Die Γ-Funktion für komplexes Argument.

(Fortsetzung.)

Bei Benützung der von Legendre gegebenen Integraldefinition:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x} x^{u-1} dx$$

ist zu berücksichtigen, daß dieses bestimmte Integral nur dann eine eindeutige Funktion des Argumentes: $u = \alpha + \imath\beta$ definiert, wenn der reelle Teil von u:

$$\alpha > o;$$

denn, setzt man in obiger Definition: $u = \alpha + \imath\beta$, so ist

$$\Gamma(\alpha + \imath\beta) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha + \beta i - 1} dx.$$

Zufolge der Gleichung: $x = e^{lx}$, wird nun

$$x^{\alpha - 1 + \beta i} = x^{\alpha - 1} . e^{\beta i l x} = x^{\alpha - 1} e^{i l (x^\beta)}$$

und

$$x^{\alpha - 1} e^{i l (x^\beta)} = x^{\alpha - 1} \left[cos \left[l (x)^\beta \right] + \imath \, sin \left[l (x^\beta) \right] \right]$$

mit Verwendung der Moivreschen Formel:

$$e^{i\varphi} = cos\, \varphi + i \, sin\, \varphi.$$

Es ist also $\Gamma(u)$ in der Form darstellbar:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha - 1} \left[cos \left[l (x^\beta) \right] + i \, sin \left[l (x^\beta) \right] \right] dx$$

oder:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha - 1} cos \left[l (x^\beta) \right] dx + i \int_0^\infty e^{-x} . x^{\alpha - 1} sin \left[l (x^\beta) \right] dx.$$

Da aber jedes der beiden Integrale auf der rechten Seite unserer letzten Gleichung nur unter der Bedingung: $\alpha > o$ besteht, so ist diese Bedingung auch jene für die Existenz der Funktion $\Gamma(u)$. Durch das Eulersche Integral zweiter Art wird also eine eindeutige Funktion nur für den Teil der Ebene dargestellt, welcher rechts von der imaginären Achse Oy liegt. Aus dieser Definition der Funktion $\Gamma(u)$ in der genannten Halbebene kann man nun die Existenz einer in der ganzen Ebene eindeutigen, analytischen Funktion ableiten, die mit $\Gamma(u)$ in deren Definitionsbereich übereinstimmt. Setzt man nämlich unter der Voraussetzung, daß ω eine reelle positive Größe ist:

$$\Gamma(u) = P(u) + Q(u)$$

und

$$P(u) = \int_0^\omega e^{-x} x^{u-1} dx, \quad Q(u) = \int_\omega^\infty e^{-x} x^{u-1} dx,$$

so zeigt es sich, daß $Q(u)$ in der ganzen Ebene eindeutig und stetig ist, während $P(u)$ auch nur für den reellen Teil von u:

$$\alpha > o$$

definiert ist. Entwickelt man aber in der Funktion $P(u)$ den Faktor e^{-x} in eine Reihe, so nimmt $P(u)$ die Form an:

$$P(u) = \frac{\omega^u}{u} - \frac{\omega^{u+1}}{u+1} + \frac{1}{2!}\,\frac{\omega^{u+2}}{u+2} - \cdots\cdots,$$

aus welcher hervorgeht, daß $P(u)$ für jeden Wert von u konvergiert, wenn er nur von Null oder einer negativen ganzen Zahl verschieden ist. Diese Zerlegung der Funktion $\Gamma(u)$ in die beiden Funktionen $P(u)$ und $Q(u)$ bildet den Ausgangspunkt der zweiten Methode zur Erweiterung der Γ-Funktion für komplexes Argument und rührt von Gasparis her, während Prym aus dieser Zerlegung die bemerkenswertesten Folgerungen zieht. Letzterer benützt in seiner im Crelleschen Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 82 erschienenen Abhandlung, betitelt: „Zur Theorie der Γ-Funktion" sowohl die von Gauß gegebene Produktdefinition, als auch die Legendresche Integraldefinition der Γ-Funktion, schließlich auch das von Weierstraß gefundene Ergebnis, daß $\Gamma(u)$ eine eindeutige Funktion der komplexen Veränderlichen u ist, die mit Ausnahme der Stellen: $y = 0$, -1, -2, . . ., wo sie unendlich groß wird, und mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes der Zahlenebene, in welchem sie eine Unstetigkeit der dritten Art aufweist, in der ganzen Ebene überall sonst stetig ist.

Es kann nun im Anschlusse an die von Gauß und Weierstraß gegebene Definition von $\Gamma(u)$:

$$\Gamma(u) = \lim_{n=\infty} P(u, n) = \lim_{n=\infty} \frac{(n-1)\,n^u}{u\,(u+1)\ldots(u+n-1)},$$

wo dem n^u jener Wert der Reihe:

$$n^u = e^{u\,l\,n} = 1 + u\,l\,n + \frac{u^2}{2}\,l^2(n) + \cdots\cdots$$

beizulegen ist, welcher dem reell gewählten Logarithmus der positiven, ganzen Zahl n entspricht, zunächst die Relation:

$$\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u)$$

bewiesen werden für alle u mit Ausnahme der Werte: $u = 0, -1, -2, \ldots$, da für diese Werte $\Gamma(u)$ keine Bedeutung hat. Es ist nämlich:

$$P(u+1, n) = \frac{(n-1)\,n^{u+1}}{(u+1)\,(u+2)\,..\,(u+n)} = \frac{(n-1)\,n^u}{u\,(u+1)\,..\,(u+n-1)} \cdot \frac{u}{u+n},$$

$$P(u+1, n) = u\,P(u, n)\,\frac{1}{1+\frac{n}{u}},$$

$$\lim_{n=\infty} P(u+1, n) = u \lim_{n=\infty} P(u, n) \text{ oder}$$

$$\underline{\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u).}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser eben gefundenen Relation ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u)$$
$$\Gamma(u+2) = (u+1)\;\Gamma(u+1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma(u+n-1) = (u+n-2)\;\Gamma(u+n-2)$$
$$\Gamma(u+n) = (u+n-1)\;\Gamma(u+n-1),$$

deren Multiplikation mit einander zu dem Resultate führt, daß:

$$\Gamma(u+n) = u\,(u+1)\,(u+2)\ldots(u+n-1)\;\Gamma(u)$$

oder
$$\frac{\Gamma(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = \frac{u\,(u+1)\ldots(u+n-1)}{(n-1)!\,n^u}\cdot\Gamma(u) = \frac{\Gamma(u)}{P(u,n)}.$$

