bestimmung der Angriffslinie innerhalb $\sphericalangle$ (P_1 P_2). Ausrüstung der Tafel: Mittelstift (7) mit Ring (6 a); Schieber mit Wirbel und Spannschnur (10 cm länger als die halbe Tafelhöhe) oben in der Mitte; 2 Schieber mit Rollen unten links und rechts; 2 Schnüre mit Häkchen an beiden Enden, 10 cm länger als die halbe Tafeldiagonale; 2 beliebige Gewichte, etwa $P_1 = 300$ g und $P_2 = 400$ g.

Die Spannschnur, sowie die mit P_1 und P_2 belasteten Schnüre werden in den Ring gehängt und letztere über die Rollen geführt (Fig. 1). Durch Handhabung des Wirbels und Verschiebung der Rollen erzielt man leicht das Einspielen des Ringes, so dass derselbe frei ist und den Stift gleichmässig umschliesst. (Das Gewicht des Ringes hat keinen störenden Einfluss, da es in unserem Falle nur die Spannschnur belastet.)

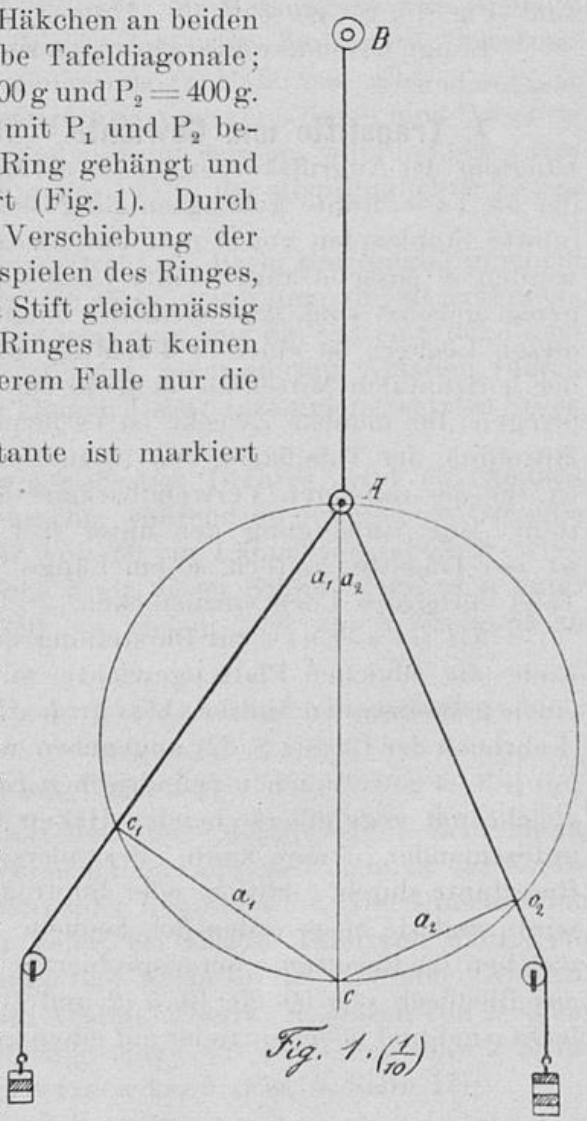


Fig. 1. ($\frac{1}{10}$)

Die Angriffslinie der Resultante ist markiert durch die Verlängerung AC der Spannschnur BA; die zu untersuchende Frage ist also: Welche Lage hat AC innerhalb des von P_1 und P_2 gebildeten Winkels? Der erste Gedanke ist, zu untersuchen, ob zwischen den Teilen α_1 und α_2 des ganzen Winkels (P_1, P_2) und den Masszahlen der gewählten Kräfte $P_1 = 300$ g und $P_2 = 400$ g eine einfache Beziehung besteht. Wählt man zu diesem Zwecke durch Verstellung der 1. Rolle der Reihe nach verschiedene Werte für α_1 und bestimmt (unter geringer Erschütterung der Tafel zur Überwindung der Reibung bei den Rollen)* durch Verschiebung der 2. Rolle die zugehörigen Werte von α_2 jedesmal so, dass der Ring einspielt, so erhält man z. B.:

zu $\alpha_1 = 40^0$ annähernd	$\alpha_2 = 29^1/_2{}^0$	($\alpha_1 : \alpha_2 = 4 : 3$)
$\alpha_1 = 60^0$	$\alpha_2 = 40^1/_2{}^0$	($\alpha_1 : \alpha_2 = 3 : 2$)
$\alpha_1 = 90^0$	$\alpha_2 = 48^3/_4{}^0$	($\alpha_1 : \alpha_2 = 15 : 8$)

* Die Erschütterung der Tafel durch Klopfen oder abwechselnden Druck ist in allen Fällen zu empfehlen, in denen die Verwendung von Richtungsrollen notwendig ist.

Hiernach ist die gesuchte Beziehung zwischen α_1, α_2, P_1 und P_2 jedenfalls keine einfache.

Der nächste Gedanke ist nunmehr, zu untersuchen, ob zwischen den Abständen a_1 und a_2 der Kraftrichtungen von einem Punkte C der Richtungslinie von R und den Masszahlen von P_1 und P_2 eine einfachere Beziehung besteht.

Um diese Abstände CC_1 und CC_2 bequem abzulesen, beschreiben wir den Kreis mit dem Durchmesser AC (50 cm) und markieren auf der Peripherie die Punkte C_1^1, C_1^2 ... und C_2^1, C_2^2 ..., welche von C je die Entfernungen 1, 2, 3 .... cm haben. (In Wirklichkeit wird ein Kreis aus weissem Karton, auf dem die Punkte A, C u. s. w. bereits markiert sind, an der betreffenden Stelle der Tafel mit Heftstiften befestigt.)

Stellt man nun die 1. Rolle der Reihe nach auf verschiedene Werte von a_1 ein und bestimmt durch nachträgliche Verschiebung der 2. Rolle die zugehörigen Werte von a_2 stets so, dass der Ring einspielt (wobei auch Nachdrehen des Wirbels bei B nötig wird), so findet man z. B.

für a_1 =	8 cm genau	a_2 =	6 cm
a_1 =	20 cm	a_2 =	15 cm
a_1 =	30 cm	a_2 =	$22^1/_2$ cm
a_1 =	48 cm	a_2 =	36 cm

Hiernach scheint das gesuchte Gesetz für die Lage von R innerhalb $\sphericalangle (P_1, P_2)$ zu sein:

$$P_1 : P_2 = a_2 : a_1$$
$$\text{oder } P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2.$$

Zur Bestätigung des so induzierten Gesetzes stellen wir noch die 1. Rolle wiederholt ganz beliebig ein und die 2. Rolle jedesmal so, dass der Ring einspielt, und prüfen die nachträglich abgelesenen Werte von a_1 und a_2; es ergibt sich in jedem Falle $a_2 : a_1 = 4 : 3$.

Nachdem nun aus geometrischen Gründen das Verhältnis der Abstände a_1 und a_2 für alle Punkte von AC konstant ist, so ist das Gesetz entdeckt: Die Angriffslinie der Resultante ist der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von P_1 und P_2 (oder in Bezug auf welche die Arme von P_1 und P_2) sich umgekehrt wie die Masszahlen von P_1 und P_2 verhalten, oder für welche die sogenannten statischen Momente $P \cdot a_1$ und $P_2 \cdot a_2$ gleich sind.

Die Geometrie lehrt die Konstruktion dieses Ortes als Diagonale des Parallelogrammes aus $\sphericalangle (P_1, P_2)$ und den Masszahlen von P_1 und P_2 als Masszahlen der jenen Winkel einschliessenden Seiten.

Demgemäss sind jetzt für beliebige Richtungen von P_1 und P_2 die Hilfsparallelogramme ABCD zu zeichnen und jedesmal zu prüfen, ob eine Kraft in der Richtung der Diagonale AC die gewählten Kräfte P_1 und P_2 ersetzt.

Anmerkung. Um zu prüfen, ob die Projektion der Zugschnur auf die Tafelfläche genau mit AC zusammenfällt, bez. um überhaupt eine Zugschnur auf eine vorgezeichnete Gerade der Tafel einzustellen, wird ein passend gefasster ebener Spiegel unter der Schnur an die Tafel angedrückt; man stellt so ein, dass die Schnur und ihr Bild sich decken.

Zu diesem Zwecke bringen wir (s. Figur 2) die 1. Rolle mit P_1 etwa rechts in der Mitte, die 2. Rolle mit P_2 oben beliebig, einen Wirbel mit Tarierdraht links in der Mitte, einen andern unten in der Mitte an, hängen die Kraftschnüre und die Tarierdrähte in den Ring ein und spannen die Tarierdrähte so, dass der Ring einspielt (das Gewicht des Ringes beeinflusst nur die Spannung des unteren Tarierdrahtes); sodann zeichnen wir das Hilfsparallelogramm A B C D, entfernen P_1 und P_2 und hängen in den Ring eine besondere Zugschnur ein. Diese spannen wir mit der Hand in der Richtung der Diagonale A C: Bei genügender Spannung spielt der Ring ein, während schon eine geringe Abweichung von dieser Richtung die Einstellung des Ringes unmöglich macht; P_1 und P_2 können also nur ersetzt werden durch eine Kraft in der Richtung von A C.

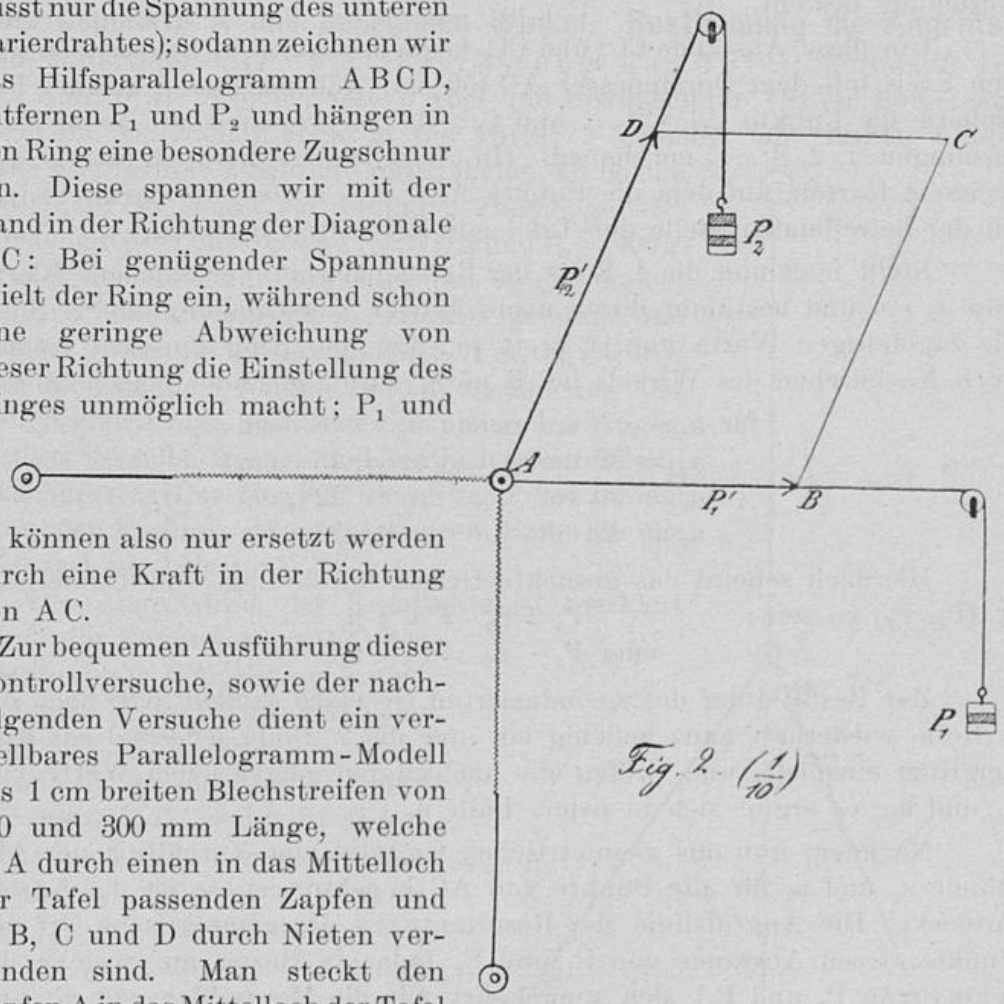


Fig. 2. $(\frac{1}{10})$

Zur bequemen Ausführung dieser Kontrollversuche, sowie der nachfolgenden Versuche dient ein verstellbares Parallelogramm-Modell aus 1 cm breiten Blechstreifen von 400 und 300 mm Länge, welche in A durch einen in das Mittelloch der Tafel passenden Zapfen und in B, C und D durch Nieten verbunden sind. Man steckt den Zapfen A in das Mittelloch der Tafel und befestigt das Modell in verschiedenen Stellungen und Formen an der Tafel (durch Heftstifte, deren breite Köpfe die Blechstreifen festhalten). Bei der wie oben durchzuführenden Kontrolle dient dann der vorstehende Zapfen A zugleich als Mittelstift für den Ring.

9. Bestimmung der Grösse der Resultante. Nachdem in den vorausgehenden Versuchen das induzierte Gesetz für die Richtung von R sichergestellt ist, erübrigt noch die Aufsuchung einer Beziehung für die Grösse der Ersatzkraft R. Zu diesem Behufe wird die zur Kontrolle der Richtung benützte Zugschnur über eine an richtige Stelle gebrachte Rolle geführt und mit Gewichten belastet, bis der Ring einspielt; markiert man die Masszahl dieser Gewichte durch eine auf die Schnur geschobene Korkkugel als Länge von A aus, so zeigt sich, dass in jedem Falle die Marke mit dem Endpunkt C der Diagonale A C zusammenfällt.

Hiernach ist als weiteres Gesetz induziert, dass die Diagonale A C nicht bloss die Richtung, sondern auch die Grösse der Resultante R markiert.

Zu bestätigen bleibt also, dass der Ring für eine neue (nach Grösse und Richtung beliebige) Wahl von P_1 und P_2 durch eine der Richtung und Grösse von A C entsprechende Kraft R zum Einspielen gebracht wird, mithin die gewählten Kräfte P_1 und P_2 durch dieses R ersetzt werden.

Hiermit dann ist das Gesetz für die Herstellung der Resultante zweier Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt — der Fundamentalsatz vom Parallelogramm der Kräfte — gefunden.

Die oben in 8. erwähnte Einteilung der Tafelfläche macht für rechtwinkelige Komponenten die Zeichnung der Hilfsparallelogramme ganz überflüssig und erleichtert dieselbe für schiefwinkelige Komponenten ganz wesentlich. Die geometrischen Beziehungen zwischen P_1, P_2 und R treten dabei für **rechtwinkelige** Komponenten **ohne weiteres** hervor, so dass ihre Gültigkeit für beliebigen $\sphericalangle$ (P_1, P_2) lediglich durch weitere Versuche zu prüfen ist. Die induktive Herleitung des Fundamentalsatzes auf diesem Wege, durch Untersuchung rechtwinkeliger Komponenten von der eingeteilten Tafel, gestaltet sich ausserordentlich einfach und dürfte sich für den Anfangskurs (4. Kurs unserer Realschule) empfehlen.

