Das Büschel von Kurven 4ter Ordnung mit 3 festen Doppelpunkten und 4 festen einfachen Punkten.

1. Drei feste Doppelpunkte A, B, C und 4 feste einfache Punkte F_1, F_2, F_3, F_4 bestimmen im allgemeinen ein Büschel von Kurven 4ter Ordnung vom Geschlecht 0, das bekanntlich durch eine quadratische Transformation mit den Fundamentalpunkten A, B, C in ein Kegelschnittbüschel übergeführt werden kann. Aus dieser Tatsache ergeben sich sofort leicht die zerfallenden Kurven des Büschels:

Das Büschel enthält 3 Paare von Kegelschnitten, von denen ein Paar z. B. bestimmt ist durch die beiden Punktquintupel A, B, C, F_1, F_2 und A, B, C, F_3, F_4 und entsprechend die beiden anderen. Das Büschel enthält ferner 3 Kurven, die aus je einer Geraden und einer Kurve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt bestehen, so z. B. die eine aus der Geraden BC und der Kurve 3ter Ordnung, die in A einen Doppelpunkt hat und durch die Punkte B, C und die 4 Punkte F bestimmt wird.

Das Kegelschnittpaar, das durch die Kombination $F_1 F_2/F_3 F_4$ bestimmt ist, hat außer A, B, C noch einen 4ten Schnittpunkt Y_1, der 4te Schnittpunkt des durch die Kombination $F_1 F_3 / F_2 F_4$ bestimmten Paares sei Y_2 und der des zu der Kombination $F_1 F_4 / F_2 F_3$ gehörigen Paares Y_3. Die Gerade B C und die zu ihr gehörige Kurve 3ter Ordnung mit dem Doppelpunkt A haben außer B und C noch einen Punkt W_a gemeinsam, entsprechend sind W_b und W_c die dritten Schnittpunkte von CA und AB mit den zugehörigen Kurven 3ter Ordnung.

Diese Punkte Y und W sind die 6 außer A, B, C im Büschel noch vorhandenen Doppelpunkte.

2. Wie man sich leicht überzeugt, wird eine Gerade im allgemeinen von 6 Kurven des Büschels berührt. Dreht man also

einen Strahl um einen Punkt P, so sind 6 Schnittpunkte des Strahls mit der Kurve der Berührungspunkte der von P an die Büschelkurven gehenden Tangenten variabel. Da ferner durch P selbst eine Büschelkurve geht, deren Tangente in P der Strahl σ sei, so liegt P auf der Kurve der Berührungspunkte, und, wie leicht einzusehen, ist σ auch die Tangente dieser Kurve in P. Diese Kurve ist also 7ter Ordnung und heiße γ^7. Man beweist leicht, daß es 4 Kurven des Büschels gibt, die PF_1 z. B. außer in F_1 berühren; die in F_1 selbst berührende Kurve ist somit doppelt zu zählen, und die γ^7 berührt die PF_1 in F_1. Da die Kurven 4ter Ordnung mit drei Doppelpunkten 6ter Klasse sind, schneidet die γ^7 eine Büschelkurve in 6 variablen Punkten, so daß auf die Grundpunkte des Büschels $28-6=22$ feste Schnittpunkte kommen. Da nun die Punkte F einfache Punkte der γ^7 sind, bleiben für die Punkte A, B, C 18 feste Schnittpunkte übrig, so daß diese Punkte als 3fache Punkte der γ^7 erkannt sind. Nun bilden ferner etwa auf PA die von A verschiedenen Schnittpunkte der Büschelkurven eine Involution, in deren Doppelpunkten 2 Kurven des Büschels die PA berühren. Auf A entfallen also 4 Schnittpunkte der PA mit der γ^7, so daß PA eine der 3 Tangenten der γ^7 in A darstellt. Es ist ferner leicht einzusehen, daß die Punkte W_a, W_b, W_c und die Punkte Y_1, Y_2, Y_3 als Doppelpunkte zerfallender Büschelkurven auch auf der γ^7 liegen.

Da die Doppelpunktstangenten der Büschelkurven etwa in A eine Involution bilden, gibt es 2 Büschelkurven, die in A eine Spitze haben, und die beiden Rückkehrtangenten dieser Spitzen sind eben die Doppelstrahlen jener Involution. Nun gingen vom Punkte P an eine beliebige Büschelkurve 6 Tangenten, deren Berührungspunkte die von den Grundpunkten verschiedenen Schnittpunkte dieser Büschelkurve mit der γ^7 waren. Für eine Büschelkurve mit einer Spitze in A rückt einer dieser Schnittpunkte noch in den Punkt A, so dass jede der beiden Kurven mit einer Spitze die γ^7 in A berührt, und die Rückkehrtangenten dieser beiden Kurven die beiden noch fehlenden Tangenten der γ^7 in A darstellen.