Daraus folgt wieder beim Übergang zur Grenze, daß

$$\lim_{n=\infty}\frac{\Gamma(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = \frac{\Gamma(u)}{\lim\limits_{n=\infty} P(u,n)} = \frac{\Gamma(u)}{\Gamma(u)} = 1,$$

welche Relation für jedes endliche u gilt.

Die Verwandschaft der Funktion $\Gamma(u)$ mit den rationalen Funktionen tritt, trotzdem sie sich nicht wie jene in ein Produkt von linearen Faktoren mit den Exponenten ± 1 zerlegen läßt, sondern im Zähler immer eine Exponentialfunktion $e^{u\,ln} = n^u$ enthält, doch in der Eigenschaft zutage, daß $\Gamma(u)$ durch eine Summe von Partialbrüchen und ganzen Potenzen von u, wie aus der Produktentwicklung der $\Gamma(u)$ ersichtlich ist, sich darstellen läßt. Im Anschluß an diese Eigenschaft der Funktion $\Gamma(u)$ zeigt nun Prym, daß die in Rede stehende Funktion in zwei einfache Funktionen zerlegbar ist, welche durch die $\Gamma(u)$ definierenden Gleichungen vollständig bestimmt werden können. Um zu dieser Darstellung zu gelangen, berücksichtige man, daß im Endlichen $\Gamma(u)$ nur für $u = 0, -1, -2, \ldots$ unstetig und zwar unendlich groß von der ersten Ordnung wird. Ist nun in $u' = u + \nu : \nu$ eine ganze positive Zahl mit Einschluß der Nullstelle, so ist:

$$\Gamma(u'+1) = (u+\nu)\;\Gamma(u') = (u+\nu)\;\Gamma(u+\nu)$$
$$\Gamma(u+\nu) = (u+\nu-1)\;(u+\nu-2)\ldots(u+1)\,u\,\Gamma(u).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma(u+\nu+1) = (u+\nu)\;(u+\nu-1)\ldots(u+1)\,u\,\Gamma(u).$$

Mithin ergibt sich aus der Zusammenfassung der letzten Gleichungen:

$$\Gamma(u) = \frac{\Gamma(u+\nu+1)}{u\,(u+1)\;(u+2)\,..\,(u+\nu)},$$

$$\lim_{u=-\nu}\Gamma(u)\,(u+\nu) = \lim_{u=-\nu}(u+\nu)\,\frac{\Gamma(u+\nu+1)}{u\,(u+1)\,..\,(u+\nu)},$$
$$= \lim_{u=-\nu}\frac{\Gamma(1)}{u(u+1)..(u+\nu-1)} = \lim\frac{\Gamma(1)}{-\nu(-\nu+1)..-2..-1} =$$
$$= \frac{\Gamma(1)}{(-1)^\nu.\,\nu!}.$$

Aus der letzten Gleichung nun:

$$\lim_{u=-\nu}(u+\nu)\;\Gamma(u) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}$$

folgt, daß $\Gamma(u) - \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(u-\nu)}$ für $u = -\nu$ stetig bleibt, wenn eine hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist.

Bildet man nun die unendliche Reihe:

$$P(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{1!\,(u+1)} + \frac{1}{2!\,(u+2)} - \frac{1}{3!\,(u+3)} + \ldots + \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(u+\nu)} + \ldots,$$

so konvergiert dieselbe für jedes u mit Ausnahme der Stellen $u = 0, -1, -2, \ldots$. Ist a eine von den letztgenannten verschiedene Stelle der Ebene, so läßt sich jedes Glied der Reihe für die Umgebung der Stelle a in eine nach aufsteigenden Potenzen von $(u-a)$ fortschreitende Reihe entwickeln, die für das Innere eines aus a als Mittelpunkt beschriebenen Kreises, der keine der Stellen $u = 0, -1, -2, \ldots$ einschließt, konvergiert. Auf diese Weise entsteht eine doppelte unendliche Reihe, die unbedingt konvergiert, da die ihr entsprechende Modulenreihe konvergiert. Diese so definierte Funktion $P(u)$ genügt nun folgenden Gleichungen:

1.) $\lim\limits_{n=\infty} \frac{P(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = 0$ für jedes endliche u,

2.) $P(u+1) = u\,P(u) - \frac{1}{e}$ nur für jene u, welche von den Werten $u = 0, -1, -2, \ldots$ verschieden sind, da nur für solche u: $P(u)$ eine Bedeutung hat. Die Richtigkeit der Gleichung 1.) erhellt aus der Eigenschaft der Funktion $P(u+n)$, für unbegrenzt wachsendes n gegen Null zu konvergieren, während der Modul von $(n-1)!\,n^u$ über alle Grenzen wächst, während sich die Richtigkeit der Gleichung 2.) an der Hand der Definitionsgleichung der Funktion $P(u)$ nachweisen läßt. Gemäß der Definition ist:

$$P(u+1) = \frac{1}{u+1} - \frac{1}{1!\,(u+2)} + \frac{1}{2!\,(u+3)} - \ldots + \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!\,(u+\nu)} + \ldots$$

und $$u\,P(u) = 1 - \frac{u}{1!\,(u+1)} + \frac{u}{2!\,(u+2)} - \ldots + \frac{(-1)^\nu u}{\nu!\,(u+\nu)} + \ldots$$

Bildet man nun die Differenz:

$$P(u+1) - u\,P(u) = -1 + 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} + \ldots$$

$$= -\left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots - \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} + \ldots\right],$$

so ist $P(u+1) - u\,P(u) = -\frac{1}{e}$, woraus sich ohne weiteres die Gleichung ergibt: $P(u+1) = u\,P(u) - \frac{1}{e}$.