10. Die Umkehrungsaufgaben im allgemeinen übergehe ich hier und erwähne blos, dass sich die Zerlegung in rechtwinkelige Komponenten vor der eingeteilten Tafel gewissermassen von selbst macht. Nur die doppeldeutige Umkehrungsaufgabe (Bestimmung von α_2 und P_1 aus R, α_1 und P_2) glaube ich besonders behandeln zu sollen.

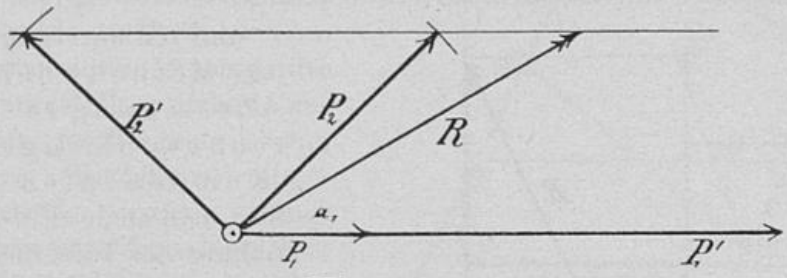


Fig. 3. (1/10)

In die gewählte Richtung von P_1 (etwa horizontal nach rechts) (Figur 3) bringt man einen Schieber mit Wirbel und Spannschnur, in die Richtung von R (schräg aufwärts rechts), sowie in die voraussichtliche Richtung von P_2 (aufwärts) je einen Schieber mit Rolle. In 2 zu einander senkrechten Richtungen (hier horizontal nach links und vertikal abwärts) werden Schieber mit Wirbel und Tarierdraht eingestellt. Man hängt die Tarierdrähte, sowie zunächst nur die Schnur für R in den Ring, bringt R an und tariert. Sodann entfernt man R, hängt die Spannschnur in der Richtung von P_1 ein und spannt dieselbe so, dass der Ring in horizontaler Richtung einspielt (den vertikal abwärts gehenden Tarierdraht wird man dabei vorübergehend entfernen). Dann wird P_2 angehängt und durch Verschiebung der betreffenden Rolle der Ring zum vollständigen Einspielen gebracht, womit zunächst α_2 bestimmt ist. Ersetzt man noch den Wirbel mit Spannschnur durch eine Rolle mit Zugschnur und belastet diese bis zum neuerlichen

Einspielen des Ringes, so hat man in dem erforderlichen Gewichte die Grösse von P_1.

Hat man etwa $R = 400$ g und $\alpha_1 = 30^0$ gewählt, so ergeben sich

1) für $P_2 = 300$ g je 2 Werte für α_2 und P_1;

2) für $P_2 = 200$ g $\alpha_2 = 60^0$ $(\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0)$ und $P_1 = 200\sqrt{3}$ g,

während 3) für $P_2 < 200$ g die Einstellung des Ringes unmöglich wird,

und 4) für $P_2 > 400$ g nur eine Richtung für P_2, also nur ein Wert für α_2 und demgemäss auch für P_1 gefunden werden kann.

II. Resultante dreier Kräfte in einer Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkt. Versuche mit mehreren zu vereinigenden Kräften haben lediglich den Zweck, die üblichen Methoden zur Bestimmung ihrer Resultante zu illustrieren. Man bringt 2 Schieber mit Wirbeln und Tarierdrähten links in der Mitte und unten in der Mitte an, ferner 3 Schieber mit Rollen und Zugschnüren in den für die 3 Kräfte gewünschten Richtungen, etwa bez. rechts unten, oben rechts und oben links, und hängt die Drähte und Schnüre in den Ring ein; sodann belastet man die Schnüre mit den gewählten Kraftgewichten, etwa $P_1 = 400$ g, $P_2 = 300$ g und $P_3 = 500$ g und tariert. Um nun zunächst die Methode der successiven Vereinigung zu illustrieren, entfernt man zuerst nur P_1 und P_2 und bestimmt in der schon dargestellten Art Richtung und Grösse von R_1 so, dass der Ring wieder einspielt: P_1 und P_2 sind durch R_1 vollständig ersetzt. Sodann entfernt man R_1 und P_3 und bestimmt wie oben Richtung und Grösse von R so, dass der Ring neuerdings einspielt; dann ist R die Ersatzkraft für R_1 und P_3, somit auch für P_1, P_2 und P_3. Die Hilfsparallelogramme werden jedesmal gezeichnet und die Zeichnung schliesslich auf das Kräftepolygon reduziert.

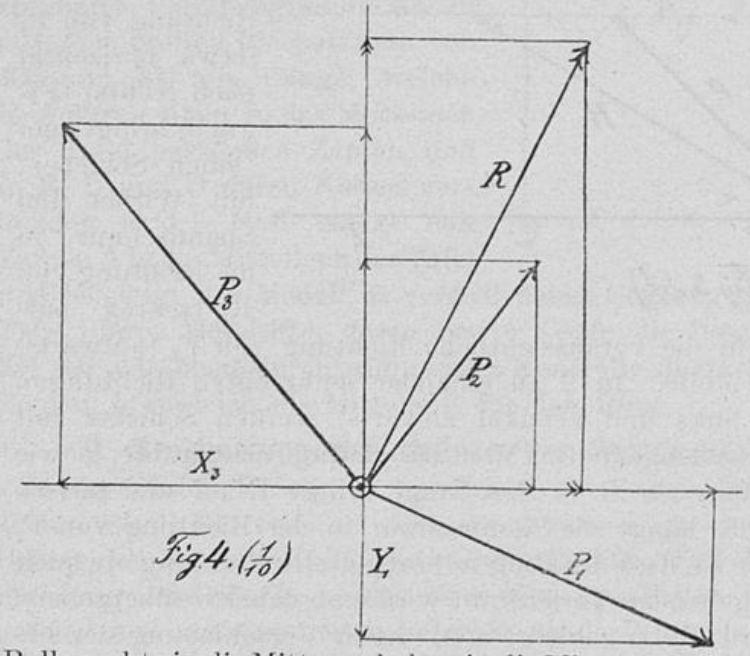


Fig. 4. $(\frac{1}{10})$

Zur Erläuterung der Methode der Zerlegung in rechtwinkelige Komponenten liest man an der Einteilung der Tafel die horizontalen Komponenten X_1, X_2, X_3 und die vertikalen Komponenten Y_1, Y_2 und Y_3 direkt ab (Figur 4) und bestimmt durch Rechnung $X = \Sigma(X)$ und $Y = \Sigma'(Y)$. Sodann entfernt man P_1, P_2 und P_3, stellt je eine Rolle rechts in die Mitte und oben in die Mitte und zeigt, dass die berechneten Kräfte X und Y den Ring zum Einspielen bringen. Schliesslich bestimmt man wie oben Richtung und Grösse der Ersatzkraft R für X und Y.

12. Kräfte in einer Ebene mit verschiedenen Angriffspunkten.

Ausrüstung der Tafel: Mittelstift und Seitenstift (in 40 cm Entfernung) rechts; als Angriffskörper das ebene dünne Brettchen (50/40 cm) mit 2 Ringösen (6 b); 1 Schieber mit Wirbel und Tarierdraht oben in der Mitte, 1 desgleichen oben rechts (vertikal über dem Seitenstift), 1 dritter Schieber mit Wirbel und Tarierdraht links in der Mitte; 3 Schieber mit Rollen unten und zwar in der Mitte, sowie rechts und links (eventuell rechts und links unten).

Die Ösen des Angriffsbrettchens werden über die Tragstifte gehängt (Fig. 5) und zunächst mit den oberen Tarierdrähten in Verbindung gebracht; durch Handhabung der betreffenden Wirbel kann bei richtiger Stellung derselben das Gewicht des Brettchens so tariert werden, dass beide Ringösen einspielen. Die Angriffspunkte der Kräfte werden durch dünne Messingstifte dargestellt, welche in zuvor geschlagene Löcher des Brettchens eingedrückt werden. Hängt man eine Zugschnur über einen solchen an ganz beliebiger Stelle A eingesteckten Stift, führt dieselbe über die Rolle unten rechts und belastet sie mit einem beliebigen Gewichte (P = 300 g), so legen sich die Ringe nach unten und rechts an und man muss, um dieselben wieder zum Einspielen zu bringen, vor allem die Spannung der oberen Tarierdrähte verstärken, ausserdem aber mit Hilfe des von links in den nächsten Ring eingehängten 3. Tarierdrahtes einen Zug nach links erzeugen. Um die Einstellung der 3 Tarierdrähte nacheinander bequem auszuführen, wird ein passender Kork, welcher längs seiner Achse genügend weit durchbohrt ist, jeweils in einen der Ringe geschoben und auf den Tragstift gesteckt, so dass dieser Ring keinen Spielraum mehr hat.

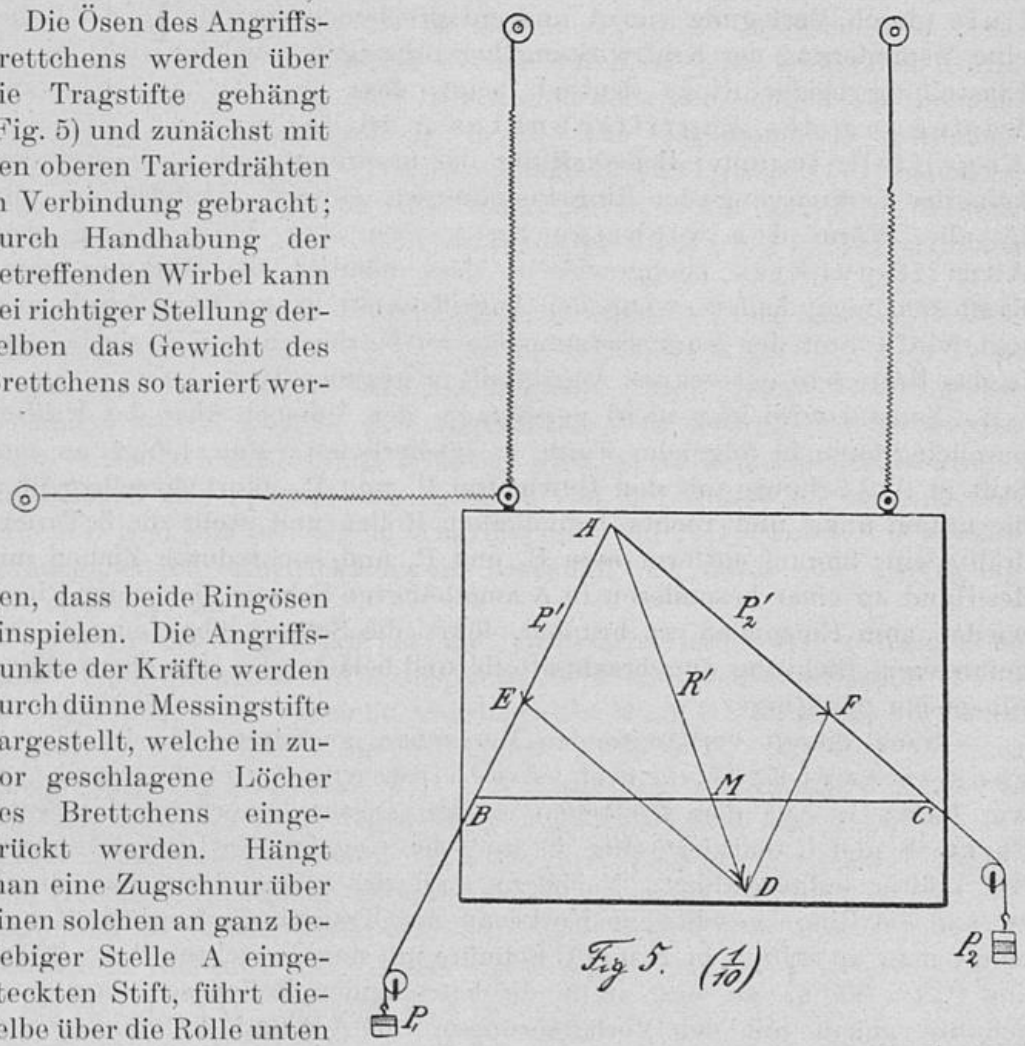


Fig. 5. (1/10)

Eine einfache Überlegung zeigt, dass mittels zweier vertikalen (aufwärts oder abwärts) und eines horizontalen (links oder rechts) Tarierdrahtes von hinreichender Tragkraft das Gewicht des Brettchens und zugleich die Wirkung einer oder mehrerer in der Ebene desselben wirkenden Kräfte unter allen Umständen tariert werden kann.

Man zeigt nun zunächst, dass jede Änderung der Belastung P, jede Verschiebung der Rolle, d. h. jede Drehung der Angriffslinie um A, endlich jede Parallelverschiebung der Angriffslinie (durch Verlegung von A und entsprechende Verstellung der Rolle) eine Veränderung der Kraftwirkung hervorbringen, welche sich an der Einstellung beider Ringe deutlich zeigt, dass dagegen bei blosser Verlegung des Angriffspunktes A in der ursprünglichen Angriffslinie (unter Beibehaltung der ursprünglichen Rollenstellung) keinerlei Veränderung der Ringeinstellungen eintritt. Dadurch ist nun in aller Form der wichtige Satz von der Verlegung des Angriffspunktes nachgewiesen, dass nämlich die Wirkung einer Kraft sich nicht ändert, wenn der Angriffspunkt in der Angriffslinie verlegt wird (unter der Voraussetzung starrer Verbindung, wie sie bei den in das Brettchen gesteckten Angriffstiften gegeben ist).

Sodann wird man nicht versäumen, den Versuch über das Kräfteparallelogramm in folgender Form zu wiederholen: Man hängt an den Stift in A 2 Schnüre mit den Gewichten P_1 und P_2, führt dieselben über die unten links und rechts befindlichen Rollen und stellt die 3 Tarierdrähte ein; hierauf entfernt man P_1 und P_2 und sucht durch Ziehen mit der Hand an einer besonderen in A angehängten Schnur die beiden Ringe wieder zum Einspielen zu bringen, führt die Schnur über eine in der gefundenen Richtung angebrachte Rolle und belastet bis zum abermaligen Einspielen der Ringe.

Nach diesen vorbereitenden Versuchen gestaltet sich der Übergang zu zwei Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten wie folgt: 1. Auf dem Brettchen werden ausser A noch zwei weitere Punkte B und C markiert (Fig. 5) und die Geraden AB und AC sowie BC kräftig aufgezeichnet. Nachdem man das ganze Brettchen durch zwei in die Ringe geschobene Korke an den Tragstiften festgestellt hat, hängt man an Stiften in B und C Schnüre mit den Gewichten P_1 (= 200 g) und P_2 (= 300 g) an und stellt die betreffenden Rollen so, dass diese Schnüre genau mit den Verlängerungen von AB und AC zusammenfallen: P_1 in B und P_2 in C sind die gegebenen Kräfte, deren Resultante zu bestimmen ist.