Demnach hat sich ergeben:

Die Berührungspunkte der von einem Punkte P an die Büschelkurven gehenden Tangenten erfüllen eine Kurve 7ter Ordnung γ^7, die die Geraden PF_1, PF_2, PF_3, PF_4

in den Punkten F und die durch P gehende Büschelkurve in P berührt. Die Punkte A, B, C sind 3fache Punkte der γ^7, und ihre 3 Tangenten in A z. B. sind die Gerade PA und die Rückkehrtangenten der beiden Büschelkurven, die in A eine Spitze besitzen. Die γ^7 geht schließlich auch durch die 3 Doppelpunkte Y und die 3 Doppelpunkte W der zerfallenden Büschelkurven.

3. Als Kurve 7ter Ordnung mit 3 3fachen Punkten ist die γ^7 von der Klasse 24. Von den 24 Tangenten, die von P an die γ^7 gehen, zählt die Tangente in P selbst, die zugleich Tangente an die durch P gehende Büschelkurve ist, 2fach, ferner waren Tangenten die Geraden PF_1, PF_2, PF_3, PF_4. Es bleiben somit noch 15 Tangenten übrig. Wenn x der Berührungspunkt einer solchen ist, so fallen in Px 2 die durch x bestimmte Büschelkurve in x berührende Tangenten zusammen, so daß die Px als eine Wendetangente dieser Kurve erkannt ist. Folglich ergibt sich:

Von irgend einem Punkte P gehen im allgemeinen 15 Wendetangenten an Kurven des Büschels.

4. Der Punkt P der vorigen Betrachtung kann im besonderen einer der 3 gemeinsamen Doppelpunkte, etwa A, sein. Dann sondern sich von der γ^7 die beiden Geraden AB und AC als Bestandteile zerfallender Büschelkurven ab, und die Berührungspunkte der von A an die Büschelkurven gehenden Tangenten erfüllen eine Kurve 5ter Ordnung α^5, für die die Punkte B und C Doppelpunkte sind, deren Tangenten wieder die Rückkehrtangenten der in B und C mit einer Spitze behafteten Büschelkurven sind. Auf irgend einem durch A laufenden Strahl bilden die Schnittpunkte mit den Büschelkurven eine Involution, deren beide Doppelpunkte die von A verschiedenen Schnittpunkte des Strahles mit der α^5 sind. Demnach ist A ein 3facher Punkt dieser Kurve. Für jede Tangente dieses Punktes fällt ein Doppelpunkt der auf ihr durch das Büschel erzeugten Involution in den Punkt A, und dieser Punkt ist somit ein Wendepunkt auf dem einen Zweig der Büschelkurve, die jene Tangente der α^5 in A berührt. Folglich ergibt sich:

Jeder der 3 Doppelpunkte A, B, C des Büschels ist ein Wendeknoten für 3 Kurven des Büschels.

Von A ausgehende Wendetangenten von Büschelkurven, die nicht in A berühren, kann es natürlich nicht geben.

5. Fällt der Punkt P in einen der Punkte F, etwa in F_1, so bleibt die zugehörige Kurve γ^7, die hier φ^7 heißen möge, von der 7ten Ordnung. Nur spielt der Punkt F_1 jetzt auch eine besondere Rolle. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß irgend ein durch F_1 gezogener Strahl außer in F_1 noch in 4 Punkten von Büschelkurven berührt wird. Demnach ist F_1 ein 3facher Punkt der φ^7. Die 3 Tangenten der φ^7 in F_1 sind wieder Wendetangenten der 3 Büschelkurven, die von ihnen in F_1 berührt werden.

Die φ^7 ist, da sie 4 3fache Punkte besitzt, von der 18ten Klasse. Von den 18 Tangenten, die von F_1 an sie gehen, entfallen 6 auf die Geraden nach den Punkten F_2, F_3, F_4, A, B, C und 6 auf die 3 Tangenten in F_1, so daß 6 übrig bleiben. Diese sind wieder Wendetangenten von Büschelkurven, die nicht in F_1 berühren. Es hat sich also ergeben:

Jeder der 4 einfachen Grundpunkte des Büschels ist Wendepunkt für 3 Büschelkurven, und durch ihn laufen noch 6 Wendetangenten des Büschels, die die zugehörigen Kurven nicht in ihm berühren.

6. Irgend ein Strahl durch einen der 4 einfachen Grundpunkte F_i wird in F_i von einer Büschelkurve berührt und schneidet diese noch in 2 Punkten. Dreht man nun den Strahl um F_i, so beschreiben diese Punkte eine Kurve, für die F_i ein 3facher Punkt sein muß, da wir eben erkannt haben, daß F_i für 3 Büschelkurven ein Wendepunkt ist. Diese Kurve ist also von der 5ten Ordnung. Sie geht, wie leicht ersichtlich, durch die übrigen Punkte F und hat mit der Geraden F_i A z. B. in A 2 Punkte gemein. Nun kann die AB z. B. mit der Kurve als Bestandteil einer zerfallenden Büschelkurve außer A und B nur den Punkt W_a gemein haben. Folglich hat auch AB mit der Kurve in A und B je 2 Punkte gemein, und A ist demnach als ein Doppelpunkt der Kurve erkannt, desgleichen B und C.