Durch wiederholte Anwendung der letzten Gleichung ergibt sich zunächst folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} P(u+1) = u\,P(u) - \frac{1}{e} \\ P(u+2) = (u+1)\,P(u+1) - \frac{1}{e} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(u+n) = (u+n-1)\,P(u+n-1) - \frac{1}{e}, \end{cases}$$

in welchem man den einzelnen Gleichungen auch folgende Gestalt geben kann:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{P(u+1)}{u} = P(u) - \dfrac{1}{eu} \\ \dfrac{P(u+2)}{u+1} = P(u+1-) \dfrac{1}{e(u+1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{P(u+n)}{u+n-1} = P(u+n-1) - \dfrac{1}{e(u+n-1)}. \end{array}\right.$$

Ferner folgt aus den beiden Relationen:

$$\frac{P(u+1)}{u} = P(u) - \frac{1}{eu}$$

$$\frac{P(u+2)}{u(u+1)} = \frac{P(u+1)}{u} - \frac{1}{eu(u+1)}$$

leicht die Formel: $\dfrac{P(u+2)}{u(u+1)} = P(u) - \dfrac{1}{eu} - \dfrac{1}{eu(u+1)}$,

welche mit der Gleichung

$$\frac{P(u+3)}{u(u+1)(u+2)} = \frac{P(u+2)}{u(u+1)} - \frac{1}{eu(u+1)(u+2)}$$

zusammengefaßt zur Gleichung:

$$\frac{P(u+3)}{u(u+1)(u+2)} = P(u) - \frac{1}{eu} - \frac{1}{eu(u+1)} - \frac{1}{eu(u+1)(u+2)}$$

führt. Durch Wiederholung des hier angedeuteten Verfahrens gelangt man dann allgemein zur Beziehung:

$$\frac{P(u+n)}{u(u+1)\ldots(u+n-1)} = P(u) - \frac{1}{e}\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u(u+1)} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{u(u+1)\ldots(u+n-1)}\right].$$

Geht man nun für über alle Grenzen wachsendes n zur Grenze über und berücksichtigt, daß

$$\lim_{n=\infty} P(u+n) = 0,$$

so erhält man:

$$P(u) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{e}\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u(u+1)} + \cdots + \frac{1}{u(u+1)\ldots(u+n-1)}\right].$$

Also ist auch die Funktion:

$$eP(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{u(u+1)} + \cdots + \frac{1}{u(u+1)\ldots(u+n-1)} + \cdots$$

für die ganze Ebene durch die unendliche Reihe dargestellt.

Der Beweis dafür, daß die beiden Gleichungen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{P(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = 0$$

$$P(u+1 = uP(u) - \frac{1}{e}$$

für sich allein die Funktion $P(u)$ vollständig bestimmen, wird an einer späteren Stelle erbracht werden.

Bilden wir nun die Differenz $\Gamma(u) - P(u)$ und setzen wir

$$Q(u) = \Gamma(u) - P(u),$$

so ist $Q(u)$ als einwertige Funktion der komplexen Veränderlichen u aufzufassen mit Rücksicht auf ihre Zusammensetzung aus den eindeutigen Funktionen $P(u)$ und $\Gamma(u)$, welche im Endlichen nur für die Werte $u = 0, -1, -2, \ldots$ unstetig werden, aber so, daß

$$\lim_{u=-\nu}\left[\Gamma(u) - \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(u+\nu)}\right] \text{ und } \lim_{u=-\nu}\left[P(u) - \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(u+\nu)}\right]$$

bestimmte Größen sind. Definiert man $Q(u)$ für den Punkt $u = -\nu$ so, daß die Differenz $\Gamma(u) - P(u)$ immer den für $u = -\nu$ existierenden Grenzwert annimmt, so ist $Q(u)$ vollständig definiert als einwertige Funktion von u, die für jeden endlichen Wert des u stetig ist und nur in dem unendlich fernen Punkte eine Unstetigkeit zweiter Art aufweist. Infolgedessen läßt sich $Q(u)$ in eine für jeden Modul des u konvergierende unendliche Reihe entwickeln, so daß

$$Q(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots\ldots\ldots,$$

wobei unter den Größen $c_0, c_1, c_2 \ldots$ von u freie Konstanten zu verstehen sind. Nun ist bekanntlich unter der Voraussetzung, daß der reelle Teil von u größer als Null, also positiv ist:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-\xi}\,\xi^{u-1}\,d\xi$$

und ferner:

$$P(u) = \int_0^1 e^{-\xi}\cdot\xi^{u-1}\,d\xi;$$

denn:

$$e^{-\xi} = 1 - \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^2}{2!} - \frac{\xi^3}{3!} + \ldots \text{ und}$$

$$e^{-\xi}\,\xi^{u-1} = \xi^{u-1} - \frac{\xi^u}{1!} + \frac{\xi^{u+1}}{2!} - \frac{\xi^{u+2}}{3!} + \ldots\ldots,$$

also ist:

$$\int_0^1 e^{-\xi}\,\xi^{u-1}\,d\xi = \frac{1}{u} - \frac{1}{1!\,(u+1)} + \frac{1}{2!\,(u+2)} - \ldots = P(u).$$

Mithin nimmt $Q(u)$ folgende Form an:

$$Q(u) = \Gamma(u) - P(u) = \int_0^\infty e^{-\xi}\,\xi^{u-1}\,d\xi - \int_0^1 e^{-\xi}\,\xi^{u-1}\,d\xi = \int_1^\infty e^{-\xi}\,\xi^{u-1}\,d\xi.$$