2. Man entfernt zunächst den Kork aus dem Ringe rechts und bringt diesen Ring mittels seines Tarierdrahtes zum Einspielen; dann setzt man diesen Kork wieder ein, entfernt den anderen und stellt den Tarierdraht links oben ein; endlich entfernt man beide Korke und spannt noch den seitlichen Tarierdraht links, eventuell unter nachträglicher Verbesserung der Einstellung der oberen Drähte. An den so gewonnenen Einstellungen wird im folgenden keine Änderung mehr vorgenommen; man kann sie beliebig lange (um Tage und Wochen) vor der betreffenden

Unterrichtstunde ausführen, sie beliebig lange an der Tafel belassen und hat dann bei Bedarf nur die minimalen Nachdehnungen der Drähte zu korrigieren.

3. An diese Einstellung schliesst sich die experimentelle Deduktion: Wie bereits bekannt, ändert sich die Wirkung von P_1 nicht bei Zurückverlegung des Angriffspunktes von B nach A; die Operation wird ausgeführt und liefert die Bestätigung. In derselben Weise wird der Angriffspunkt von P_2 von C nach A verlegt; es zeigt sich an den Ringen keine Änderung. P_1 in B und P_2 in C konnten also ohne Änderung der Wirkung ersetzt werden durch die jetzt wirkenden Kräfte P_1' und P_2' in A. Diese aber liefern eine nach dem obigen Vorversuche zu bestimmende Resultante R′ in A. Die experimentell gefundene Richtung und Grösse von R′ wird auf dem Brettchen durch AD markiert, ebenso P_1' durch AE auf AB und P_2' durch AF auf AC. Wie zu erwarten war und durch die Figur bestätigt wird, ist AD Diagonale aus AE und AF.

In dieser Kraft R′ in A, dargestellt durch AD, ist nun eine Ersatzkraft gefunden zunächst für P_1' und P_2' in A, damit aber auch für P_1 in B und P_2 in C. Da aber der Angriffspunkt von R′ (ohne Änderung der Wirkung) von A weg in der Angriffslinie AD beliebig verlegt werden kann, was durch Ausführung bestätigt wird, so ist die gesuchte Resultante aus P_1 in B und P_2 in C eine Kraft R von der Grösse R′, der Angriffslinie AD und mit beliebigem Angriffspunkt auf AD, wobei AD gemäss vorausgehenden Entwickelungen bestimmt ist durch die Bedingung $P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2$.

Wird der Angriffskörper auf die starre Gerade BC reduziert, so existiert als brauchbarer Angriffspunkt für R nur der Schnittpunkt M von AD und BC; dieser spezielle Angriffspunkt M auf BC ist somit als Punkt von AD definiert durch die Bedingung $P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2$. Man zeichnet demgemäss noch die Arme $MG \perp AB$ und $MH \perp AC$, misst $MG = a_1$ und $MH = a_2$ und weist nach, dass obige Bedingung für M wirklich erfüllt ist. Schliesslich könnte man für eine beliebige Wahl von B und C (BC = a cm) und beliebige Winkel β und γ gemäss jener Bedingung die Lage von M direkt berechnen und mit Benützung des so gefundenen Punktes M Richtung und Grösse von R experimentell bestimmen: R fällt in die Gerade AM und wird $= \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 \cdot P_2 \cdot \cos \alpha}$.

Als sehr bequemes Beispiel empfiehlt es sich zu $P_1 = 200$ g und $P_2 = 300$ g die Richtungen von AB und AC so aufzuzeichnen, dass $\sphericalangle BAC = \alpha = 75^1/_2{}^0$; dann wird $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ und demgemäss

$$R = 100 \sqrt{4 + 9 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4}} = 400 \text{ g.}$$

Man wird zur Abschliessung dieser Versuche nicht versäumen, durch Ziehen mit der Hand an einer Schnur, die an den verschiedensten Punkten des Brettchens angehängt wird, zu zeigen, dass die Einstellung beider Ringe nur möglich ist durch eine Kraft, deren Angriffspunkt in

AM liegt, und auch für eine solche Kraft nur dann, wenn ihre Angriffslinie in die Gerade AM fällt.

13. Übergang zu parallelen Kräften. Auf der Rückseite des bisher benützten Brettchens werden um den Schnittpunkt M der Diagonalen konzentrische Kreise von 1 cm Abstand beschrieben (Figur 6) und die Kreise mit den Radien 5, 10 . . . cm so kräftig gezeichnet, dass sie auch aus grosser Entfernung noch gut sichtbar sind. Streifen aus Karton oder Blech von 1 cm Breite mit kräftig aufgezeichneten Mittellinien werden rechtwinkelig zur Form eines **T** mit einander verbunden und dienen zur Veranschaulichung der Kräfte und ihrer Arme (Abstände von M). Man wählt etwa einen Querstreifen von 300 mm Länge mit einem rechtwinkeligen Ansatz von 16 cm Länge zur Darstellung der Kraft $P_1 = 300$ g und ihres Armes $a_1 = 16$ cm, einen anderen Streifen von 200 mm Länge mit einem 24 cm langen Ansatz zur Darstellung der Kraft $P_2 = 200$ g mit dem Arme $a_2 = 24$ cm. Die Längen der Querstreifen werden nach der Mittellinie, die der Ansatzstreifen von der Mittellinie des betreffenden Querstreifens bis zu den markierten Punkten M_1 und M_2 ihrer Mittellinien gemessen. Durch einen kleinen Nagel werden die Streifen mit den Punkten M_1 und M_2 in der Mitte M des Brettchens befestigt, so dass die Mittellinien der Querstreifen (für jede beliebige Stellung) als Tangenten der Kreise mit den Radien 16 und 24 cm erscheinen. Auf den Mittellinien der Querstreifen werden dann noch beliebige Punkte B und C markiert; in B und C eingeschlagene kleine Nägel dienen zur Fixierung der Kraftmodelle auf dem Brettchen und zugleich als Angriffspunkte der wirklichen Kräfte.

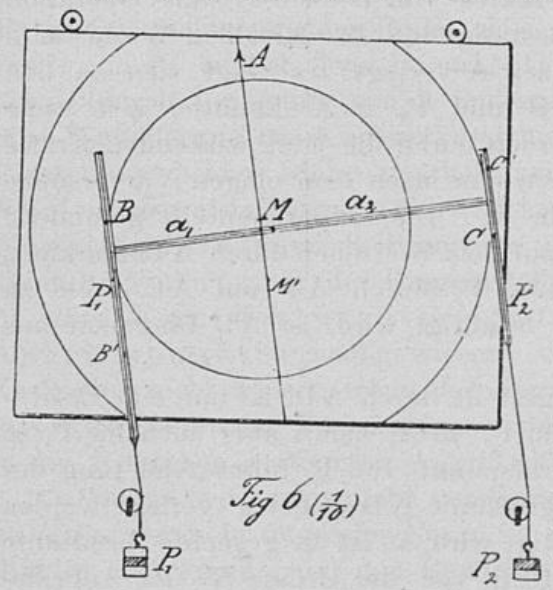


Fig 6 ($\frac{1}{10}$)

Für die so dargestellten Kräfte P_1 und P_2 ist nun, welche Stellung man auch den Streifen gegeben haben mag und noch geben mag, der Punkt M ein Punkt der Angriffslinie ihrer Resultante, da ja $P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2$. Zur experimentellen Bestätigung hängt man (unter vorübergehender Fixierung der Ringe durch eingeschobene Korke) zwei mit P_1 und P_2 belastete Schnüre an die Stifte in B und C, führt diese über Rollen und stellt letztere so ein, dass die Schnüre die Mittellinien der betreffenden Querstreifen decken. Dann wird in der oben beschriebenen Weise tariert und nach Entfernung von P_1 und P_2 (aber unter Belassung der Modelle) durch Ziehen mit der Hand an einer in M angehängten Schnur gezeigt, dass bei passender Wahl der Richtung und Stärke dieses Zuges die gleichzeitige Einstellung beider Ringe möglich ist, dass also M in der That der

Angriffslinie von R angehört. Man fasst dabei zugleich den auf der Tafel zu bezeichnenden Schnittpunkt A der Richtungen von P_1 und P_2 ins Auge und überzeugt sich, dass die durch den Versuch erhaltene Richtung von R in die Gerade A M fällt. Durch blosse Markierung weiterer Versuche für beliebige Drehung des einen T-Streifens (P_2, a_2) um M lässt sich dann erkennen, wie sich bei dieser Drehung die Lage von A, also die Richtung von R, und zugleich die Grösse von R ändert (letzteres durch Andeutung der Hilfsparallelogramme bez. der Kräftedreiecke).

Dreht man nun (P_2, a_2) um M zunächst so, dass $\sphericalangle$ (a_1, a_2) immer grösser, also $\sphericalangle$ (P_1, P_2) immer kleiner wird, so bleibt in Bezug auf M stets: $P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2$, mithin hört M nicht auf, ein Punkt der Angriffslinie von R zu sein. Wird schliesslich $P_1 \parallel P_2$, so hat man folgende Beziehungen:

1) a_1 und a_2 fallen in eine Gerade und $a_1 + a_2$ wird Abstand zwischen P_1 und P_2;

2) A rückt auf der Angriffsgeraden von P_1 ins Unendliche, d. h. die Gerade M A, in welcher die Angriffslinie von R stets liegt, wird schliesslich $\parallel P_1$ (und P_2);

3) die Konstruktion des Kräftedreiecks liefert $R = P_1 + P_2$.

Zur Veranschaulichung dieser Deduktionen dienen folgende Operationen: Zu 1) wird der 2. T-Streifen in die betreffende Stellung gebracht und in C festgenagelt. Zu 2) werden die wirklichen Kräfte $P_1 = 300$ g und $P_2 = 200$ g in B und C angebracht und tariert; hierauf wird mit Benützung von M als Angriffspunkt mittels Handschnur die Richtung von R wirklich bestimmt. Zu 3) wird die Schnur über eine in die gefundene Richtung gestellte Rolle geführt und bis zum Einspielen der beiden Ringe belastet. Endlich wird noch der Angriffspunkt der gefundenen Resultante R von M weg in der zuvor erhaltenen und markierten Angriffslinie von R beliebig verlegt: Jeder Punkt dieser Angriffslinie kann als Angriffspunkt von R dienen.

Der so deduzierte Satz für die Resultante zweier gleichsinnig parallelen Kräfte P_1 und P_2 lässt sich dahin zusammenfassen, dass

1) $R \parallel P_1$ (und P_2),

2) $R = P_1 + P_2$, und dass

3) R den Abstand zwischen P_1 und P_2 innerlich im umgekehrten Verhältnis der Kräfte teilt.

Wird der Angriffskörper auf die (im übrigen beliebige) starre Gerade B C reduziert, so bleibt als brauchbarer Angriffspunkt nur der Schnittpunkt M′ von B C mit der Parallelen durch M zu P_1 (und P_2). Auch für M′ ist $a_1 : a_2 = P_2 : P_1$; da aber aus geometrischen Gründen $M'B : M'C = a_1 : a_2$, so kann M′ auf B C direkt bestimmt werden aus $M'B : M'C = P_2 : P_1$.

Man wird daher noch für 2 beliebige, durch kleine Nägel markierte Punkte B′ und C′ des Brettchens und 2 beliebige Kräfte P_1 und P_2 die Lage von M′ auf B′ C′ durch Rechnung bestimmen, die Kräfte P_1 und P_2 in beliebiger (durch 2 von B′ und C′ auslaufende parallele Strahlen markierter) Richtung wirklich anbringen und nach Tarierung derselben mit Benützung

des berechneten Punktes M′ Richtung und Grösse von R experimentell bestimmen: R wird parallel zu P_1 und $P_2 = P_1 + P_2$.

Verlegt man schliesslich B und C in den Richtungen von P_1 und P_2 so, dass BC sich um M′ dreht, was keine Änderung der für R wesentlichen Bestimmungselemente zur Folge hat, so erkennt man, dass die Lage von M′ unabhängig ist von den Winkeln β und γ ($= 180^0 - \beta$), dass also die Lage von M′ sich auch nicht ändern kann, wenn P_1 und P_2 um B und C gedreht werden: M′ ist Mittelpunkt der parallelen Kräfte für die Angriffspunkte B und C. Die experimentelle Ausführung der Drehung von P_1 und P_2 und B und C erfordert Verstellung der Rollen und Neutarierung und ist desshalb umständlich; man wird sie demgemäss bei fixierter Aufhängung des Brettchens lediglich markieren.

14. Übergang zu antiparallelen Kräften. Indem man die bisherige Ausrüstung der Tafel beibehält, dreht man (P_2, a_2) um M über die in Fig. 6 gezeichnete Stellung hinaus immer weiter (wobei fortgesetzt M ein Punkt der Angriffslinie von R bleibt), bis schliesslich P_2 antiparallel zu P_1 wird (Fig. 7). Dann gelten folgende Beziehungen:

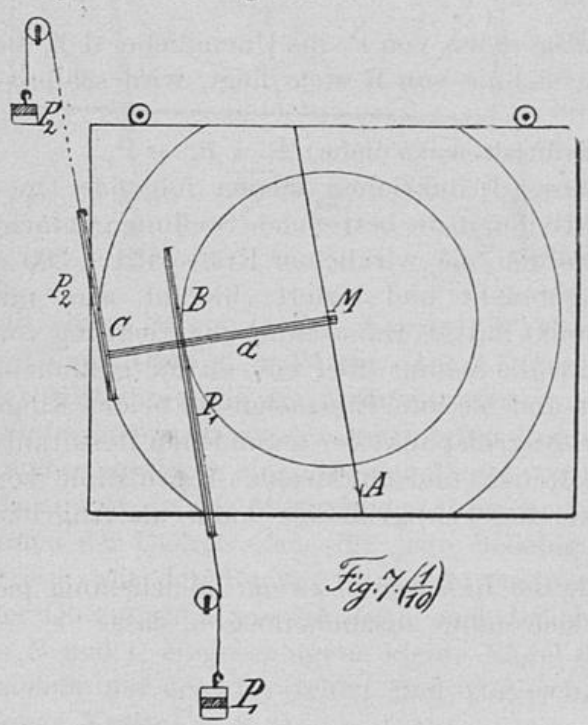


Fig. 7 (1/10)

1) a_1 und a_2 fallen in eine Gerade und $a_2 - a_1$ wird Abstand zwischen P_1 und P_2;

2) A rückt auf der Angriffslinie von P_1 zunächst herein und dann wieder ins Unendliche hinaus, so dass die Gerade MA, die Angriffslinie von R, zu P_1 parallel wird;

3) Die Konstruktion des Kräftedreiecks liefert zuletzt $R = P_1 - P_2$ und gleichsinnig mit P_1.