Als eine Kurve 5ter Ordnung mit einem 3fachen und 3 Doppelpunkten ist diese unikursal, und das Strahlenbüschel um F_i schneidet auf ihr eine Involution ein. Die Strahlen von F_i nach ihren beiden Doppelpunkten, die sich auch als die von den Grundpunkten verschiedenen Schnittpunkte der Kurve mit der zugehörigen φ^7 ergeben, sind Doppeltangenten der Büschelkurven, die sie in F_{ij} berühren. Andere

Doppeltangenten durch F_i sind offenbar nicht möglich. Also ergibt sich:

Durch jeden einfachen Grundpunkt des Büschels laufen 2 Strahlen, die Doppeltangenten der sie in diesem Grundpunkt berührenden Büschelkurven sind.

7. In dem Strahlenbüschel um irgend einen Punkt P ergibt sich eine Korrespondenz folgendermaßen:

Irgend ein durch P gehender Strahl σ wird von 6 Büschelkurven berührt; an jede von diesen gehen von P aus noch 5 Tangenten σ'; die Korrespondenz (σ, σ') ist also vom Typus (30, 30) mit 60 Koinzidenzen. Zu diesen gehören die von P nach den 3 Punkten W und den 3 Punkten Y, den Doppelpunkten der zerfallenden Büschelkurven gezogenen Strahlen, sowie die in P an die durch P bestimmte Büschelkurve gelegte Tangente. Ferner ist, wie leicht einzusehen, jede durch P laufende Wendetangente des Büschels eine 3fache und jede von P an eine Büschelkurve gehende Doppeltangente eine doppelte Koinzidenz dieser Korrespondenz. Da nun von P 15 Wendetangenten an das Büschel ausstrahlen, bleiben 8 Koinzidenzen übrig, und es gibt also im allgemeinen 4 Doppeltangenten, die von P an das Büschel gehen:

Durch irgend einen Punkt der Ebene gehen 4 Doppeltangenten an Kurven des Büschels.

8. Um die Kurve zu bestimmen, die von den Wendepunkten der Büschelkurven erfüllt wird, denken wir uns das Büschel durch eine quadratische Transformation mit den Grundpunkten A, B, C in ein Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten G_1, G_2, G_3, G_4 übergeführt und haben dann die Kurve zu bestimmen, die von den Punkten erfüllt wird, in denen sich Kegelschnitte dieses Büschels mit Kegelschnitten des durch die Punkte A, B, C festgelegten Kegelschnittnetzes 3punktig berühren.

Jeder Kegelschnitt des Büschels wird, wie man leicht einsieht, von 6 Kegelschnitten des Netzes 3punktig berührt in Übereinstimmung damit, daß jede Kurve unseres Büschels 4ter Ordnung 6 Wendepunkte besitzt. Man zeigt ferner leicht, daß 3 Kegelschnitte des Büschels in einem Punte G_i von je einem Kegelschnitt des Netzes oskuliert werden. Denn zieht man einen Strahl σ durch G_i, so wird dieser in G_i von einem Kegelschnitt des Büschels und einem des Netzes berührt, die

sich noch in 2 Punkten schneiden. Wie man sich leicht überzeugt, beschreiben diese beiden Punkte eine Kurve 4ter Ordnung mit einem 3fachen Punkt in G_i, wenn man σ um G_i dreht.

Die Punkte G sind also 3fache Punkte der zu untersuchenden Kurve, die somit jeden Kegelschnitt des Büschels in $4 \cdot 3 + 6 = 18$ Punkten schneidet und folglich 9ter Ordnung ist. Sie heiße die C^9.

Durch den Punkt A z. B. ist ein Kegelschnitt des Büschels bestimmt, und es gibt einen bestimmten Kegelschnitt des Netzes, der diesen in A 3punktig berührt. Die C^9 enthält also die 3 Grundpunkte des Netzes. Der durch den Punkt A bestimmte Kegelschnitt des Büschels heiße α. In irgend einem seiner Punkte P wird er von einem Kegelschnitt des Netzes berührt, der α außer in A noch in einem Punkte Q schneidet. Durch irgend einen Punkt Q von α gehen aber 2 Kegelschnitte des Netzes, die α in einem von Q verschiedenen Punkt berühren. Die Korrespondenz P/Q ist also eine vom Typus (1, 2) mit 3 Koinzidenzen, so daß es 3 Kegelschnitte des Netzes gibt, die α ausser in A 3punktig berühren. Demnach entfallen von den 6 Schnittpunkten, die ein Kegelschnitt des Büschels außer den Grundpunkten G mit der C^9 gemein hat, 3 auf den Punkt A, so daß also der Kegelschnitt α die C^9 in A oskuliert.