Da ferner:

$$\xi^{u-1} = e^{(u-1)l\xi} = e^{ul\xi}\,e^{-l\xi} = \frac{e^{ul\xi}}{e^{l\xi}} = \frac{e^{ul\xi}}{\xi},$$

so ist:

$$e^{-\xi}\,\xi^{u-1} = \frac{e^{-\xi}}{\xi}\,e^{ul\xi} = \frac{e^{-\xi}}{\xi}\left[1 + \frac{z\,l\xi}{1!} + \frac{z^2 l^2 \xi}{2!} + \ldots\ldots\right]$$

und mithin ist:

$$Q(u) = \int_1^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi + \frac{u}{1!}\int_1^\infty e^{-\xi}\,l\xi\,\frac{d\xi}{\xi} + \ldots + \frac{u^\nu}{\nu!}\int_1^\infty e^{-\xi}\,l^\nu\xi\,\frac{d\xi}{\xi} + \ldots\ldots$$

Da wir aber früher:

$$Q(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \ldots$$

gesetzt haben, so folgt aus der Identität, daß

$$c_\nu = \frac{1}{\nu!} \int_1^\infty e^{-\xi} l^\nu \xi \frac{d\xi}{\xi}.$$

Daß auch $Q(u)$ für jedes endliche u den Gleichungen genügt:

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = 1,$$

$$Q(u+1) = u\, Q(u) + \frac{1}{c},$$

welche, wie später gezeigt wird, die Funktion $Q(u)$ vollständig bestimmen, wenn zu dem für $z = 0$ eine hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist, läßt sich folgendermaßen nachweisen: Es ist

$$Q(u+n) = \Gamma(u+n) - P(u+n),$$

$$\frac{Q(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = \frac{\Gamma(u+n)}{(n-1)!\, n^u} - \frac{P(u+n)}{(n-1)!\, n^u},$$

da ferner $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\Gamma(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = 1$ und $\lim\limits_{n=\infty} \frac{P(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = 0$, so ist auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = 1.$$

Subtrahiert man ferner von der Gleichung:

$$\Gamma(u+1) = u\, \Gamma(u)$$

die Gleichung: $P(u+1) = u\, P(u) - \frac{1}{e}$, so erhält man:

$$Q(u+1) = \Gamma(u+1) - P(u+1) = u\, \Gamma(u) - u\, P(u) + \frac{1}{e} \text{ oder}$$

$$Q(u+1) = u \left[\Gamma(u) - P(u) \right] + \frac{1}{e} \text{ und somit;}$$

$$Q(u+1) = u\, Q(u) + \frac{1}{e}.$$

Ist nun bisher als Resultat der vorhergehenden Untersuchungen die Darstellbarkeit der Γ-Funktion durch eine Summe von Partialbrüchen und ganzen Potenzen von u nachgewiesen worden, so daß die Gleichung besteht:

$$\Gamma(u) = P(u) + Q(u),$$

so erübrigt es noch zu zeigen, daß die beiden Bedingungsgleichungen, die für $\Gamma(u)$, $P(u)$ und $Q(u)$ früher aufgestellt wurden, die Funktion $\Gamma(u)$, beziehungsweise $P(u)$, beziehungsweise $Q(u)$ vollständig bestimmen. Diese Behauptung ist nur ein spezieller Fall eines allgemeinen Falles, der sich folgendermaßen aussprechen läßt:

α) $S(u)$ sei ein dem Punkte u der Ebene zugeschriebenes Symbol, so daß nach dieser Bezeichnungsweise den äquidistanten Punkten: $u+1$, $u+2, \ldots u+n \ldots$ die Symbole $S(u+1)$, $S(u+2) \ldots S(u+n) \ldots$ zukommen.

β) Von einer durch das u, von dem man ausgeht, bestimmten ganzen Zahl n (die auch Null sein kann), möge sich $S(u+n)$ so ändern, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{S(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = k, \quad \ldots\ldots \text{ I.)}$$

wo k eine von z freie Konstante von beliebigem Werte bedeutet.

γ) $S(u)$ sei mit $S(u+1)$ durch die Gleichung verknüpft.

$$S(u+1) = u\,S(u) + l, \quad \ldots\ldots \text{ II.)}$$

wo l wieder als eine von u freie, beliebige Konstante aufzufassen ist, und zwar in dem Sinne, daß die letzte Gleichung $S(u+1)$ oder $S(u)$ erklärt und bestimmt, je nachdem feststeht, daß $S(u)$ oder $S(u+1)$ für das betreffende u nicht bedeutungslos und überdies für $u=0$ eine hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist. Genügt $S(u)$ all diesen Bedingungen, so ist für jeden Punkt u der Ebene $S(u)$ von der Form:

$$S(u) = (k - le)\,P(u) + k\,Q(u).$$

Zunächst genügt $S(u)$ der Bedingung I.); denn:

$$\frac{S(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = (k-le)\frac{P(u+n)}{(n-1)!\,n^u} + k\frac{Q(u+n)}{(n-1)!\,n^u};$$

geht man ferner für $n=\infty$ zur Grenze über, so verschwindet das erste Glied auf der rechten Seite, während:

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = 1.$$

Somit ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{S(u+n)}{(n-1)!\,n^u} = k.$$