Die Markierung des Überganges und die wirkliche Ausführung des Versuches in seiner schliesslichen Form sind dem obigen analog: Die Rolle für P_1 bleibt in ihrer Stellung, während diejenige für P_2 zuletzt auf die obere Schiene nach links kommt.

Als Satz für die Resultante zweier gegensinnig parallelen Kräfte $P_1 > P_2$ hat man daher:

1) R ist parallel und gleichsinnig mit der grösseren Kraft P_1;

2) $R = P_1 - P_2$;

3) R teilt den Abstand zwischen P_1 und P_2 äusserlich im umgekehrten Verhältnis dieser Kräfte.

Im übrigen gelten die für gleichsinnig parallele Kräfte gemachten Bemerkungen auch hier.

15. Vereinfachung der Versuche über parallele Kräfte. Da nach dem Vorausgehenden die absolute Richtung von P_1 und P_2 unwesentlich ist, so kann man zur Vereinfachung weiterer Versuche, ohne der Allgemeinheit derselben Eintrag zu thun,

1. die Kräfte vertikal abwärts wählen: dann fällt die Benützung der Richtungsrollen, sowie die seitliche Tarierung weg;

2. alle Angriffspunkte in eine Gerade verlegen: dann genügt statt des Brettchens eine gerade Stange. Demgemäss besteht für die folgenden Versuche die Ausrüstung der Tafel aus 2 Tragstiften, welche auf der horizontalen Mittellinie der Tafel, je 40 cm von deren Mitte entfernt, eingesteckt werden, aus 2 Schiebern mit Wirbel und Tarierdraht, welche oben vertikal über den Tragstiften (also 80 cm von einander entfernt) anzubringen sind, und aus dem Masstabe (6 c) als Angriffskörper. Die Ringösen desselben sind so zu befestigen, dass die Ringmitten 80 cm Entfernung haben, also z. B. mit den Teilstrichen 10 cm und 90 cm zusammenfallen. Zur bequemen Anbringung der Kräfte dienen Schleifen aus starker weisser Schnur von 8 bis 10 cm Weite, welche in der nötigen Anzahl über den Stab gestreift und nach Bedürfnis auf demselben verschoben werden. Das Gewicht dieser Schleifen wird mit dem Stabe tariert, kann aber im Übrigen ohne weiteres vernachlässigt werden.

Des Zusammenhanges wegen wird man einen das Vorausgehende illustrierenden Versuch mit Benützung des neuen Angriffskörpers in folgender Weise ausführen: Nachdem die Ringösen des Stabes über die Tragstifte gehängt und mit den Tarierdrähten in Verbindung gebracht sind, werden 2 beliebige Gewichte P_1 und P_2 in ganz beliebigen Punkten B und C des Stabes angehängt (Fig. 8). Man wählt von jetzt an die P

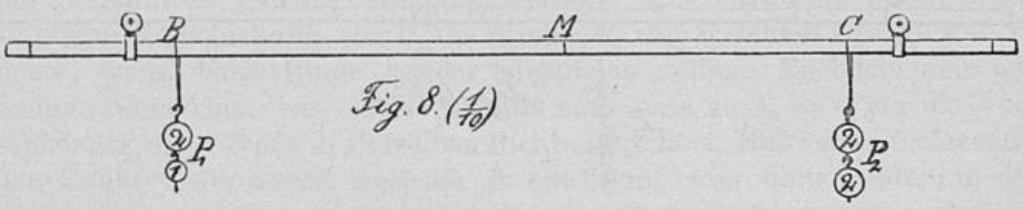


Fig. 8. (1/10)

möglichst gross; um innerhalb recht weiter Grenzen noch tarieren zu können, verwendet man lieber je 2 parallel geschaltete gleichlange Tarierdrähte: die kleinen Ösen an den einen Enden werden miteinander an die Spannschnur des Wirbels gebunden und die Ösen an den anderen Enden durch ein gemeinsames Drahthäkchen vereinigt. Auch die Entfernung BC nimmt man recht gross und am bequemsten für die auszuführenden Rechnungsoperationen so, dass die Masszahl der Strecke BC in einfacher Beziehung zur Masszahl von $(P_1 + P_2)$ steht.

Das Gewicht des Stabes mit den angebrachten Gewichten P_1 und P_2 wird tariert, so dass beide Ringe einspielen. (Wenn es sich wie hier um genaue Einstellung handelt, bringt man das Auge in die Achse des Tragstiftes, so dass dasselbe nur die kreisförmige Endfläche des Stiftes sieht; die Übereinstimmung der Ringmitte mit der Achse des Stiftes lässt sich so auf weniger als $^1/_2$ mm garantieren.) Man entfernt nun P_1

und P_2 unter Belassung ihrer Aufhängschleifen, zieht an einer passend hängenden Schleife mit der Hand vertikal abwärts (jede Abweichung von dieser Richtung hat seitliche Verschiebung der Ringe zur Folge) und erhält unter Verschiebung der Zugschleife sehr rasch den Punkt M, an welchem gezogen werden muss, wenn beide Ringe einspielen sollen: den Angriffspunkt der Resultante. Die Belastung der in M hängenden Schleife bis zum Einspielen der Ringe liefert dann die Grösse von R.

Die Resultate für M und R stimmen (wie überhaupt immer, wenn Richtungsrollen nicht zur Verwendung kommen) bei einiger Sorgfalt ausserordentlich genau mit dem betreffenden Gesetze überein. Es dürfte kaum eine gleich einfache und bequem zu handhabende Versuchsanordnung geben, welche gestattet, irgend eine physikalische Aufgabe mit gleicher Raschheit und Exaktheit rein experimentell (d. h. ohne provisorische Vorausberechnung der gesuchten Grössen) zu lösen.

Die Durchführung eines Versuches mit 2 antiparallelen Kräften bedarf hiernach wohl keiner weiteren Besprechung. P_1 wird an beliebiger Stelle B angehängt, an eine nach C verschobene Schleife hängt man zunächst die mit P_2 belastete Zugschnur und führt sie über eine Rolle der oberen Schiene, so dass die Schleife an der unteren Stabfläche anliegt und nach oben gespannt ist (Fig. 9). Man wird die grössere Kraft P_1

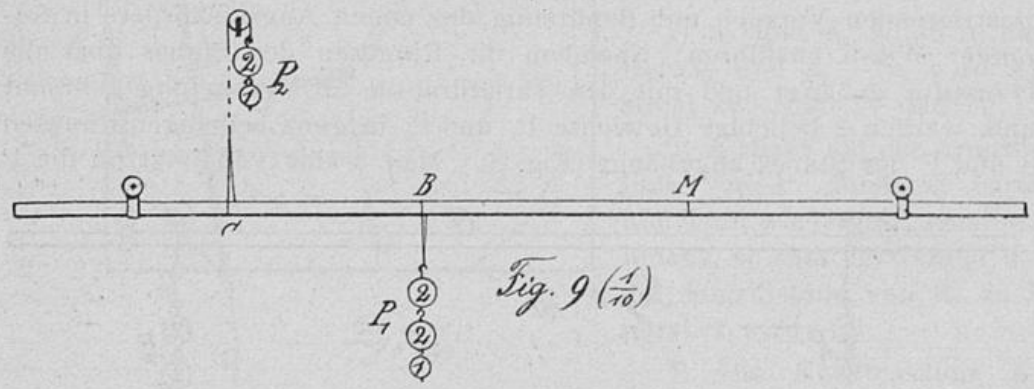


Fig. 9 ($\frac{1}{10}$)

vertikal abwärts wählen, um nicht R nach oben über eine Rolle führen zu müssen, und mit Rücksicht auf die äussere Lage von M dafür sorgen, dass die Strecke BC klein ist und zur Masszahl von $P_1 - P_2$ passt.

16. Direkte Entwickelung des Satzes über die Resultante zweier parallelen oder antiparallelen Kräfte. Die bequeme Handhabung und das exakte Funktionieren der zuletzt behandelten Versuchsanordnung gestatten, die im vorausgehenden auf deduktivem Wege gewonnenen Gesetze für parallele Kräfte für sich zu induzieren. Diese Methode dürfte für einen Anfangskurs, also z. B. für den 4. Kurs unserer Realschulen, vorzuziehen sein und soll daher hier eingeschaltet werden.

Man hängt an den Stab etwa die Gewichte $P_1 = 300$ g im Punkt 15 (B) und $P_2 = 400$ g im Punkte 85 (C) der cm-Teilung auf (Fig. 8) und tariert bis zum Einspielen der Ringe. Es soll die Frage untersucht werden: Welche gleichzeitige Verlegung von B und C ist erforderlich, damit die

Gesamtwirkung von P_1 und P_2 (d. h. die Einstellung der Ringe) keine Änderung erfährt?

Man verschiebt demgemäss zunächst B um eine beliebige Strecke a_1 nach B′, sodann C so, dass die Ringe wieder einspielen, und bestimmt $CC' = a_2$. Man erhält z. B. zu

$a_1 = 10$ cm vorwärts : $a_2 = 7{,}5$ cm rückwärts
$a_1 = 16$ cm vorwärts : $a_2 = 12$ cm rückwärts
$a_1 = 36$ cm vorwärts : $a_2 = 27$ cm rückwärts

und erkennt das Gesetz: $a_1 : a_2 = 4 : 3 = P_2 : P_1$. Rückt man also B schrittweise um je 4 cm vorwärts und C jedesmal um 3 cm rückwärts, so zeigen die Ringe keine Änderung ihrer Stellung, und B und C werden einander jedesmal um 7 cm genähert; nach 10maliger Ausführung der Verlegung von B und C — wobei natürlich einzelne Lagen übersprungen werden können — treffen B und C im Punkte 55 der Teilung (in M) zusammen, und P_2 muss unter P_1 gehängt werden, so dass beide zusammen die Kraft $P_1 + P_2$ darstellen. Es ist somit gefunden: P_1 in B (15) und P_2 in C (85) können ersetzt werden durch $(P_1 + P_2)$ in demjenigen Punkte M (55), welcher die Strecke BC innerlich im umgekehrten Verhältnis der Kräfte P_1 und P_2 teilt.

Gerade so einfach gestaltet sich die experimentelle Herleitung des Satzes für 2 antiparallele Kräfte. Man wählt etwa $P_1 = 500$ g vertikal abwärts im Punkte 40 (B) und $P_2 = 300$ g im Punkte 20 (C) der cm-Teilung und zwar letztere Kraft durch Vermittelung einer Rolle vertikal aufwärts (Fig. 9). Der bequemeren Ausführung wegen verschiebt man hier zunächst jedesmal P_2, indem man die Rolle für P_2 und den Angriffspunkt C um die gleiche Strecke a_2 verlegt, und bestimmt durch nachträgliche Verschiebung von P_1 die Strecke a_1, um welche B verlegt werden muss, wenn beide Ringe wieder einspielen sollen. Nachdem man aus einigen Versuchen wie oben erkannt hat, dass zu $a_2 = 5$ cm die Verschiebung $a_1 = 3$ cm in derselben Richtung gehört, rückt man fortgesetzt den Punkt C um 5 und zugleich B um 3 cm, was ohne Änderung der Ringstellungen, also ohne Änderung der Gesamtwirkung von P_1 und P_2 eine jedesmalige Annäherung der Punkte B und C um 2 cm zur Folge hat. Nach 10maliger Verschiebung holt also C den Punkt B im Punkte 70 (M) ein, und die Kräfte P_1 und P_2 fallen in entgegengesetzter Richtung in die durch M gelegte Vertikale, so dass sie durch $(P_1 - P_2)$ ersetzt werden können. Somit ist induziert: P_1 in B (40) vertikal abwärts und P_2 in C (20) vertikal aufwärts können ersetzt werden durch $(P_1 - P_2)$ in einem Punkte M (70), durch welchen die Strecke BC äusserlich im umgekehrten Verhältnis der P geteilt wird, wobei die Richtung von $(P_1 - P_2)$ mit derjenigen der grösseren Kraft P_1 übereinstimmt.

Die Verallgemeinerung der gewonnenen Beziehungen, sowie die Bestätigung derselben durch weitere Versuche kann hier übergangen werden.

Durch das Vorausgehende ist nun auch angedeutet, wie sich die experimentelle Zerlegung einer Kraft R in zwei parallele oder antiparallele Komponenten gestaltet: sie erscheint in allen Einzelheiten

der auszuführenden Operationen als eine wirkliche Umkehrung der gerade behandelten Zusammensetzung.

17. Versuche über mehrere parallele Kräfte in einer Ebene dienen als Erläuterung der üblichen Methoden zur Bestimmung ihrer Resultante. Es seien P_1, P_2, P_3 und P_4 die vorgelegten Kräfte, A_1, A_2, A_3 und A_4 ihre in eine zu den P senkrechte Gerade verlegten Angriffspunkte. Zunächst werden die P durch Gewichte, die in den Punkten A des Stabes angehängt werden, wirklich dargestellt; man habe etwa (Fig. 10)

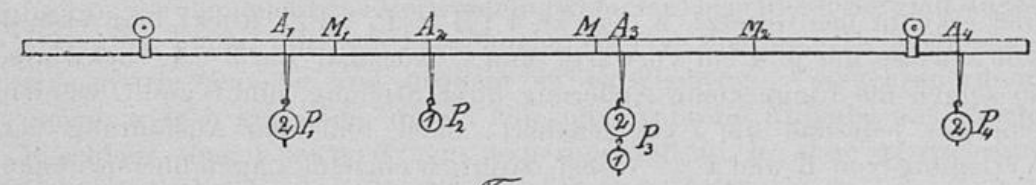


Fig. 10 $(\frac{1}{10})$

$P_1 = 200$ g, A_1 im Punkte 25 der Teilung
$P_2 = 100$ g, A_2 „ „ 40 „ „
$P_3 = 300$ g, A_3 „ „ 60 „ „
$P_4 = 200$ g, A_4 „ „ 95 „ „

Die Buchstaben werden über den betreffenden Punkten des Stabes deutlich an die Tafel geschrieben. Hierauf wird die definitive Tarierung vorgenommen.

Soll nun die Methode der successiven Vereinigung illustriert werden, etwa nach dem Schema:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}P_1 \text{ in } A_1\\ P_2 \text{ in } A_2\end{array}\right\} R_1 \text{ in } M_1\\ \left.\begin{array}{l}P_3 \text{ in } A_3\\ P_4 \text{ in } A_4\end{array}\right\} R_2 \text{ in } M_2\end{array}\right\} R \text{ in } M,$$

so entfernt man zunächst P_1 und P_2, bestimmt auf experimentellem Wege nach dem schon beschriebenen Verfahren M_1 und R_1 und ersetzt P_1 und P_2 wirklich durch R_1 (hier 300 g in Punkt 30 der cm-Teilung). Sodann entfernt man P_3 und P_4 und ersetzt sie durch R_2 (hier 500 g im Punkte 74 der Teilung). Endlich entfernt man R_1 und R_2, sucht M und R und ersetzt abermals: hier müsste man erhalten $R = 800$ g im Punkte 57,5 der Teilung.