Wir betrachten ferner einen zerfallenden Kegelschnitt des Büschels, etwa das Geradenpaar $G_1\ G_2$, $G_3\ G_4$, deren Schnittpunkt D_1 heisse. Dann gibt es einen Kegelschnitt des Netzes, der die $G_1\ G_2$ in D_1 berührt und folglich mit dem Geradenpaar in D_1 3 zusammenfallende Schnittpunkte hat ebenso wie der Netzkegelschnitt, der die $G_3\ G_4$ in D_1 berührt. Demnach ist D_1 ein Doppelpunkt der C^9.

Wir nehmen nun etwa auf der $G_1\ G_2$ irgend einen Punkt Q an; er bestimmt mit A, B, C ein Kegelschnittbüschel, aus dem 2 Kegelschnitte die $G_3\ G_4$ berühren. Eine Koinzidenz von Q mit einem dieser Berührungspunkte würde nach früherem einen Schnitt der $G_3\ G_4$ mit der C^9 bedeuten. Rückt nun aber Q in den Punkt D_1, so koinzidiert er mit beiden Berührungspunkten; wir schließen daraus, daß die $G_3\ G_4$ und ebenso die $G_1\ G_2$ die C^9 in D_1 berühren.

Wir wählen nun irgend einen Punkt P auf der AB. Das Kegelschnittbüschel, das durch A, B, C und P festgelegt wird,

ist besonderer Art, denn jede Kurve des Büschels zerfällt in die AB und eine Gerade des Strahlenbüschels C. Durch P ist ferner ein Kegelschnitt $\varkappa$ des Büschels mit den Grundpunkten G bestimmt, und der Punkt P ist dann ein Punkt der C^9, wenn entweder $\varkappa$ die AB in P berührt, oder wenn $\varkappa$ die CP berührt, denn in beiden Fällen fallen 3 Schnittpunkte eines Netzkegelschnitts mit einem Büschelkegelschnitt zusammen. Unser Büschel mit den Grundpunkten G werde mit [G] bezeichnet. Es gibt 2 Kegelschnitte in ihm, die die AB berühren; einer von diesen heiße wieder $\varkappa$ und sein Berührungspunkt auf der AB T. Durch irgend einen Punkt Q auf ihm und die Punkte A, B, C wird ein Kegelschnittbüschel bestimmt, und es läßt sich leicht zeigen, daß es im allgemeinen 4 Kurven dieses Büschels gibt, die $\varkappa$ außer in Q berühren. Einer dieser Kegelschnitte ist aber hier stets leicht anzugeben, nämlich der aus den Geraden AB und CQ bestehende, der $\varkappa$ in T berührt. Lassen wir nun Q in den Punkt T fallen, so besteht jeder durch A, B, C und T gehende Kegelschnitt wieder aus AB und einer Geraden durch C, und es gibt dann 2 von diesen Kegelschnitten, die $\varkappa$ außer in T berühren, nämlich die, die sich aus der AB und je einer der beiden von C an $\varkappa$ gehenden Tangenten zusammensetzen. Die beiden anderen Berührungspunkte sind daher in den Punkt T gefallen, und dieser zählt also als doppelte Koinzidenz von Q mit einem jener Berührungspunkte, so daß die C^9 die $\varkappa$ und folglich auch die AB in T berührt.

Die Berührungspunkte der von C an die Kegelschnitte des Büschels [G] gehenden Tangenten liegen auf einer Kurve dritter Ordnung, und ihre 3 Schnittpunkte mit der AB sind die Punkte P, in denen der durch P gehende Kegelschnitt des Büschels [G] von der CP berührt wird. In ihnen haben wir also die noch fehlenden Schnittpunkte der C^9 mit der AB. Wir haben folglich gefunden:

Die Punkte, in denen Kegelschnitte eines gegebenen Büschels mit den Grundpunkten G_i ($i = 1, 2, 3\ 4$) Kegelschnitte eines gegebenen Netzes mit 3 festen Grundpunkten A, B, C oskulieren, ist eine Kurve 9. Ordnung, die in den Punkten G 4 3fache Punkte besitzt, durch A, B, C geht und in A z. B. den durch A bestimmten Büschelkegelschnitt oskuliert. Die 3 Doppelpunkte des Büschels sind zugleich Doppelpunkte der Kurve, und die 3

Geradenpaare des Büschels die Tangenten in diesen Doppelpunkten. Die Kurve berührt die AB in den beiden Punkten, in denen sie von Kegelschnitten des Büschels berührt wird, und schneidet die AB noch in den 3 Punkten, in denen die AB von der Kurve 3. Ordnung geschnitten wird, die die Berührungspunkte der von C an die Kegelschnitte des Büschels gezogenen Tangenten enthält.