In analog einfacher Weise ist auch zu zeigen, daß $S(u)$ der Bedingung II. genügt. Es bleibt nunmehr nur noch übrig zu zeigen, daß jede Funktion $S(u)$, welche den Bedingungen I. und II. genügt, mit der Funktion $(k-le)\,P(u) + k\,Q(u)$ übereinstimmt. Zu diesem Zwecke wählt man ein u, das von $0, -1, -2, \ldots$ verschieden ist, dann läßt sich gemäß der Bedingung α.) dazu eine positive ganze Zahl n finden, so daß $S(u+n)$ eine bestimmte Zahl bedeutet, folglich nach II auch $S(u+n-1) \ldots S(u+1)$, $S(u)$, da u von 0 und $-1, -2, -3, \ldots$ verschieden vorausgesetzt ist. Damit ist bewiesen, daß $S(u)$ für jedes von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedene u einen bestimmten Wert hat. Schließt man weiters für u die Werte $u = 0, -1, -2, \ldots$ aus und wendet man Gleichung II n mal an, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
S(u+1) &= u\,S(u) + l \\
S(u+2) &= (u+1)\,S(u+1) + l \\
S(u+3) &= (u+2)\,S(u+2) + l \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S(u+n) &= (u+n-1)\,S(u+n-1) + l
\end{aligned}\right\}$$

und daraus:

$$\frac{S(u+1)}{u} = S(u) + \frac{l}{u},$$

$$\frac{S(u+2)}{u+1} = S(u+1) + \frac{l}{u+1},$$

$$\frac{S(u+2)}{u(u+1)} = \frac{l}{u} + \frac{l}{u(u+1)} + S(u),$$

$$\frac{S(u+3)}{u+2} = S(u) + S(u+2) + \frac{l}{u+2},$$

$$\frac{S(u+3)}{u(u+1)(u+2)} = l\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u(u+1)} + \frac{1}{u(u+1)(u+2)}\right] + S(u)$$

und schließlich allgemein:

$$S(z) = -l\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u(u+1)} + \cdot\cdot + \frac{1}{u(u+1)\,.\,.\,(u+n-1)}\right] -$$

$$-\frac{S(u+n)}{(n-1)!\,n^u} \cdot \frac{(n-1)!\,n^u}{u(u+1)\,(u+2)\,.\,.\,(u+n-1)}.$$

Läßt man nun n unbegrenzt wachsen, so wird der Wert von $S(u)$ und folglich auch der Wert der rechten Seite unserer Gleichung nicht beeinflußt und man findet:

$$S(u) = \lim_{n=\infty}\left[-l\left\{\frac{1}{u} + \cdot\cdot + \frac{1}{u(u+1)\,.\,.\,(u+n-1)}\right\}\right] + \lim_{n=\infty}\frac{S(u+n)}{(n-1)!\,n^u} \cdot$$

$$\cdot \lim \frac{(n-1)!\,n^u}{u(u+1)\,.\,.\,(u+n-1)}.$$

Da aber nach dem Früheren:

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u(u+1)} + \cdots + \frac{1}{u(u+1)\ldots(u+n-1)}\right] = e\,P(u),$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{S(u+n)}{(n-1)\,n^u} = k,$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{(n-1)!\,n^u}{u(u+1)\ldots(u+n-1)} = \lim_{n=\infty} P(u,n) = \Gamma(u) = P(u) + Q(u),$$

wird

$$S(u) = -el\,P(u) + k\,[P(u) + Q(u)] = (k + el)\,P(u) + k\,Q(u).$$

Es besitzt also $S(u)$ für jeden von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedenen Punkt der Ebene denselben Wert wie die Funktion $(k - el)\,P(u) + k\,Q(u)$. Bestimmen wir uns nun, um das Verhalten der Funktion $S(z)$ in den Punkten $u = 0, -1, -2, \ldots$ untersuchen zu können, vorerst den Wert für $S(1)$;

$$S(1) = (k - el)\,P(1) + k\,Q(1),$$

nun ist: $$P(1) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \cdots$$

und: $$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots$$

$$1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots = P(1) = 1 - e^{-1}$$

und: $Q(1) = \Gamma(1) - P(1) = 1 - 1 + e^{-1} = e^{-1}$. Mithin ist:

$$S(1) = (k - el)\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{k}{e} = k - el + l.$$

Untersucht man nun das Verhalten der Funktion $S(u)$ an den Stellen $u = 0, -1, -2, \ldots$ selbst, so sind zunächst die beiden Fälle zu unterscheiden:

1.) $k - el \neq 0$

2.) $k - el = 0$.

Ad 1.) In diesem Falle ist das Symbol $S(0)$ bedeutungslos; denn nach unserer früheren Bedingung II.) ist, wenn $S(0)$ eine Bedeutung hätte,

$$S(1) = 0\,S(0) + l = l,$$

während doch $S(1)$ den Wert $k - el + l$ besitzt. Zugleich mit $S(0)$ sind aber auch die Symbole $S(-1), S(-2)$ .. bedeutungslos; denn wäre $S(-v)$ eine bestimmte Zahl, so wären zufolge der Bedingung II.) auch $S(-v+1)$, $S(v+2) \ldots S(0)$ eine bestimmte Zahl; für $u = 0, -1, -2, ..$ ist aber auch $(k - el) P(u) + k Q(u)$ ohne Bedeutung. Es stimmt also in diesem Falle das Verhalten von $S(u)$ mit dem der Funktion $(k - le) P(u) + k Q(u)$ überein.

Ad 2.) Ist $k - el = 0$ oder $k = el$, so ist für alle u-Werte mit Ausnahme $u = 0, -1, -2, \ldots$

$$S(u) = k Q(u) = el Q(u).$$

Wäre $S(0)$ bedeutungslos oder hätte es einen von $el Q(0)$ verschiedenen Wert, so besäße $S(u)$, da $Q(u)$ für $u = 0$ stetig ist, in $u = 0$ entgegen unserer früheren Voraussetzung eine hebbare Unstetigkeit. Es ist also wirklich

$$S(0) = el Q(0).$$

Nun ist aber gemäß unserer früheren Voraussetzung:

$$S(u+1) = u S(u) + l$$

und für $u = -1$: $$S(0) = -S(-1) + l,$$

$$Q(0) = -Q(-1) + \frac{1}{e},$$

$$el Q(0) = -el Q(-1) + l \ldots\ldots S(-1) = el Q(-1),$$

für $u = -2$: $$S(-1) = -2 S(-2) + l,$$

$$Q(-1) = -2 Q(-2) + \frac{1}{e},$$

$$S(-1) = el Q(-1) = -2 el Q(-2) + l,$$

$$-2 S(-2) + l = -2 el Q(-2) \ldots\ldots S(-2) = el Q(-2) \text{ etc.}$$

$S(u)$ stimmt also in diesem Falle für jeden Punkt u der Ebene mit der Funktion $el Q(u) = k Q(u)$ überein und demnach auch mit der Funktion $(k - el) P(u) + k Q(u)$, da ja $k - el = 0$ ist. Damit ist also unser allgemeiner Satz über $S(u)$ bewiesen, damit aber auch die früher zitierten Sätze über $\Gamma(u)$, $P(u)$ und $Q(u)$, da dieselben nur spezielle Fälle dieses allgemeinen Satzes sind; denn