Die Lage von M ist nach dem Vorausgehenden unabhängig von der Richtung der P (bez. der Richtung der Geraden A_1 A_4) in der Ebene derselben: M heisst daher Mittelpunkt der P für die Angriffspunkte A_1, A_2, A_3, A_4. Die Ausführung des Versuches für andere Richtung der P erfordert die Anwendung von Richtungsrollen und seitliche Tarierung und ist desshalb umständlich; man wird sich also mit der Markierung eines Versuches begnügen.

Die Durchführung desselben Beispiels nach einem beliebigen anderen Schema zeigt, dass man nach dieser Methode für 4 Komponenten stets 3 Zusammensetzungen von je 2 Kräften vorzunehmen hat.

Schliesslich wird man nach Wiederherstellung der ursprünglichen Aufgabe und Kontrolle der Tarierung sämtliche P auf einmal entfernen und die Gesamtresultante R direkt bestimmen, was keinen grösseren Zeitaufwand erfordert als die Bestimmung einer Partialresultante.

Die Versuche gelingen mit grosser Exaktheit, wenn man die Tarierung mehrere Stunden (noch besser einen ganzen Tag) vor der Verwendung im Unterrichte vornimmt und unmittelbar vorher die durch kleine Nachdehnungen der Drähte veränderten Einstellungen der Ringe korrigiert.

Was die Methode des sogenannten Momentensatzes anlangt, so stellt sich die Herleitung desselben als rein mathematische Umgestaltung der ursprünglichen Form des Satzes für zwei parallele Kräfte dar; die physikalische Bedeutung der Momente tritt ja erst bei Untersuchung der Drehung um eine feste Achse hervor. Versuche können also hier lediglich den Zweck der experimentellen Bestätigung des für die praktische Anwendung so wichtigen Satzes haben. Gleichwohl gestaltet sich nicht blos die Herleitung des Satzes angesichts einer wirklichen, experimentell gestellten Aufgabe, sondern auch die Anwendung desselben auf eine solche ungleich anschaulicher, als wenn die Aufgabe blos zeichnerisch dargestellt, beziehungsweise nur in Zahlen notiert wird.

Bei der Anwendung auf die Lösung einer Aufgabe wird man jedenfalls einmal den Nullpunkt der Stabteilung, ausserdem aber noch einen beliebigen anderen Punkt, etwa den Punkt 50 der cm-Teilung, als Ursprung der Arme benützen.

Für den Nullpunkt als Ursprung ist das Schema der Rechnung für die oben benützte Aufgabe (Fig. 10):

$P_1 = 200$ g; $a_1 = 25$ cm	$P_1 a_1 = 5000$
$P_2 = 100$ g; $a_2 = 40$ cm	$P_2 a_2 = 4000$
$P_3 = 300$ g; $a_3 = 60$ cm	$P_3 a_3 = 18000$
$P_4 = 200$ g; $a_4 = 95$ cm	$P_4 a_4 = 19000$
$R = \Sigma(P) = 800$ g	$\Sigma(Pa) = 46000$

$$OM = a = \frac{\Sigma(Pa}{\Sigma(P)} = 57{,}5,$$ d. h. M liegt im Punkte 57,5 der cm-Teilung.

Zur Bestätigung werden alle P entfernt und durch R = 800 g in M (57,5) ersetzt: beide Ringe müssen einspielen.

Wählt man dagegen den Punkt 50 der Teilung als Ursprung der Arme, so ist das Rechenschema:

$P_1 = 200$ g; $a_1 = -25$ cm	$P_1 a_1 = -5000$
$P_2 = 100$ g; $a_2 = -10$ cm	$P_2 a_2 = -1000$
$P_3 = 300$ g; $a_3 = +10$ cm	$P_3 a_3 = +3000$
$P_4 = 200$ g; $a_4 = +45$ cm	$P_4 a_4 = +9000$
$R = \Sigma(P) = 800$ g	$\Sigma(Pa) = +6000$

$$OM = a = \frac{\Sigma(Pa)}{\Sigma(P)} = +7{,}5,$$ d. h. M. liegt wie oben im Punkt 57,5 der Teilung.

Bezüglich der analogen Behandlung von Aufgaben für den Fall, dass einzelne der P vertikal aufwärts wirken, sei nur bemerkt, dass man der Einfachheit wegen durch passende Verteilung der P dafür sorgen wird, eine abwärts gerichtete Resultante zu bekommen; mit Benützung der 3 Rollen lassen sich, ohne dass die Anordnung umständlich wird, 3 aufwärts und etwa 4 abwärts gerichtete Kräfte anbringen: die experimentelle Bestimmung der Resultante und die Bestätigung einer berechneten Resultante sind ja für n Kräfte nicht komplizierter als für 2. (Siehe Nr. 22.)

18. Parallele Kräfte im Raum. Auch bei parallelen Kräften, deren Angriffslinien nicht in einer Ebene liegen, handelt es sich nicht um experimentelle Deduktion neuer Gesetze, sondern nur um wiederholte Anwendung der für 2 parallele Kräfte geltenden Sätze, beziehungsweise um praktische Formulierung derselben; Versuche werden also auch hier nur angestellt zur Veranschaulichung der zur Bestimmung der Resultante und ihres Angriffspunktes benützten Methoden. Es seien P_1, P_2, P_3 und P_4 die gegebenen Kräfte und A_1, A_2, A_3 und A_4 ihre in eine zu den P senkrechte Ebene verlegten Angriffspunkte. Diese Ebene wird dargestellt durch das in Nr. 6 unter d aufgeführte Brettchen von 50 cm Länge und 30 cm Breite mit 3 losen Ringösen. Die 2 an der einen Längsseite befindlichen Ringösen werden an gewöhnliche, 40 cm von einander entfernte Tragstifte gehängt, während als Stütze für den in der Mitte der andern Längsseite angebrachten Ring ein 35 cm langer Tragstift dient. (Fig. 11.) Oberhalb eines jeden der drei Tragstifte wird ein Schieber mit Wirbel und Tarierdraht angebracht, wobei für den mittleren Wirbel statt des gewöhnlichen kurzen Zapfens ein solcher von 35 cm Länge zu wählen ist. Die Punkte A werden auf der unteren Fläche des Brettchens möglichst weit aussen so markiert, dass sie das unregelmässige Viereck A_1, A_2, A_3 und A_4 bilden. Sodann werden in diesen Punkten durch möglichst enge Löcher Schnüre von 30 cm Länge gezogen, welche mit Schleifen zum Anhängen der Gewichte versehen sind und durch nachträglich am oberen Ende hergestellte Knoten festgehalten werden.

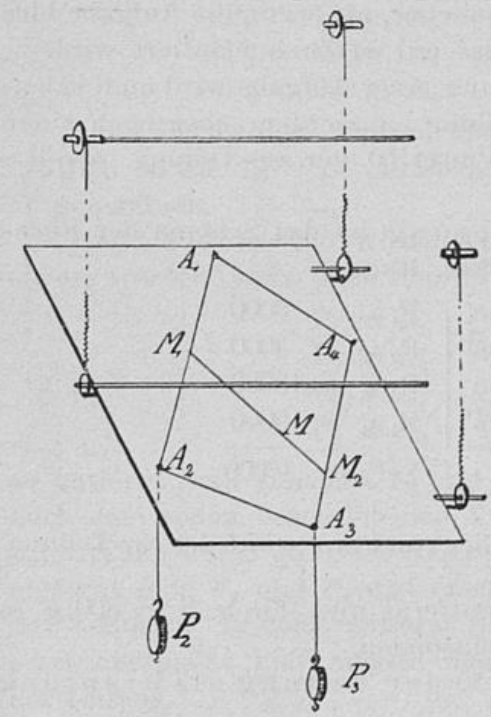


Fig. 11. $(\frac{1}{10})$

Soll nun die Methode der successiven Vereinigung erläutert werden, etwa nach dem Schema

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}P_1 \text{ in } A_1\\ P_2 \text{ in } A_2\end{array}\right\} R_1 \text{ in } M_1\\ \left.\begin{array}{l}P_3 \text{ in } A_3\\ P_4 \text{ in } A_4\end{array}\right\} R_2 \text{ in } M_2\end{array}\right\} R \text{ in } M,$$

so bleibt (falls die Vorrichtung nicht wesentlich komplizierter werden soll) nichts übrig, als die Punkte M_1 auf $A_1 A_2$, M_2 auf $A_3 A_4$ und M auf $M_1 M_2$ voraus zu markieren gemäss den Bedingungen:

$$M_1 A_1 : M_1 A_2 = P_2 : P_1$$
$$M_2 A_3 : M_2 A_4 = P_4 : P_3$$
$$\text{und } M M_1 : M M_2 = R_2 : R_1.$$

In den möglichst exakt angegebenen Punkten M_1, M_2 und M werden dann ebenfalls Aufhängschnüre durchgezogen und wie oben befestigt.

Dass die fertige Vorrichtung dann nur einem speziellen Zahlenbeispiel und nur dem gewählten Schema entspricht, thut ihrem Zwecke, Veranschaulichung der Methode, keinen Eintrag; eine Vorrichtung für allgemeine Aufgabenstellung müsste aus einem Stücke Drahtsieb bestehen, welches durch aufgelötete starke Eisendrähte versteift ist.

Nachdem man die P in den für sie bestimmten Punkten A angehängt hat, wird durch aufeinanderfolgende Handhabung der 3 Wirbel so tariert, dass die 3 Ringe einspielen; sodann entfernt man zunächst P_1 und P_2, bildet durch Untereinanderhängen $R_1 = P_1 + P_2$ und belastet damit die Schnur in M_1. Nachdem man ebenso P_3 und P_4 durch $R_2 = P_3 + P_4$ in M_2 ersetzt hat, entfernt man schliesslich R_1 und R_2, bildet durch Zusammenhängen $R = R_1 + R_2 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ und hängt R nach M. Die Bestätigung für die Richtigkeit der Methode wird geliefert durch das jedesmalige Einspielen der 3 Ringe.

Angesichts der Versuchsanordnung lässt sich nun deduzieren: Bei Bestimmung der Partialresultanten R_1 und R_2, und der Gesamtresultante R, sowie der Punkte M_1, M_2 und M erscheint die Stellung der „Angriffsebene", sowie die Richtung der P im Raum nicht als wesentliches Element; daher kann die Lage von M (und die Grösse von R) sich nicht ändern, wenn die Richtung der P oder die Stellung jener Ebene geändert wird. Die Änderung der Stellung lässt sich aber ohne weiteres vornehmen, indem man entweder die Ringöse an der Vorderkante des Brettchens durch ein Stück steifen Drahtes mit Haken und Ring verlängert oder den zugehörigen Tragstift um einige cm höher steckt, was freilich ein besonderes Loch in der Tafel verlangt, aber den Vorzug hat, dass die untere Fläche des Brettchens mit der Zeichnung des Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ sichtbar wird. Abgesehen von einer geringen Zurückschiebung des mittleren Wirbels auf seinem langen Zapfen (und Neueinstellung desselben) ist keine weitere Veränderung erforderlich.

Schliesslich wird man noch das Brettchen vertikal herabhängen lassen, indem man den mittleren Tragstift ganz entfernt; dabei ist natürlich Umwenden des Brettchens notwendig, damit die Aufhängschnüre und die Zeichnung sichtbar werden.

Die für die beiden neuen Stellungen wie oben ausgeführten Operationen zeigen, dass die Lage von M (und die Grösse von R) sich in der That nicht ändert, dass also die Lage von M zum Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$ nur durch die Grösse (und das Vorzeichen) der P bedingt ist, und dass deshalb für den Punkt M die Bezeichnung: Mittelpunkt der Parallelkräfte berechtigt ist.

19. Anwendung der Koordinaten-Methode. Das Vorausgehende bildet zugleich den Übergang zur experimentellen Erläuterung der Koordinatenmethode. Das Brettchen in der vorigen Ausrüstung (Fig. 12) kann hier ohne weiteres verwendet werden, wenn die Zeichnungsfläche statt mit gewöhnlichem mit Koordinatenpapier so überzogen wird, dass bei vertikal herabhängendem Brettchen die Verbindungslinie der Ringmittelpunkte dem einen Systeme der Teilungslinien genau parallel ist. Ausserdem versieht man auch die bei gewöhnlicher Aufhängung rechts befindliche Seitenlinie mit Ringösen; als solche sind gewöhnliche Ringschrauben mit losen Ringen zu empfehlen, die leicht so anzubringen sind, dass die Verbindungslinie der Ringmittelpunkte zu dem 2. Systeme der Teilungslinien parallel wird. Die unterste Haupt-Teilungslinie und die äusserste links (bei gewöhnlicher Aufhängung des Brettchens) werden als Abscissen- und Ordinatenachse kräftig aufgezeichnet und beziffert.

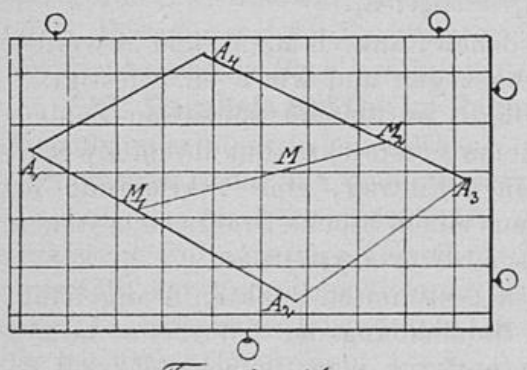


Fig. 12. ($\frac{1}{10}$)

Nachdem im vorausgehenden gezeigt worden, dass die Lage von M unabhängig von der Stellung des Brettchens ist, hängt man dieses zunächst an der längeren Seitenlinie auf, so dass die parallel zur Ordinatenachse herabhängenden Tragschnüre der P auf der Abscissenachse die Punkte A_1', A_2', A_3' und A_4' und damit die Abscissen x_1, x_2, x_3 und x_4 der Punkte A markieren. Denkt man sich die Angriffspunkte der nun in einer Ebene liegenden Kräfte nach den Punkten A′ verlegt (zur wirklichen Ausführung müsste man in diesem Punkte Aufhängstifte anbringen und besondere Schnüre verwenden), so ergibt sich die Lage des Mittelpunktes M′ für die Punkte A′ gemäss Nr. 17 aus der Bedingung

$$\bar{x} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}.$$

Hängt man sodann das Brettchen an den Ringen der kürzeren Seitenlinie auf, so markieren die Schnüre, welche dabei eventuell zu verlängern sind, auf der Ordinatenachse in den Punkten A_1'', A_2'', A_3'' und A_4'' die Ordinaten y_1, y_2, y_3 und y_4 der Punkte A, und man erhält wie oben die Ordinate y des Mittelpunktes M″ der Punkte A″ aus der Bedingung $\bar{y} = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)}$.

In $\bar{x}$ und $\bar{y}$ hat man aber auch die Koordinaten des Mittelpunktes M für die Punkte A.