9. Wenn wir die eben erhaltene Kurve C^9 vermöge der quadratischen Transformation mit den Grundpunkten A, B, C, die wir oben angewandt haben, transformieren, erhalten wir die Kurve der Wendepunkte des Büschels 4. Ordnung. Es ergibt sich leicht aus den bekannten Beziehungen zwischen der Ordnung und der Vielfachheit der Grundpunkte zweier Kurven, die sich in einer quadratischen Transformation entsprechen, daß diese Kurve von der 15. Ordnung ist, sie heiße J^{15}, und daß jeder der Punkte A, B, C für sie ein 7facher ist. Da die C^9 z. B. die AB in den beiden Punkten berührte, in denen diese von Kegelschnitten des Büschels [G] berührt wurde, hat die J^5 in C 2 Spitzen, deren Rückkehrtangenten zusammenfallen mit den Rückkehrtangenten der beiden Büschelkurven, die in A eine Spitze haben.

In den 3 Punkten, in denen die C^9 die BC außer in B und C schnitt, berührte der von A nach einem dieser Punkte gezogene Strahl den durch ihn bestimmten Büschelkegelschnitt, folglich muß der diesem Strahl in der Transformation entsprechende eine Wendetangente der dem Büschelkegelschnitt entsprechenden Kurve des Büschels 4. Ordnung sein. Demnach sind die durch A gehenden 3 Wendetangenten dieses Büschels gleichzeitig Tangenten der J^{15} in diesem Punkte.

Da die C^9 den durch A bestimmten Büschelkegelschnitt in A dreipunktig berührte, schneidet die J^{15} die Gerade BC außer in B und C noch in dem Punkte W_a und berührt in ihm die durch W_a gehende Kurve 3. Ordnung des Büschels.

Die C^9 hatte etwa in G_1 einen dreifachen Punkt, folglich besitzt auch die J^{15} in F_1 einen solchen, und, wie leicht einzusehen, sind die Tangenten in diesem Punkte zugleich die Wendetangenten der 3 Kurven 4. Ordnung in diesem Punkte, die nach früherem in ihm einen Wendepunkt haben. Ebenso ergibt sich leicht aus dem Verhalten der C^9 zu den Doppelpunkten des Kegelschnittsbüschels [G], daß die J^{15} in jedem der 3 Punkte Y einen Doppelpunkt hat, in dem sie die beiden

durch diesen Punkt gehenden Kegelschnitte des Büschels 4. Ordnung berührt. Die von den Grundpunkten des Büschels verschiedenen 6 Schnittpunkte einer Kurve 4. Ordnung mit der J^{15} sind ihre Wendepunkte. Folglich hat sich ergeben:

Die Kurve J^{15}, die von den Wendepunkten des Büschels 4. Ordnung erfüllt wird, ist von der 15. Ordnung. Jeder der Punkte A, B, C ist ein 7facher Punkt der Kurve, der sich zusammensetzt aus 2 Spitzen, deren Rückkehrtangenten zusammenfallen mit den Rückkehrtangenten der beiden Büschelkurven, die in dem Punkt eine Spitze haben, und einem 3fachen Punkt, dessen Tangenten die Wendetangenten der 3 Büschelkurven sind, die in dem Punkte einen Wendeknoten haben. Die J^{15} schneidet die Seiten des Dreiecks ABC außer in den Ecken in den Punkten W_a, W_b, W_c und berührt in ihnen die 3 Kurven 3. Ordnung des Büschels. Jeder der 4 Grundpunkte F ist für die Kurve ein 3facher Punkt, dessen Tangenten die Wendetangenten der Büschelkurven sind, die in dem Punkte einen Wendepunkt haben, und jeder der 3 Punkte Y ist ein Doppelpunkt der Kurve, in dem sie die beiden durch diesen Punkt gehenden Kegelschnitte des Büschels 4. Ordnung berührt.

10. Wir gehen wieder zu dem Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten G und dem Netz mit den Grundpunkten A, B, C zurück und bestimmen die Kurve, die von den Berührungspunkten der Kegelschnitte des Büschels und Netzes erfüllt wird, die eine doppelte Berührung haben.

Wie man sich leicht überzeugt, wird ein Kegelschnitt des Büschels [G] im allgemeinen von 4 Kegelschnitten des Netzes doppelt berührt. Wie ferner schon früher bemerkt wurde, erfüllen die von G_i verschiedenen Schnittpunkte der sich in G_i berührenden Kegelschnitte des Büschels und des Netzes eine Kurve 4. Ordnung mit einem 3fachen Punkte in G_i, auf der jene Schnittpunkte eine Involution erzeugen. Die Doppelpunkte dieser Involution sind Berührungspunkte zweier Kegelschnittpaare, die sich außerdem in G_i berühren.