1.) für $k = 1$ und $l = 0$ erhält man die Bedingungen, die $\Gamma(u)$ vollständig bestimmen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = 1 \text{ und } \Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u).$$

2.) für $k = 0$, $l = -\frac{1}{e}$ erhält man die $P(u)$ vollständig definierenden Gleichungen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{P(u+n)}{(n-1)!\, n^u} = 0, \; P(u+1) = u P(u) - \frac{1}{e}.$$

3.) für $k = 1$, $l = +\frac{1}{e}$ ergeben sich die Bedingungsgleichungen, die $Q(u)$ vollständig definieren:

$$\lim \frac{Q(u+n)}{(n-1)\, n^u} = 1, \; Q(u+1) = u Q(u) + \frac{1}{e}.$$

Im Anschlusse an die früher genannte Abhandlung von Prym versucht nun L. Scheefer in seiner im Bande 97 des Crelleschen Journales für reine und angewandte Mathematik erschienenen Abhandlung „Zur Theorie der Funktionen $\Gamma(u)$, $P(u)$ und $Q(u)$“ die von Prym aufgestellten Bedingungsgleichungen, welchen die drei genannten Funktionen genügen müssen und die unmittelbar zur analytischen Darstellung dieser Funktionen führen, durch andere zu ersetzen, welche den Vorzug haben, daß sie an den Integralen, durch welche $\Gamma(z)$, $P(z)$ und $Q(z)$ definiert werden, direkt erkannt werden können. Dabei führen die neuen Bedingungen direkt sowohl zu den die Funktionen definierenden Integralen, als auch zu den anderen analytischen Ausdrücken der Funktionen. Scheefer beginnt seine Abhandlung mit dem Beweise eines später verwendeten Hilfssatzes, dessen Inhalt sich in folgender Weise zusammenfassen läßt: $f(z)$ sei eine eindeutige Funktion der komplexen Veränderlichen z und genüge folgenden Bedingungen:

1.) $f(z)$ sei für alle Werte von $z = \xi + \xi' i$, für welche $a \leqq \xi \leqq a + 1$ ist, holomorph und: $|f(z)| < g$, wo a und g reelle positive Konstanten sind.

2.) Die Gleichung $f(z+1) = z f(z)$ bestehe für alle möglichen Werte von z, dann läßt sich beweisen, daß: $f(z) f(1-z) = f(1)^2 \frac{\pi}{\sin \pi z}$.

Zur Vereinfachung des Beweises möge noch a als eine ganze Zahl angenommen werden; denn von dem für diesen Fall gültigen Beweis gelangt man zu dem Beweise des allgemeinen Falles durch leicht erkennbare Modifikationen. Setzt man nun:

$$\varphi(z) = f(z) f(1-z),$$

so genügt $\varphi(z)$ wegen der Bedingung 2.) auch der Gleichung

$$\varphi(z+1) = -\varphi(z);$$

denn es ist:

$$\varphi(z+1) = f(z+1) f(-z) = z f(z) f(-z)$$
$$\varphi(z) = f(z) f(1-z) = -z f(z) f(-z).$$

Mithin ist:

$$\varphi(z+1) = -\varphi(z).$$

Ferner ist:

$$f(z+1) = z f(z)$$
$$\varphi(z) = f(z) f(1-z),$$

von welchen beiden Gleichungen die erste für den Wert $z = 2a - z$ die folgende Gestalt annimmt und durch wiederholte Anwendung die nächsten Relationen liefert:

$$f(2a+1-z) = (2a-z) f(2a-z)$$
$$f(2a-z) = (2a-1-z) f(2a-z-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(3-z) = (2-z) f(2-z)$$
$$f(2-z) = (1-z) f(1-z).$$

Somit ist:

$$f(2a+1-z) = (1-z)(2-z)(3-z)\ldots(2a-1-z)(2a-z) f(1-z),$$

woraus folgt, daß:

$$f(1-z) = \frac{f(2a+1-z)}{(1-z)(2-z)\ldots(2a-1-z)(2a-z)}.$$

Es geht als $\varphi(z)$ mit Berücksichtigung dieses eben erhaltenen Wertes über in:

$$\varphi(z) = \frac{f(z) f(2a+1-z)}{(1-z)(2-z)\ldots(2a-1-z)(2a-z)}.$$

Wählt man nun in $z = \xi + \xi' i : \xi$ so, daß $a \leqq \xi \leqq a+1$, so ist zufolge der Gleichung: $|f(z)| < g$

auch: $|f(2a+1-z)| < g$

und $$|\varphi(z)| < \left| \frac{g^2}{(1-z)(2-z)\ldots(2a-z)} \right|.$$

Daraus folgt zunächst, daß $\varphi(z)$ in dem zur imaginären Achse parallelen Streifen $a \leqq \xi \leqq a+1$ nur für $z = a$ und $z = a+1$ und demnach mit Rücksicht auf die Relation: $\varphi(z+1) = -\varphi(z)$ überhaupt nur für reelle, ganzzahlige Werte von z unendlich groß werden kann. Da ferner:

$$|\varphi(z)| \leqq \frac{g^2}{\xi'^{2a}}$$

so sinkt $|\varphi(z)|$ sobald ξ' ins Unendliche wächst unter jede angebbare Größe δ.