Die entsprechenden experimentellen Ausführungen bestehen hiernach darin, dass man für jede der beiden vertikalen Aufhängungen des Brettchens die P tariert und die x, bez. y, abliest, sodann die P entfernt, $R = \Sigma(P)$ in dem schon gezeichneten und mit Aufhängschnur versehenen

Punkte M anhängt, wobei die durch Rechnung bestimmten Strecken $\overline{x}$ und $\overline{y}$ von selbst markiert werden, und schliesslich die Stellung der Ringe prüft. Die Bestätigung der Richtigkeit des durch $\overline{x}$ und $\overline{y}$ bestimmten Punktes M für beliebige andere Stellung des Brettchens, insbesondere die horizontale, geschieht dann wie oben.

Schliesslich wird man nicht versäumen, einen oder mehrere andere Punkte des Brettchens mit Aufhängschnüren zu versehen, um zu zeigen, dass nur für R in M die gleichzeitige Einstellung der 3 Ringe stattfindet.

Die gerade nicht benützten Aufhängschnüre werden selbstverständlich jedesmal möglichst weit nach oben, bez. nach der Rückseite des Brettchens gezogen, so dass nur ihre möglichst kurzen Schleifen auf der Hauptfläche sichtbar bleiben.

20. Spezielle Versuchsanordnung für 3 parallele Kräfte im Raum.

Eine einfache Vorrichtung zur wesentlich allgemeineren Behandlung des wichtigen Falles dreier Parallelkräfte im Raum lässt sich mit Benützung des Meterstabes (Nr. 6c) und eines Stabes von gleichem Querschnitt und ca. 40 cm Länge herstellen (Figur 13). Auf der oberen Fläche des letzteren wird am einen Ende eine Ringschraube von der Weite der übrigen Ringösen angebracht, während am anderen Ende ein Streifen aus 2 mm starkem Messingblech so festgeschraubt wird, dass er eine Verlängerung des Stabes von ca. 5 cm bildet. In diesen Streifen wird $^1/_2$ cm von seinem Ende entfernt eine kurze schlanke Spitze (wie bei einem Reissnagel) eingeschraubt, welche zugleich den Nullpunkt der Teilung des kurzen Stabes bildet.

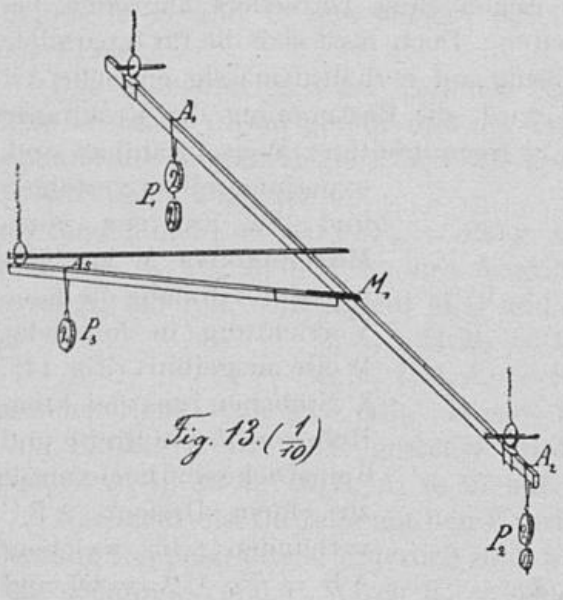


Fig. 13. ($\frac{1}{10}$)

Beide Stäbe werden in der Weise verbunden, dass man den Meterstab wie bisher an 2 Tragstifte hängt, auf seiner oberen Fläche, in einem Punkte M_1 der Mittellinie, die Spitze des kurzen Stabes eindrückt und die Öse der Ringschraube des letzteren auf einen entsprechend langen Tragstift stützt. Die Aufhängung des so gebildeten Gestänges geschieht wie bei dem horizontal aufgehängten Brettchen mittels dreier Tarierdrähte.

Bei der Wahl der Angriffspunkte A_1 und A_2 auf dem Meterstabe und A_3 auf dem kurzen Stabe hat man nur dafür zu sorgen, dass der Angriffspunkt von $R_1 = P_1 \pm P_2$ nach M_1 fällt; ist z. B. $P_1 = 400$ g und $P_2 = 300$ g, und wurde M_1 im Punkte 50 der Teilung des Meterstabes gewählt, so könnte man A_1 im Punkte 17 und A_2 im Punkte 94 dieser Teilung nehmen. Wählt man ausserdem etwa $P_3 = 200$ g und A_3 im Punkte 36 der Teilung des kurzen Stabes, so erhält man zunächst $R_1 = 700$ g

in M_1 als Ersatz für P_1 und P_2 und schliesslich $R = 900$ g im Punkt 8 (M) der Teilung des kurzen Stabes als Gesamtresultante.

Besondere Behandlung wird man für verschiedene Wahl des Dreiecks $A_1\ A_2\ A_3$ dem Falle $P_1 = P_2 = P_3$ widmen.

Auch die Zerlegung einer Kraft R von gegebenem Angriffspunkt M lässt sich in mannigfaltiger Weise darstellen: wählt man z. B. A_1, A_2 und A_3 beliebig, so sind zunächst P_3 und R_1 als Teile von R durch das Verhältnis $M M_1 : M A_3$ und sodann P_1 und P_2 als Teile von R_1 durch das Verhältnis $M_1 A_2 : M_1 A_1$ bestimmt.

Wollte man auch den Fall behandeln, dass eine der Kräfte, etwa P_2, aufwärts gerichtet ist, so könnte man das obige Beispiel benützen mit der Abänderung, dass A_1 in den Punkt 83 (statt 17) fällt; es ergibt sich dann $R_1 = 100$ g im Punkte M_1 (50), $R = 300$ g und M im Punkte 24 des kurzen Stabes, also M ausserhalb des Dreiecks $A_1\ A_2\ A_3$.

21. Parallele Kräfte, deren Angriffspunkte über ein starres System im Raum verteilt sind. Die Ausführung von Versuchen über 4 parallele Kräfte, welche in den Ecken eines Tetraeders angreifen, begegnet naheliegenden Schwierigkeiten. Doch lässt sich die für 3 parallele Kräfte im Raum benützte Vorrichtung auf verhältnismässig einfache Art so umgestalten, dass sie geeignet wird, die Bestimmung der Resultante für 4 solche Kräfte, welche dabei in mannigfaltiger Weise wählbar sind, experimentell zu verfolgen und die Existenz eines Mittelpunktes M nachzuweisen. Ich habe die neue Vorrichtung in folgender Weise ausgeführt (Fig. 14): 3 Stäbchen aus leichtem Holz von 15 mm Breite und 6 mm Dicke sind hochkantig zu einem Dreieck A B C verbunden, in welchem A B = 75, C A = 66 und C B = 36 cm beträgt (∢ C ist somit sehr nahe = 90°). Das erste Stäbchen ist 85 cm lang, so dass die Punkte A und B 5 cm von seinen Enden entfernt liegen. Von der Ecke C weg nach der Mitte M_1 von A B ist ein viertes Stäbchen von gleichem Querschnitt eingesetzt, welches zunächst zur Versteifung dient. Gute Verbindung der Stäbchen an den Ecken des Dreiecks, sowie an der Stelle M_1 wurde erzielt durch aufgenagelte Stückchen Zinkblech, welche nach der Grösse der betreffenden Winkel zugeschnitten sind. Die oberen schmalen Flächen der Stäbchen A B und M_1 C sind von M_1 aus in cm geteilt; als Nullpunkt M_1 gilt der Schnittpunkt der Mittellinien der oberen Flächen von A B und M_1 C.

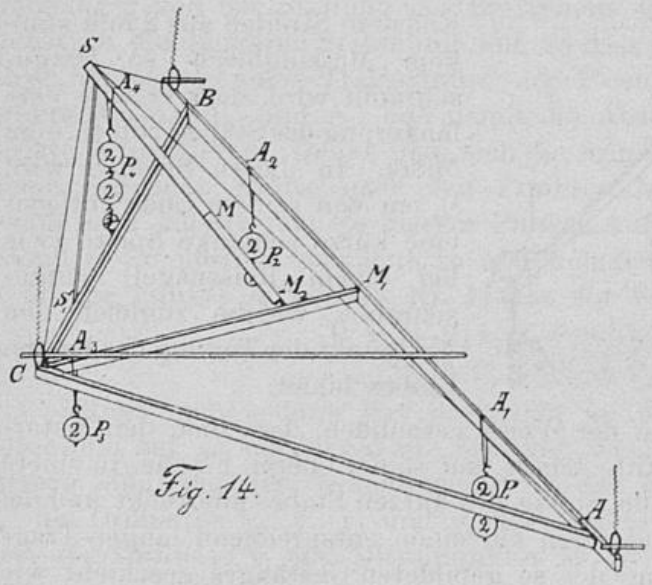


Fig. 14.

Mittels dreier Ringösen, welche bez. an den Verlängerungen des Stäbchens AB und an der Ecke C angebracht sind, kann das Ganze nunmehr wie die Vorrichtung für 3 parallele Kräfte im Raum an Tragstiften aufgehängt und als Ersatz für diese Vorrichtung verwendet werden.

Zur Vervollständigung wird ein fünftes Stäbchen mittels einer Spitze, welche in der Verlängerung der Mittellinie seiner oberen schmalen Fläche liegt, so in einem Punkte M_2 des Stäbchens M_1C aufgesetzt, dass es aus der Ebene ABC heraustritt und gegen dieselbe etwa unter 60° geneigt ist. Die Befestigung in dieser Stellung geschieht durch 3 Schnüre, welche von dem oberen Ende S nach den Punkten A, B und C gespannt werden. Ausserdem wird das Stäbchen M_2S noch durch eine Strebe gestützt, welche in einem passenden Punkte S_1 von BC (bez. AC oder AB) aufzusetzen ist. Die Strebe SS_1 besteht aus einem stark federnden Messingröhrchen mit ausziehbarem Stift und ist einerseits mit einer scharfen Spitze, anderseits mit einer gabelförmigen Auflage für das Stäbchen MS_2 versehen.

Bei fest angezogenen Schnüren ist auf solche Weise die Lage von S gegen A, B und C sehr sicher: das Ganze bildet ein starres räumliches System.

Das Stäbchen M_2S ist von der Spitze M_2 aus auf seiner oberen Fläche ebenfalls in cm geteilt und die Teilungslinien sind ca. $^1/_2$ mm tief treppenförmig eingekerbt, so dass die Schleifen für die anzuhängenden Gewichte nicht abgleiten.

Sind nun $P_1 = 200$ g, $P_2 = 150$ g, $P_3 = 100$ g und $P_4 = 250$ g die Kräfte und A_1, A_2, A_3 und A_4 ihre Angriffspunkte, so ist die Lage von A_1 und A_2 auf AB, von A_3 auf M_1C und von A_4 auf M_2S so zu wählen, dass

$$M_1A_1 : M_1M_2 = P_2 : P_1,$$

$$M_2M_1 : M_2A_3 = R_3 : R_1,$$ und dass M in einen passenden Punkt von M_2S fällt. Diesen Forderungen wird z. B., wenn M_2 im Punkte 6 von M_1C gewählt wurde, entsprochen durch A_1 in 24 auf M_1A, A_2 in 32 auf M_1B, A_3 in 27 auf M_1C und A_4 in 28 auf M_2S.

Nachdem das Gestelle mit den P tariert ist, wozu wegen der grossen Belastung Doppeldrähte erforderlich sind, werden P_1 und P_2 durch $R_1 = 350$ g in M_1, sodann R_1 und P_3 durch $R_2 = 450$ g in M_2 und schliesslich R_2 und P_4 durch $R = 700$ g in dem Punkte M (10) des Stäbchens M_2S ersetzt: Die Ringe zeigen in jedem Falle die ursprüngliche Einstellung.

Für den wichtigsten Fall $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ (etwa = 200 g) hätte man $M_1A_1 = M_1A_2$ beliebig und $M_1A_3 = 18$ cm zu wählen, damit $M_1M_2 = 6$ cm bleibt; wählt man noch $M_2A_4 = 32$, so wird $M_1M = 8$ cm.

Angesichts der Vorrichtung lässt sich nun anschaulich deduzieren, dass nach der Art der successiven Bestimmung von M_1, M_2 und M die schliessliche Lage von M unabhängig von der Richtung der P bez. von der Stellung des Tetraeders im Raum ist, dass also M für die gewählten Punkte A_1, A_2, A_3 und A_4 ein wirklicher Mittelpunkt ist. Die experimentelle Bestätigung für eine Veränderung der Stellung des Tetraeders hat bei beweglichen Ringösen keine Schwierigkeit: man hängt entweder C tiefer durch Anbringung eines Verlängerungsstückes oder steckt den

Tragstift für die Ringöse in C um einige cm höher in die Tafel ein. Das Stäbchen M_2S ist dabei etwas zu drehen, so dass seine breiten Seitenflächen vertikal bleiben.

22. Experimentelle Untersuchung der Wirkung beliebiger paralleler und antiparalleler Kräfte in einer Ebene. 1. Versuch: An dem in der bisherigen Weise aufgehängten und zunächst für sich allein tarierten Meterstab werden etwa nachfolgende Kräfte angebracht: $P_1 = -200$ g im Punkte 25, $P_2 = +200$ g in 40, $P_3 = +300$ g in 60, $P_4 = +100$ g in 80 und $P_5 = -100$ g im Punkte 95 der Teilung; die auf den Nullpunkt der Teilung bezogenen Arme sind also: $a_1 = 25$, $a_2 = 40$, $a_3 = 60$, $a_4 = 80$ und $a_5 = 95$ cm. Dem positiven Vorzeichen mögen Kräfte entsprechen, welche durch Vermittelung einer Rolle vertikal aufwärts wirken, damit sich für links drehende Kräfte übereinstimmend mit der in der Mechanik üblichen Festsetzung positive Momente ergeben.

Der für sich tarierte Stab schlägt nach Anbringung der Kräfte an beiden Enden nach oben an die Tragstifte, die weitere Tarierung der Kräfte erfordert also Abspannung beider Tarierdrähte, so dass nach Entfernung der P beide Ringösen nach unten anschlagen und als Ersatz für die P eine aufwärts gerichtete Kraft R zu erwarten ist.

Die nach dem Schema Seite 27 durchgeführte Rechnung ergibt in der That

$$R = \Sigma(P) = +300 \text{ g und}$$
$$\Sigma(Pa) = +19500, \text{ somit}$$
$$OM = a = \frac{\Sigma(Pa)}{\Sigma(P)} = 65$$

Der Versuch zeigt nachträglich, dass sämtliche P durch $R = +300$ g im Punkt 65 der Teilung wirklich ersetzt werden können.

Da nun dieses R durch $R' = -300$ g in demselben Punkte M ins Gleichgewicht gesetzt werden kann, so ist zu erwarten, dass dies auch für die ursprünglichen P der Fall ist. Zur Bestätigung wird der Stab wieder für sich tariert und dann mit den P wie oben behängt, so dass er wieder beiderseits nach oben anschlägt: Das Einspielen der Ringe findet statt, sobald man noch $R' = -300$ g in Punkt 65 anbringt. Es wird also die Wirkung der P durch R′ vollständig aufgehoben, die P werden durch R′ ins Gleichgewicht gesetzt.