Folglich hat die zu untersuchende Kurve in G_i einen Doppelpunkt und ist demnach von der 8. Ordnung. Sie heiße die C^8. Ist A′ der Berührungspunkt der BC mit einem der beiden Kegelschnitte des Büschels [G], die die BC berühren, und sind t_1 und t_2 die von A an diesen Kegelschnitt gezogenen Tangenten, so wird dieser von den beiden Geradenpaaren

BC/t_1 und BC/t_2 des Netzes doppelt berührt, so daß A' ein Doppelpunkt der C^8 ist.

Durch den Punkt A ist der Kegelschnitt α des Büschels [G] bestimmt. Von den 4 Kegelschnitten des Netzes, die α doppelt berühren, fallen je 2 zusammen in die beiden Kegelschnitte des Netzes, die α in A und noch einem Punkte berühren. Demnach berührt die C^8 den Kegelschnitt α in diesen beiden von A verschiedenen Punkten und hat in A 2 zusammenfallende Doppelpunkte oder einen Berührungsknoten, d. h. es berühren 2 Äste der C^8 in A einander und den Kegelschnitt α. Irgend ein Geradenpaar des Büschels wird bekanntlich von 4 Kegelschnitten des Netzes (A, B, C) doppelt berührt. Die C^8 geht durch diese $6 \cdot 4$ Berührungspunkte. Demnach hat sich ergeben:

Die Kurve der Berührungspunkte der Kegelschnitte eines Kegelschnittbüschels und eines Kegelschnittnetzes mit 3 festen Grundpunkten A, B, C, die eine doppelte Berührung haben, ist eine 8. Ordnung C^8, die in jedem der 4 Grundpunkte des Büschels und in jedem der 3 mal 2 Punkte, in denen die Seiten des Dreiecks ABC von Kegelschnitten des Büschels berührt werden, einen Doppelpunkt hat. In jeder Ecke des Dreiecks ABC berühren 2 Äste der Kurve den Kegelschnitt des Büschels, der durch sie bestimmt ist. Die C^8 enthält ferner die $6 \cdot 4$ Punkte, in denen die drei Geradenpaare des Büschels von Kegelschnitten des Netzes doppelt berührt werden.

11. Wir transformieren nun wieder die C^8 mit Hilfe unserer quadratischen Transformation, die A, B, C zu Fundamentalpunkten hat und die Punkte G in die Punkte F transformiert. Dann ergibt sich in ähnlicher Weise wie oben bei der C^9:

Die Kurve, die die Berührungspunkte der Doppeltangenten des Büschels 4. Ordnung erfüllen, von denen jede Kurve 4 besitzt, ist 10. Ordnung. In jedem der Punkte A, B, C berühren je 2 Äste der Kurve die Rückkehrtangenten der beiden Büschelkurven, die in dem Punkt eine Spitze haben, so daß der Punkt als 4facher Punkt zählt, in dem 2 mal 2 Doppelpunkte zusammengefallen sind. Die 4 einfachen Grundpunkte F des Büschels sind Doppelpunkte der Kurve und ebenso die 3 Punkte W_a, W_b, W_c, in denen die in dem Büschel enthaltenen Kurven 3. Ordnung die Seiten des Dreiecks ABC

schneiden; sie berührt ferner diese Kurven 3. Ordnung in den Berührungspunkten der 3 mal 2 Tangenten, die an sie von den Punkten W_a, W_b, W_c aus gezogen werden können, und geht durch die 24 Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten der 3 Kegelschnittpaare des Büschels.

12. Wir haben als Kurve der Punkte, in denen sich Kegelschnitte eines Büschels und eines Netzes mit 3 festen Punkten 3punktig berühren, die C^9 erkannt und als Kurve der Punkte, in denen sich Kegelschnitte des Büschels und Netzes doppelt berühren, die C^8. Es ist klar, daß die Punkte, in denen sich Kegelschnitte des Büschels und Netzes 4punktig berühren, auf beiden Kurven gelegen sein müssen.

Wir stellen zunächst die Zahl der in die Grundpunkte des Büschels und Netzes fallenden Schnittpunkte fest. Ein Punkt G_i war für die C^9 3fach, für die C^8 doppelt, so daß auf die Grundpunkte des Büschels 24 Schnittpunkte kommen. In A etwa berührt die C^9 2 Äste der C^8, und in den Grundpunkten des Netzes liegen somit 12 Schnittpunkte der beiden Kurven. Die C^9 berührte ferner die AB in den beiden Doppelpunkten der auf ihr durch das Büschel bestimmten Involution, während die C^8 diese Punkte zu Doppelpunkten hat. Auf die Doppelpunkte der Involutionen auf den Seiten des Dreiecks ABC kommen folglich $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ Schnittpunkte. Ziehen wir diese 48 Schnittpunkte von den $9 \cdot 8$ ab, so bleiben 24 übrig. Es ist nun leicht einzusehen, daß die Kegelschnitte des Büschels und Netzes, die eine 4punktige Berührung haben, in diesen Berührungspunkten die C^9 wie die C^8 berühren, so daß sich auch diese beiden Kurven in einem solchen Punkte berühren. Die C^9 und die C^8 haben also außer den oben abgerechneten Schnittpunkten noch 12 Punkte gemein, in denen sie sich berühren, und es ergibt sich:

Es gibt 12 Punkte, in denen je ein Kegelschnitt eines Büschels von einem Kegelschnitt eines Netzes mit 3 festen Punkten vierpunktig berührt wird.

Hieraus folgt, daß auch die J^{15} und die D^{10} sich in 12 nicht in den Grundpunkten des Büschels 4. Ordnung noch auf den Seiten des Dreiecks ABC gelegenen Punkten berühren, und diese 12 Punkte sind die Undulationspunkte des Büschels 4. Ordnung, in denen die Tangente an die durch sie bestimmten Büschelkurven 4 Punkte mit der Kurve gemein hat.

13. Im Folgenden behandeln wir den Fall, daß die Doppelpunkte A, B, C des Büschels 4. Ordnung die Diagonalpunkte des von den einfachen Grundpunkten F_i ($i = 1, 2, 3, 4$) gebildeten Vierecks sind, und zwar sei A der Schnittpunkt von F_1F_2 und F_3F_4, B der von F_1F_3 und F_2F_4 und C der von F_1F_4 und F_2F_3.

Wir bestimmen wieder zuerst die zerfallenden Kurven des Büschels. Es ist leicht einzusehen, daß z. B. die Kurve dritter Ordnung des Büschels allgemeinerer Art, die in C einen Doppelpunkt hat, mit dem Kegelschnittpaar (A, B, C, F_1, F_4), (A, B, C, F_2, F_3) des allgemeineren Büschels hier zusammenfällt in die Doppelgerade AB und das Geradenpaar F_1F_4, F_2F_3. Die beiden anderen zerfallenden Büschelkurven sind die Doppelgerade AC mit dem Geradenpaar F_1F_3, F_2F_4 und die Doppelgerade BC mit dem Geradenpaar F_1F_2, F_3F_4.

Demnach sind 3 von den 6 Koïnzidenzen der Involution 4. Ordnung, die durch das Büschel auf irgend einer Geraden festgelegt ist, die Schnittpunkte der Geraden mit den Seiten des Dreiecks ABC, so daß eine beliebige Gerade von 3 nicht zerfallenden Kurven des Büschels berührt wird.

Es folgt ferner für die Strahleninvolution, die etwa von den Doppelpunktstangenten des Punktes A gebildet wird, daß ihre Doppelstrahlen durch die Geraden AB und AC dargestellt werden, so daß es in diesem Büschel keine nicht zerfallende Kurve mit einer Spitze gibt.

Auf irgend einer Geraden durch A erzeugen die von A verschiedenen Schnittpunkte der Büschelkurven eine Involution, die leicht zu bestimmen ist. Denn einer ihrer Doppelpunkte ist der Schnittpunkt der Geraden mit BC, und die Gegenseitenpaare des Vierecks $F_1F_2F_3F_4$, die sich in B und C schneiden, erzeugen je ein Punktepaar der Involution. Dann aber ist, wie leicht einzusehen, A der zweite Doppelpunkt der Involution. Folglich ist jeder durch A gehende Strahl eine Wendetangente der Büschelkurve, die ihn in diesem Punkte berührt, und es ergibt sich:

Die 6 Wendetangenten einer Kurve 4. Ordnung, die durch die Ecken eines Vierecks geht und seine Diagonalpunkte zu Doppelpunkten hat, sind die 3 Doppelpunktstangentenpaare der Kurve.

14. Wir ziehen ferner wieder irgend einen Strahl σ durch einen Punkt P, der von 3 nicht zerfallenden Kurven des

Büschels berührt wird. Die Berührungspunkte dieser Kurven beschreiben, wenn σ um P gedreht wird, eine Kurve 4. Ordnung, von der man ähnlich wie im allgemeineren Falle folgendes nachweist:

Die von einem Punkte P an die Kurven eines Büschels der vorliegenden Art gezogenen Tangenten berühren die Kurven in Punkten einer Kurve 4. Ordnung γ^4, die die durch P bestimmte Büschelkurve in P berührt und durch die einfachen wie die doppelten Grundpunkte des Büschels geht, jede von den 4 Geraden PF_i in F_i berührt und mit den Geraden PA, PB und PC in A, B, C je 3 Punkte gemein hat. Die Kurve schneidet schließlich z. B. die AB außer in A und B in den beiden zu ihnen harmonisch gelegenen Punkten C′ und C″, in denen sie von den durch C gehenden Gegenseiten des Vierecks $F_1F_2F_3F_4$ geschnitten wird.