2. Versuch: Zu P_1 bis P_5 wie oben werde noch angebracht die gefundene Kraft R′ als $P_6 = -300$ g im Punkte 65, also am Arm $a_6 = 65$ cm; man hat dann in den Kräften P_1 bis P_6 den Fall paralleler und antiparalleler Kräfte, welche für sich im Gleichgewicht sind: der für sich tarierte Stab zeigt nach Anbringung der 6 Kräfte Einspielen beider Ringe, und die Rechnung ergibt $R = \Sigma(P) = 0$, $\Sigma(Pa) = 0$, so dass $OM = a$ „unbestimmt“ wird.

Für das Gleichgewicht paralleler und antiparalleler Kräfte in einer Ebene ist also charakteristisch, dass gleichzeitig die algebraische Summe der Kräfte und die der Momente bezogen auf einen beliebigen Punkt ihrer Ebene (hier den Nullpunkt der Teilung) verschwinden.

3. Versuch: Wir entfernen $P_6 = -300$ g in 65 und bringen dafür $P_6' = -250$ g im Punkte 78 an; da $P_6' \cdot a_6' = P_6 \cdot a_6$, so bleibt $\Sigma(Pa) = 0$ während $R = \Sigma(P) = +50$ g wird, so dass sich ergibt

$$OM = a = \frac{\Sigma(Pa)}{\Sigma(P)} = 0.$$

Die jetzt vorhandenen Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_6'$ sind also ersetzbar durch $R = +50$ g im Nullpunkt der Teilung und erfordern zur Herstellung des Gleichgewichts die Zufügung der besonderen Kraft $R' = -50$ g in diesem Nullpunkt. Die Bestätigung durch den Versuch wird geliefert wie oben.

4. Versuch: Wir entfernen P_6' und nehmen zunächst wieder $P_6 = -300$ g in 65: das Einspielen der Ringe zeigt wieder das Gleichgewicht für sich an. Nun verlegen wir $P_6 = -300$ g von 65 nach 100, wodurch natürlich das Einspielen der Ringe gestört wird; rechts findet Anschlagen nach unten, links dagegen nach oben statt, so dass zur Wiedereinstellung der Ringe Mehrspannung des rechten und Abspannung des linken Tarierdrahtes erforderlich ist, welch' letztere durch Spannung eines links nach unten geführten Gegendrahtes ersetzt werden kann.

Macht man vor dieser Tarierung der Kräfte den Versuch, durch Drücken bez. Heben mit dem Finger das Einspielen der Ringe zu erzwingen, so findet man, dass es längs des ganzen Stabes keinen Punkt gibt, an welchem dies möglich wäre.

Die Art des Anschlagens der Ringe führt von selbst auf den weiteren Versuch durch Heben rechts und gleichzeitiges Drücken links das Einspielen der Ringe herbeizuführen; man überzeugt sich sofort von der Möglichkeit, und es zeigt sich, dass die Wahl der Punkte, an welchen der hebende und der drückende Finger angelegt werden, gleichgültig ist, wenn sich nur der erstere rechts von letzterem befindet, dass jedoch der erforderliche Kraftaufwand mit der Annäherung der Finger merklich wächst.

Nach diesen Vorversuchen ist zu erwarten, dass die Herstellung des Gleichgewichtes nur durch 2 Kräfte von entgegengesetztem Sinne, aber in der mannigfaltigsten Weise möglich ist.

Zur vorläufigen Orientierung führen wir zunächst die Rechnung durch und finden

$R = \Sigma(P)$ wie beim 2. Versuch immer noch $= 0$, dagegen

$$\Sigma(Pa) = -10500, \text{ also } OM = a = \frac{\Sigma(Pa)}{\Sigma(P)} = -\infty.$$

Zur weiteren Klarstellung vereinigen wir die abwärts gerichteten Kräfte

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = -200 \text{ g in } 25 \\ P_5 = -100 \text{ g in } 95 \\ P_6 = -300 \text{ g in } 100 \end{array}\right\} \text{zur Partialresultante } R_1 = -600 \text{ g im Punkte } 74\,{}^1/_6,$$

ebenso die aufwärts gerichteten Kräfte

$$\left.\begin{array}{l} P_2 = +200 \text{ g in } 40 \\ P_3 = +300 \text{ g in } 60 \\ P_4 = +100 \text{ g in } 80 \end{array}\right\} \text{zur Partialresultante } R_2 = +600 \text{ g im Punkte } 56\,{}^2/_3.$$

Der Versuch zeigt, dass in der That die gegebenen Kräfte durch R_1 und R_2 ersetzt, beziehungsweise durch $R_1' = + 600$ g in 74,2 und $R_2' = - 600$ g in 56,7 ins Gleichgewicht gesetzt werden können. Aber R_1 und R_2 liefern $R = 0$ und $OM = a = \infty$, können also ihrerseits nicht durch eine Kraft ersetzt, bez. ins Gleichgewicht gesetzt werden, weil die erforderliche Kraft überhaupt nicht angebracht werden kann.

Die Ersetzung der gegebenen Kräfte, bez. die Herstellung des Gleichgewichts derselben ist also in unserem Falle, welcher durch die Gleichungen $\Sigma(P) = 0$ und $\Sigma(Pa) = \pm n$ chrarakterisiert ist, nur möglich durch Anbringung eines solchen Paares von gleichen Kräften entgegengesetzten Sinnes: eines sogenannten Kräftepaares.

23. Experimentelle Untersuchung der Äquivalenz und des Gleichgewichts zweier Kräftepaare in einer Ebene, deren Arme in einer Geraden liegen. An dem wie gewöhnlich aufgehängten und für sich tarierten Meterstabe werden etwa angebracht die Kräfte $P = - 200$ g in 20 (A) und $P' = + 200$ g in 50 (A'): die Ringösen zeigen links Belastung, rechts Entlastung; die P suchen also den Stab links zu drehen und erfordern zur Tarierung Mehrspannung des linken und Abspannung des rechten Tarierdrahtes (bez. Spannung eines rechts abwärts angebrachten Gegendrahtes).

1. Versuch: Verlegt man A' von 50 nach 60 (allgemein um n cm), so muss A ebenfalls und zwar von 20 nach 30 (um n cm in derselben Richtung) verlegt werden, damit die Ringe wieder einspielen. Die Wirkung eines Paares ändert sich also nicht, wenn die Strecke $AA' = a$, der Arm des Paares, längs des Stabes verlegt wird, sie ist für gegebene P nur abhängig von der Grösse des Armes a.

2. Versuch: Vergrössert man P und P' von 200 auf 300 g, so muss A von 20 nach 30 oder A' von 50 nach 40 verlegt werden, um das Wiedereinspielen der Ringe herbeizuführen. Massgebend für die Wirkung der P ist also nur das Produkt $P \cdot a$, das sogenannte Moment des Paares.

Als Resultat aus den beiden Versuchen hat man somit: Paare von gleichem Moment, deren Arme in derselben Geraden liegen, sind gleichwertig, wenn sie in demselben (experimentell nach dem Anschlagen der Ringe zu beurteilenden) Sinne drehen.

3. Versuch: Vertauscht man die Richtungen von P und P' oder kehrt man die Richtung der Strecke AA' um, so dass A' in 20 und A in 50 liegt, so schlagen die Ringe in entgegengesetztem Sinne an den Tragstiften an, und die Tarierung erfordert gerade die entgegengesetzten Spannungen wie oben: die neuen Paare haben bei unveränderten absoluten Werten von P und a, sowie $P \cdot a$, entgegengesetzten Drehsinn, während zugleich P oder a, mithin in beiden Fällen das Moment $P \cdot a$ mit entgegengesetztem Vorzeichen zu versehen sind.

Versucht man das ursprüngliche Paar $P = - 200$ g in 20 und $P' = + 200$ g in 50 an der für sich allein tarierten Stange ins Gleichgewicht zu setzen, so zeigt sich, wie früher durchgeführt, die Wiedereinstellung der Ringe nur möglich durch Anbringung eines neuen Paares

von entgegengesetztem Drehsinn. Wählt man hiezu $P_1 = + 400$ g in 45, so wird das Einspielen der Ringe nur herbeigeführt durch $P_1' = - 400$ g in 60; wählt man $P_1 = - 300$ g in 95, so findet man für $P_1' = + 300$ g den Aufhängepunkt in 75. Man schliesst also: Paare von gleichem Moment, deren Arme beliebig in derselben Geraden liegen, heben sich auf (halten sich Gleichgewicht), wenn sie entgegengesetzten Drehsinn haben.

24. Kräftepaare in einer Ebene, deren Arme nicht in einer Geraden liegen. Als Angriffskörper dient das mit Koordinatenpapier überzogene Brettchen (Fig. 12 Seite 30), mit 2 Ringösen in 40 cm Entfernung an der einen Längsseite. Die Teilungslinien mit je 5 cm Abstand werden stärker nachgezeichnet und von links nach rechts mit 1 bis 9, bez. von unten nach oben mit 1 bis 5 beziffert. In den Schnittpunkten dieser Hauptteilungslinien werden mittels eines kleinen Nagels Löcher zum Einstecken der Aufhängestiftchen eingeschlagen.

Man bringt an dem tarierten Brettchen etwa die Kräfte $P = - 200$ g im Punkte 2/5 (A) und $P' = + 200$ g im Punkte 6/5 (A') an; dieselben bilden ein links drehendes Paar mit dem horizontalen Arm $AA' = 20$ cm und dem Momente $P \cdot a = + 4000$, welches wie in Nr. 23 tariert wird.

1. Versuch: Die Verlegung von A und A' in den Angriffslinien von P und P', also in den vertikalen Teilungslinien 2 und 6, kann nach Nr. 12 keine Änderung der Wirkung der beiden Kräfte zur Folge haben: Verlegt man — durch einfaches Umstecken der Aufhängestiftchen — A von 2/5 nach 2/1 (A_1) und A' von 6/5 nach 6/1 (A_1'), so zeigt sich in der That keine Änderung der Ringeinstellungen.

Nun kann aber nach 23 (1. Versuch) der jetzige Arm $A_1 A_1'$ ohne Änderung der Wirkung des Paares in der Geraden $A_1 A_1'$, d. i. in der horizontalen Teilungslinie 1 beliebig verschoben werden. Man verlegt also A_1 von 2/1 nach 4/1 (A_2) und A_1' von 6/1 nach 8/1 (A_2') (unter gleichzeitiger Verschiebung der Richtungsrolle für P' um 10 cm nach rechts) und prüft die Stellung der Ringe: es zeigt sich keine Änderung derselben. Die Wirkung eines Paares ändert sich also nicht, wenn der Arm in seiner Ebene beliebig parallel verschoben wird.

Schliesslich wird man noch $P' = + 200$ g ersetzen durch $P_1' = + 100$ g etwa im Punkte 7/4 und P_1 so bestimmen, dass die Ringe wieder einspielen. Es zeigt sich, dass dies nur möglich ist durch $P_1 = - 100$ g in einem beliebigen Punkte der vertikalen Teilungslinie 1.

Als Resultat dieses Versuches hat man somit: Kräftepaare in einer Ebene von gleichem Wert des Momentes und gleichem Drehsinn, deren Arme parallel sind, können sich gegenseitig ersetzen.

2. Versuch: Nachdem die ursprünglichen Kräfte $P = - 200$ g in 2/5 (A) und $P' = + 200$ g in 6/5 (A') wieder angebracht sind und die Tarierung kontrolliert ist, entfernt man die P und macht den naheliegenden Versuch, die Wirkung derselben durch horizontalen Zug mit der einen Hand an der Ecke links oben und durch gleichzeitigen horizontalen Druck mit der andern Hand an der Ecke links unten (bez. durch Zug an der Ecke rechts unten) herbeizuführen. Zur bequemeren Ausführung bringt

man Zugschnüre an, etwa in 6/5 (A_1) und 6/1 (A_1'), und zieht an der ersteren horizontal nach links, an der letzteren horizontal nach rechts: bei vorsichtiger Steigerung dieser Zugkräfte gelingt es sofort, die Ringe zum Einspielen zu bringen.

Man führt demgemäss die Zugschnüre horizontal nach links und rechts über Rollen und belastet sie bis zum Einspielen der Ringe: es sind je 200 g erforderlich. Die jetzt wirkenden Kräfte $P_1 = 200$ g horizontal nach links in A_1 und $P_1' = 200$ g horizontal nach rechts in A_1' bilden nun ein links drehendes Paar mit dem vertikalen Arm $A_1 A_1'$, durch welches das ursprüngliche Paar mit dem gleichgrossen horizontalen Arm AA' vollständig ersetzt wird; die Wirkung eines Paares ändert sich also nicht, wenn es in seiner Ebene um 90° gedreht wird.

Zur Vervollständigung werden nunmehr 2 beliebige parallele Gerade von 20 cm Abstand aufgezeichnet und ein links drehendes Paar mit den Kräften P_2 und P_2' von je 200 g hergestellt, deren Richtungen in diese Geraden fallen. Die genaue Einstellung der Richtungsrollen erfolgt unter vorübergehender Fixierung der Ringösen durch eingeschobene Korke: nach Entfernung dieser Korke spielen die Ringe abermals ein. Es ist somit gezeigt, dass die Wirkung eines Paares sich nicht ändert, wenn es in seiner Ebene um einen beliebigen Winkel gedreht wird.

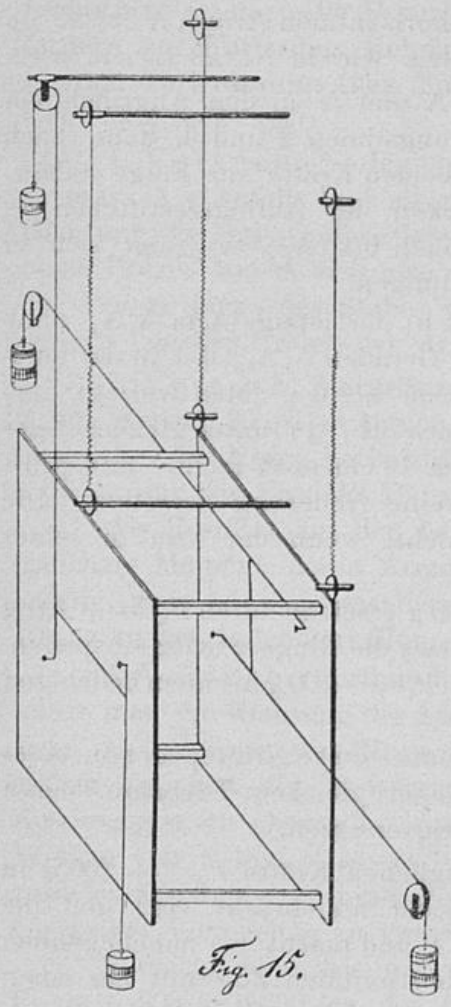


Fig. 15.