Die eben beschriebene Kurve wird von besonders einfacher Natur, wenn als P einer der einfachen Grundpunkte F des Büschels gewählt wird. Man zeigt nämlich leicht, daß die γ^4 für jeden dieser Punkte zerfällt, indem sich bei F_1 z. B. von ihr die Geraden F_1F_2, F_1F_3 und F_1F_4 ablösen, so daß eine Gerade übrig bleibt, und es ergibt sich folgendes:

Die etwa von der Ecke F_1 des Vierecks $F_1F_2F_3F_4$ an die Kurven 4. Ordnung gezogenen Tangenten, die durch die Ecken des Vierecks als einfache und seine Diagonalpunkte A, B, C als doppelte Punkte gehen, berühren diese Kurven in Punkten einer Geraden, die die 3 Punkte verbindet, in denen die Seiten des Dreiecks $F_2F_3F_4$ die des Dreiecks ABC außer in seinen Ecken schneiden.

15. Die Kurve, die die Berührungspunkte der Doppeltangenten des Büschels 4. Ordnung erfüllen, bei dem die 3 Doppelpunkte unabhängig von den 4 einfachen Grundpunkten sind, hatten wir als eine Kurve 10. Ordnung erkannt, bei der in jedem der festen Doppelpunkte A, B, C 2 Äste die Rückkehrtangenten der beiden Büschelkurven berühren, die in dem Punkt eine Spitze haben. In dem vorliegenden speziellen Falle sind diese beiden Büschelkurven, die etwa in A eine Spitze haben, die beiden zerfallenden Büschelkurven, zu denen die Geraden AB und AC je doppelt gehören.

Nun ist aber klar, daß wenn eine zerfallende Büschelkurve als einen Bestandteil eine Doppelgerade aufweist, diese sich

auch von der Kurve der Berührungspunkte der Doppeltangenten des Büschels ablösen muß.

Wir haben aber oben gesehen, daß z. B. die zerfallende Büschelkurve, die aus der Doppelgeraden AB und dem Geradenpaar F_1F_4, F_2F_3 besteht, als zerfallende Büschelkurve doppelt zu zählen ist, so daß sich also auch AB doppelt von der Kurve der Berührungspunkte der Doppeltangenten ablöst. Da sich in gleicher Weise von ihr AC und BC doppelt ablösen, so ist die Restkurve 4. Ordnung. Da aber oben gezeigt wurde, daß die Kurve der Berührungspunkte der Doppeltangenten die 4 einfachen Grundpunkte des Büschels zu Doppelpunkten hat, so muß die Restkurve 4. Ordnung in 2 Kegelschnitte zerfallen, die durch die 4 Punkte F gehen.

Demnach hat sich ergeben:

Die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Kurven 4. Ordnung, die die Ecken eines Vierecks zu einfachen und seine 3 Diagonalpunkte zu doppelten Punkten haben, erfüllen 2 Kegelschnitte, die dem Viereck umschrieben sind, und die auf diese Weise eindeutig aufeinander bezogen werden. Ihr Erzeugnis ist die Kurve 4. Klasse, die von jenen Doppeltangenten eingehüllt wird.

März 1906.

13. Im I aß die Doppel-
punkte A, B)iagonalpunkte
des von den 3, 4) gebildeten
Vierecks sin von F_1F_2 und
F_3F_4, B der $_1F_4$ und F_2F_3.

Wir bes en Kurven des
Büschels. E Kurve dritter
Ordnung des einen Doppel-
punkt hat, m $_1$, F_4), (A, B,
C, F_2, F_3) usammenfällt
in die Doppe F_1F_4, F_2F_3.
Die beiden a d die Doppel-
gerade AC m l die Doppel-
gerade BC m

Demnach er Involution
4. Ordnung, iner Geraden
festgelegt ist, den Seiten
des Dreiecks von 3 nicht
zerfallenden K

Es folgt f e etwa von
den Doppelpu t wird, daß
ihre Doppelstr C dargestellt
werden, so da zerfallende
Kurve mit ein

Auf irgen die von A
verschiedenen e Involution,
die leicht zu b oppelpunkte
ist der Schnitt egenseiten-
paare des Vier schneiden,
erzeugen je ein aber ist,
wie leicht einz Involution.
Folglich ist jed ndetangente
der Büschelkur rt, und es
ergibt sich:

Die 6 Wen die durch
die Ecken eine lpunkte zu
Doppelpunkten enpaare der
Kurve.

14. Wir zie hl σ durch
einen Punkt F Kurven des