Aus den Versuchen 1 und 2 geht demnach hervor, dass die Wirkung eines Paares auf seine Ebene nur von dem Werte und Vorzeichen seines Momentes, nicht aber von seiner Lage in der Ebene abhängt.

Daraus lässt sich aber schliessen, dass 2 Kräftepaare in einer Ebene von gleichem Werte des Momentes und entgegengesetztem Drehsinn sich stets aufheben, welche Lage sie auch in der Ebene haben mögen. Die Ausführung der hierhergehörigen bestätigenden Versuche bedarf nach dem Vorausgehenden wohl keiner weiteren Erläuterung.

25. Kräftepaare in starr verbundenen Parallelebenen. Als Angriffskörper dient das in Fig. 15 gezeichnete Gestelle aus 2 durch 4 gleichlange Querstäbe verbundenen Brettchen von je 50 cm Länge und 30 bis 40 cm Breite. Dasselbe wird nach Angabe der Figur an 3 Tarierdrähten aufgehängt und tariert. Zwischen den beiden Brettchen können noch 2 besondere, in der Figur nicht gezeichnete gerade Metallstäbchen senkrecht zu den Ebenen der

Brettchen (also parallel zu einander) eingesetzt werden; als Ersatz für dieselben können auch 2 diametral gegenüberliegende von den 4 Verbindungsstäben dienen. Mit Hilfe von Schnurschleifen, welche um die eingesetzten Stäbchen gelegt sind, wird ein beliebiges Paar mit vertikalen Kraftrichtungen so angebracht, dass es in der durch das hintere Brettchen dargestellten Ebene liegt.

Die Richtungsrolle für die aufwärts gerichtete Kraft ist mittels einer an der Schere befestigten federnden Hülse längs eines genügend langen Zapfens verschiebbar, welcher in einem besonderen, an der oberen Tafelschiene laufenden Schieber senkrecht zur Tafelfläche befestigt ist. Infolge der Verschiebbarkeit in 2 zu einander senkrechten Richtungen kann die Rolle bei jeder Lage des Angriffspunktes auf dem beliebig eingesetzten Stäbchen so eingestellt werden, dass die Richtung der betreffenden Kraft in die Vertikale fällt. (Die Achse dieser Rolle ist in Fig. 15 der Deutlichkeit wegen parallel zur Tafelfläche dargestellt, während sie in Wirklichkeit senkrecht zu derselben ist).

Nachdem das angebrachte Kräftepaar tariert ist, wird der Angriffspunkt der aufwärts gerichteten Kraft um eine beliebige Strecke auf dem eingesetzten Stäbchen vorgeschoben und die Rolle um ebensoviel auf ihrem Träger nachgerückt, so dass die Kraftschnur wieder vertikal ist; — richtige Einstellung der Rolle ist erzielt, wenn beim Anvisieren die beiden Teile der Kraftschnur zur Deckung gebracht werden können.

Die Folge dieser Vorschiebung der einen Kraft ist, dass die vordere Ringöse nach oben anschlägt, und auch die hinteren ihre Stellungen ändern (in verschiedener Weise je nach Lage des eingesetzten Stäbchens). Nun wird durch einfaches Vorschieben der anderen Kraft (deren Richtung ja von selbst vertikal bleibt) auf dem 2. Einsatzstäbchen der Versuch gemacht, die 3 Ringösen wieder zum Einspielen zu bringen. Es zeigt sich, dass dies sofort eintritt, wenn die 2. Kraft eben soweit vorgerückt wird wie die erste, also wenn sie mit der letzteren in eine Parallelebene zur Ebene des hinteren Brettchens fällt.

Nachdem man mit gleichem Erfolg für das Einspielen der Ringe beide Kräfte bis an die Rückseite des vorderen Brettchens vorgerückt hat, werden beide Kräfte auf der Vorderseite desselben mittels gewöhnlicher Aufhängestiftchen angebracht und hier noch durch andere Kräfte von demselben Momente ersetzt. Schliesslich wird nach Analogie von Fig. 15 der Versuch ausgeführt: ein in der Ebene des vorderen Brettchens liegendes Paar mit horizontalem Arm durch ein in der Ebene des hinteren Brettchens wirkendes Paar mit vertikalem oder beliebig gestelltem Arm zu ersetzen.

Das jedesmal eintretende Einspielen der Ringe zeigt, dass die Wirkung eines Paares auf ein starres System (dargestellt durch unser Gestelle) sich bei beliebiger Parallelverschiebung seiner Angriffsebene innerhalb des Systems nicht ändert, dass also Kräftepaare von gleichem Drehsinn und gleichem Moment in starr verbundenen Parallelebenen äquivalent sind, oder dass die Wirkung eines Kräftepaares von gegebenem Momente und gegebenem Drehsinn auf ein starres System nur noch abhängt von der

Stellung seiner Ebene im Raum, nicht aber von deren Lage innerhalb des Systems.

Daraus lässt sich wieder der Schluss ziehen, dass 2 Kräftepaare von gleichem Moment und entgegengesetztem Drehsinn in starr verbundenen Parallelebenen sich stets aufheben, welchen Abstand die beiden Ebenen, und welche Lage die Paare in denselben auch haben mögen: die Ausführung eines bestätigenden Versuches ist in Fig. 15 dargestellt.

26. Vereinfachung der Versuche über Kräftepaare in starr verbundenen Parallelebenen und Ausdehnung derselben auf mehrere Paare. Auf Grund des vorausgehenden können, ohne der Allgemeinheit der Versuche Eintrag zu thun,

1) alle Kraftrichtungen vertikal,

2) alle Paare in einer Ebene und

3) alle Arme in einer Geraden dieser Ebene gewählt werden, so dass

1) nur die Anbringung der positiven Kräfte Anwendung von Richtungsrollen erfordert,

2) der Angriffskörper sich auf ein ebenes Brettchen reduziert, und die Richtungsrollen für die positiven Kräfte in eine Ebene (dicht vor die Tafel) kommen, und dass endlich

3) das ebene Angriffsbrettchen sich noch weiter auf den geraden horizontalen Stab reduziert, wie er in Nr. 23 angewendet wurde.

Es wird also für die folgenden Versuche der gerade Meterstab in der gewöhnlichen Weise über 2 Tragstifte gehängt und mittels zweier Drähte tariert. Durch die Zahl der vorhandenen Rollen ist die Möglichkeit gegeben, gleichzeitig 4 Kräftepaare anzubringen; die in 25. verwendete besondere Rolle ist dabei auf ihrem Zapfen bis an den Schieber zurückzustellen.

1. Versuch: Man wählt 3 Paare von gleichem Drehsinn; das Anschlagen der Ringe gibt zunächst Aufschluss, dass dieselben nur durch ein resultierendes Paar von demselben Drehsinn ersetzt werden können. Man tariert also die Paare (an dem einen Stabende mittels Gegendraht!) und entfernt sie, um zunächst eine beliebige (nicht zu kleine) positive Kraft R an beliebiger Stelle A (jedoch in der Nähe des zu hebenden Stabendes) anzubringen. Sodann sucht man provisorisch durch Auflegen eines Fingers (bez. eines scharfkantigen Körpers) diejenige Stelle A′ des Stabes zu bestimmen, an welcher durch genügenden Druck nach unten das Einspielen beider Ringe herbeigeführt werden kann; hiebei ist eventuell R zu vergrössern. An dieser Stelle werden nun Gewichte (R′) angehängt, bis die Ringe einspielen. Man erhält $R' = R$ und für die Entfernung AA' einen ganz bestimmten Wert a.

Wählt man A und A′ beliebig auf dem Stab ($AA' = a$) und bestimmt R und R′ durch Belastung bis zum Einspielen der Ringe, so findet man $R = R'$ und für beide einen ganz bestimmten Wert.

Es gilt nun zwischen den Kräften P_1, P_2 und P_3 der gewählten Paare, ihren Armen a_1, a_2 und a_3 und den Werten für R und a (von denen nach dem vorausgehenden der eine beliebig gewählt, der andere durch den

Versuch gefunden ist) eine Beziehung zu finden. Der nächstliegende Gedanke, Vergleichung des Momentes von (R, a) mit der Summe der Momente der (P, a), führt zum Ziel: R und a haben solche Werte, dass $R \cdot a = P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3$. Es erübrigt also nur, zur Bestätigung noch weitere Versuche durch Bestimmung von a für beliebige andere Werte von R (oder umgekehrt) anzustellen.

2. Versuch: Man wählt 4 Paare, etwa 2 links und 2 rechts drehende von beliebigen Momenten und verfährt Schritt für Schritt wie beim 1. Versuch; als Resultat ergibt sich $R \cdot a = \Sigma (\pm P \cdot a)$.

Als Gesamtresultat aus dem 1. und 2. Versuch hat man somit: Beliebige Paare (P_1, a_1), $(P_2\ a_2)$ etc. in starr verbundenen Parallel-Ebenen können ersetzt werden durch ein resultierendes Paar (R, a) in einer mit jenen starr verbundenen Parallelebene, dessen Moment nach Grösse und Vorzeichen bestimmt ist durch $R \cdot a = \Sigma (\pm P \cdot a)$.

3. Versuch: Unterlässt man beim 2. Versuch die Tarierung und die darauffolgende Entfernung der 3 anzubringenden Kräftepaare, tariert man also nur den Stab für sich vor Anbringung der Kräfte und lässt diese dauernd angebracht, so führt das analoge Verfahren zur Bestimmung eines Paares (R′, a′), durch welches die 3 gegebenen Paare ins Gleichgewicht gesetzt werden, mit dem Resultate:

$$R' \cdot a' = -\Sigma (\pm P \cdot a).$$

4. Versuch: Wird zu den 3 Paaren des 3. Versuches noch das zuletzt bestimmte Paar (R′, a′) als 4. Paar (P_4, a_4) angebracht, so hat man in den 4 Paaren (P_1, a_1) bis (P_4, a_4) den Fall mehrerer Kräftepaare (in einer Ebene oder in starr verbundenen Parallelebenen), welche für sich im Gleichgewicht sind. Der für sich tarierte Stab zeigt nach Anbringung der 4 Paare in der That Einspielen der beiden Ringe, und die Rechnung ergibt $\Sigma (\pm P \cdot a) = 0$, wie nach dem Resultate des 3. Versuches zu erwarten.

Für das Gleichgewicht gegebener Paare in einer Ebene oder in starr verbundenen Parallelebenen ist also charakteristisch, dass die algebraische Summe ihrer Momente verschwindet.

27. Schlussbemerkungen. Die Zusammensetzung zweier Kräftepaare, deren Angriffsebenen nicht parallel sind, dürfte an sich über das Pensum der Mittelschule hinausgehen; ausserdem kommt sie für die Gesetze des Gleichgewichts an den einfachen Maschinen nicht zur Anwendung, und ihre experimentelle Behandlung bietet Schwierigkeiten, zu deren Überwindung unsere ganze Versuchsanordnung (mit Drehung des Angriffskörpers in vertikaler Ebene) nicht geeignet erscheint.*

Aus diesen Gründen wird hier des Problems lediglich Erwähnung gethan; es konnte somit auch von der Einführung des Begriffes der Achse eines Kräftepaares abgesehen werden.

---

* Vergl. die Demonstration dieser Zusammensetzung mittels des Töpler'schen Apparates, Poske'sche Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, 1. Jahrgang 1888, Seite 138.

Was dagegen die Anwendung der im vorausgehenden experimentell entwickelten allgemeinen Gesetze der Statik auf die Gesetze der Drehung um eine feste Achse und des Gleichgewichts an den einfachen Maschinen anlangt, so liegt dieselbe ausserhalb des Rahmens dieser Arbeit. Wie die auf diese Anwendung bezüglichen Versuche mit den beschriebenen Apparaten zur Ausführung gelangen, soll in einer besonderen Abhandlung dargestellt werden.

Es sei hier nur noch angedeutet, dass der in Nr. 6 unter c beschriebene Meterstab ohne weiteres als Hebel verwendet werden kann, indem man ihn mittels einer der Hülsen, welche an seiner oberen Fläche (bei den Punkten 0 und 50 der Teilung) eingelassen sind, auf einen Tragstift der Tafel steckt, so dass dieser die feste Achse darstellt. Die Tarierung, sowie die Herstellung einer bestimmten durch Ringöse und Tragstift markierten Gleichgewichtslage geschieht durch Draht und Gegendraht am Stabende rechts. Tarierung des Stabes und der angebrachten Kräfte führt nach Entfernung der letzteren zur Bestimmung einer Ersatzkraft, Tarierung des Stabes allein unter Belassung der angebrachten Kräfte führt zur Bestimmung einer das Gleichgewicht wiederherstellenden Kraft. Die Handhabung dieses Hebelapparates ist ausserordentlich bequem, und die Resultate der Versuche, die sich auf alle Fälle ausdehnen lassen, sind von eben so grosser Genauigkeit, wie bei den vorausgehend beschriebenen Versuchen

Inhaltsangabe.

I.

Einleitung.

Seite

1. Vorbemerkungen 3
2. Wesen der induktiven Methode für das Gebiet der Statik 5
3. Allgemeine Bemerkungen über die neue Versuchsanordnung 6

II.

Beschreibung der Apparate.

4. Die Tafel und ihre Ausrüstung 8
5. Die Tarierdrähte 9
6. Die Angriffskörper 10
7. Tragstifte und Gewichte 11

III.

Beschreibung der Versuche.

8. Resultante zweier Kräfte P_1 und P_2 mit gemeinsamem Angriffspunkt A und beliebiger Richtung: Bestimmung der Angriffslinie innerhalb des Winkels (P_1, P_2) 12
9. Bestimmung der Grösse der Resultante 14
10. Durchführung einer Umkehrungsaufgabe 15
11. Resultante mehrerer Kräfte in einer Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkt . . 16
12. Kräfte in einer Ebene mit verschiedenen Angriffspunkten 17
13. Übergang zu parallelen Kräften 20
14. Übergang zu antiparallelen Kräften 22
15. Vereinfachung der Versuche über parallele und antiparallele Kräfte 23
16. Direkte Entwickelung des Satzes über die Resultante zweier parallelen oder antiparallelen Kräfte 24
17. Versuche über mehrere parallele Kräfte in einer Ebene 26
18. Parallele Kräfte im Raum 28
19. Anwendung der Koordinatenmethode zur Bestimmung des Mittelpunktes . . . 30
20. Spezielle Versuchsanordnung für 3 parallele Kräfte im Raum 31
21. Parallele Kräfte, deren Angriffspunkte über ein festes System im Raum verteilt sind 32
22. Experimentelle Untersuchung der Wirkung beliebiger paralleler und antiparalleler Kräfte in einer Ebene 34
23. Äquivalenz und Gleichgewicht zweier Kräftepaare in einer Ebene, deren Arme in einer Geraden liegen 36
24. Kräftepaare in einer Ebene, deren Arme nicht in einer Geraden liegen 37
25. Kräftepaare in starr verbundenen Parallelebenen 38
26. Vereinfachung der Versuche über Kräftepaare und Ausdehnung derselben auf mehrere Paare 40
27. Schlussbemerkungen 41