Endlich ist

$$z\varphi(z) = f(1+z) f(1-z) = \frac{f(a+z)}{(1+z)(2+z)\ldots(a-1+z)} \cdot \frac{f(a-z)}{(1-z)(2-z)\ldots(a-1-z)}.$$

Da aber gemäß der ersten Bedingung, welcher $f(z)$ entsprechen muß, $f(a+z)$ und $f(a-z)$ nach positiven Potenzen von z entwickelt werden können, so ist dies auch bei $z\varphi(z)$ der Fall und man erhält:

$$z\varphi(z) = f(1)^2 + z P(z).$$

Die Differenz $D(z) = \varphi(z) - f(1)^2 \frac{\pi}{\sin \pi z}$ läßt sich also in der Umgebung der Stelle $z = 0$ nach positiven Potenzen von z entwickeln. Dabei hat $D(z)$ folgende Eigenschaften: Vermehrt man z um 1, so nimmt $D(z)$ den entgegengesetzten Wert an. Ferner läßt sich $D(z)$ in der Umgebung jedes endlichen Wertes z_0 nach positiven Potenzen von $z - z_0$ entwickeln. Der absolute Betrag von $D(z)$ ist für keinen Wert von z größer als eine gewisse Konstante G. Definieren wir nämlich einen Streifen der z-Ebene durch die Bedingung $c \leqq \xi \leqq c+1$ und zerlegen diesen Streifen in drei Teile durch zwei Parallele zur reellen Achse beziehungsweise in den Abständen c' und $-c'$ von derselben, so wird in dem von diesen Parallelen eingeschlossenen Stück des Streifens $D(z)$ wegen seiner an zweiter Stelle genannten Eigenschaft überall kleiner als eine angebbare Größe G_1 sein; in den beiden unendlich langen Stücken wird $|\varphi(z)|$ nach kleiner sein als $\frac{g^2}{c'^{2a}}$; und

$$\left| f(1)^2 \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| < f(1)^2 \frac{2\pi}{e^{\pi c'} - e^{-\pi c'}},$$

also: $$|D(z)| < \frac{g^2}{c'^{2a}} + f(1)^2 \frac{2\pi}{e^{\pi c'} - e^{-\pi c'}}.$$

Jede Zahl G, die größer als die beiden hier genannten Grenzen ist, wird also für keinen Wert des Streifens, mithin gemäß der ersten hier aufgezählten Eigenschaft von $D(z)$ überhaupt für keinen Wert von z erreicht. Folgt nun aus der an zweiter und dritter Stelle genannten Eigenschaft von $D(z)$, daß diese Funktion eine Konstante sein muß, so folgt aus der Tatsache, daß $D(z)$ für $\xi' = \infty$ verschwindet, daß diese Konstante selbst Null sein muß. Damit ist die Behauptung, daß: $\varphi(z) - f(1)^2 \frac{\pi}{\sin \pi z} = 0$, bewiesen.

Es soll nun im folgenden gezeigt werden, daß nur eine Funktion $F(z)$ der komplexen Veränderlichen z existiert, welche den folgenden Bedingungen genügt:

I.) $F(z)$ sei für alle $z = \xi + \xi' i$, für welche $a \leqq \xi \leqq a + 1$ ist, holomorph und

$$|F(z)| < \frac{g}{2} \cdot (a \text{ und } g \text{ reell.})$$

II.) Für jedes z sei $F(z+1) = z\,F(z) + c$.

III.) $F(1) = c$ und ist $C = c$, so tritt noch die Bedingung hinzu

III a.) $F(z)$ habe im Punkte $z = 0$ keine durch Abänderung des einzelnen Wertes $F(o)$ hebbare Unstetigkeit.

Beweis: Gäbe es zwei Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$, welche die genannten Eigenschaften besäßen, so genügte deren Differenz:

$$f(z) = F_1(z) - F_2(z)$$

den Bedingungen $|f(z)| < g$ und $f(z+1) = z\,F_1(z) - z\,F_2(z) = z\,f(z)$ und überdies wäre: $f(1) = 0$. Nach dem Hilfssatze also wäre

$$f(z)\,f(1-z) = f(1)^2 \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird aber nur Null für diejenigen endlichen Werte von z, für welche $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ endlich bleibt. Dies ist der Fall für alle endlichen z, die von den ganzzahligen Werten des z verschieden sind. Hieraus folgt, wie sogleich gezeigt werden soll, daß $f(z)$ nur an den Stellen $0, -1, -2, \ldots$ von Null verschieden sein kann. Ist nämlich z_0 irgend ein endlicher Wert des z, der von den Werten der Reihe $0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ verschieden ist, so kann man $f(z)$ mit Rücksicht darauf, daß:

$$f(z) = \frac{f(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}$$

oder:

$$f(z) = \frac{f(z-n)}{z(z-1)\ldots(z-n-1)},$$

auf die Form bringen:

$$f(z) = R(z)\,f(z \pm n),$$

wobei $R(z)$ eine rationale Funktion von z bedeutet. Wählt man nun die Stelle $z = z_0$, so liegt $z_0 \pm n = \xi + \xi' i$ in dem Streifen, der durch die Bedingung $a \leqq \xi \leqq a + 1$ charakterisiert ist, und $R(Z)$ ist in der Umgebung von z_0 endlich und von Null verschieden. Da $f(z \pm n)$ zufolge der Bedingung I.) sich nach Potenzen von $z - z_0$ entwickeln läßt, so ist dies auch bei $f(z)$ der Fall. Wäre nun $f(z_0) \neq 0$, so läßt sich um die Stelle $z = z_0$ ein kleiner Kreis beschreiben, innerhalb dessen $f(z)$ überall von Null verschieden

ist. Daher müßte für alle innerhalb dieses Kreises gelegenen Werte von z wegen $f(z)f(1-z)=f(1)^2\frac{\pi}{\sin \pi z}$

$$f(z)f(1-z)=0$$

also

$$f(1-z)=0$$

sein. Bringt man nun $f(1-z)$ gleichfalls auf die Form:

$$f(1-z)=R_1(z)f(1-z\pm n_1),$$

so daß $1-z_0\pm n_1=\xi_1+i\xi'_1$ in unserem früher definierten Streifen liegt, während die rationale Funktion $R_1(z)$ in der Umgebung von z_0 von Null verschieden ist, so müßte der Faktor von $R_1(z)$ für alle innerhalb eines kleinen Kreises gelegenen Werte von z verschwinden, d. h. $f(z)$ wäre innerhalb eines um den Punkt $z=1-z_0\pm n_1$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreises überall Null. Es wäre also nach einem bekannten Satze $f(z)$ innerhalb des Streifens, in dem sie monogen ist, überall Null, mithin wäre zufolge:

$$f(z)=R(z)f(z\pm n) \quad \text{auch} \quad f(z_0)=0.$$

Dies wäre aber ein Widerspruch, da $f(z_0)$ von Null verschieden angenommen wurde. $f(z)$ ist also jedenfalls gleich Null für alle Werte von z, die nicht in der Reihe $0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ vorkommen. Wegen der Bedingung I.) ist $f(z)$ auch Null für denjenigen ganzzahligen Wert (respektive diejenigen Werte), welcher in dem unter I.) definierten Streifen liegt. Daraus folgt nach II.), daß $f(z)$ für alle positiven ganzzahligen Werte Null ist. Es kann also $f(z)$ nur für solche Werte von z von Null verschieden sein, die der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ angehören. Bis auf diese Stellen der Ebene ist also $F(z)$ durch die Bedingungen I—III vollständig bestimmt. Sie ist aber auch an diesen Stellen bestimmt, wenn die in II und III vorkommenden Konstanten C und c von einander verschieden sind; denn in diesem Falle folgt aus II:

$$z\,F(z)=F(z+1)-c,$$

also:

$$[z\,F(z)]_{z=0}=C-c, \text{ da } F(1)=C$$

und

$$F(0)=\left(\frac{C-c}{z}\right)_{z=0}=\infty$$

oder allgemein: $F(-n)=\dfrac{F(-n+1)-c}{-n}$, d. h. $F(-1), F(-2)\ldots$ der Reihe nach gleich ∞. Ist dagegen $C=c$, so folgt aus

$$F(z+1)=z\,F(z)+c,$$

$$F(z)=\frac{F(z+1)-c}{z}$$

und da:

$$F(1)=C=c,$$

so ist

$$F(z)=\frac{F(z+1)-F(1)}{z}.$$

Nun ist aber nach IIIa $F(0)=\lim\limits_{z=0} F(z)$

$$F(0)=\lim_{z=0}\frac{F(z+1)-F(1)}{z}=F'(1).$$

Durch wiederholte Anwendung der Formel II.) erhält man

$$F(-n) = c\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right] + \frac{(-1)^n}{n!} F'(1).$$

Damit ist nun gezeigt, daß $F(z)$ durch die Bedingungen von I—IIIa vollständig bestimmt ist. Es soll nun im folgenden die Indentität dieser so definierten Funktion $F(z)$ mit der von Prym aufgestellten Funktion:

$$(C-c)\,P(z) + (C - c + c\,e)\,Q(z)$$

nachgewiesen werden.

Setzt man:
$$P(z) = \int_0^1 e^{-x}\, x^{z-1}\, d\,x$$

und
$$Q(z) = \int_1^\infty e^{-x}\, x^{z-1}\, d\,x,$$

so ist $Q(z)$ für alle Werte von z, $P(z)$ nur für die rechts von der imaginären Achse gelegenen Werte definiert, wie schon Prym gezeigt hat. Durch partielle Integration zeigt es sich nun, daß $P(z)$ und $Q(z)$ den Bedingungen II.) und III.), denen $F(z)$ genügt, entsprechen, indem man den Konstanten C und c spezielle Werte beilegt:

$$P(z) = \int_0^1 e^{-x}\, x^{z-1}\, d\,x = \frac{e^{-x}\, x^z}{z} + \frac{1}{z}\int_0^1 e^{-x} x^z\, d\,x,$$

$$P(z) = \frac{1}{e\,z} + \frac{1}{z}\,P(z+1)$$

$$z\,P(z) = \frac{1}{e} + P(z+1) \;\ldots\ldots\; P(z+1) = z\,P(z) - \frac{1}{e}$$

und:
$$P(1) = \int_0^1 e^{-x}\, d\,x = \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

$P(z)$ genügt also den Bedingungen II.) und III.) für $F(z)$, wenn

$$c = -\frac{1}{e} \text{ und } C = 1 - \frac{1}{e}$$

gesetzt wird. Nun ist:

$$Q(z) = \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\, d\,x = \left[\frac{e^{-x}\, x^z}{z}\right]_0^\infty + \frac{1}{z}\int_1^\infty e^{-x}.\, x^z\, d\,x,$$

$$Q(z) = -\frac{1}{e\,z} + \frac{1}{z}\int_1^\infty e^{-x}\, x^z\, d\,x = \frac{1}{z}\,Q(z+1) - \frac{1}{e\,z},$$

$$Q(z+1) = z\,Q(z) + \frac{1}{e},$$

$$Q(1) = \int_1^\infty e^{-x}\, d\,x = \Big[-e^{-x}\Big]_1^\infty = \frac{1}{e}.$$

$Q(z)$ genügt also II. und III. für $F(z)$, wenn $c = \frac{1}{c}$ und $C = \frac{1}{e}$ gesetzt wird.

Überdies erfüllt $Q(z)$ auch noch die Bedingung III^a für $F(z)$, indem es für

$z = 0$ keine durch Abänderung des einzelnen Wertes $Q(o)$ hebbare Unstetigkeit hat. Außerdem kann man, da $P(z)$ der Funktionalgleichung II, wie schon oben gezeigt wurde, genügt, durch wiederholte Anwendung von II, den Bereich von $P(z)$ nach und nach nach links erweitern und schließlich auf ganz beliebige Werte von z ausdehnen.

Wir können nun zeigen, daß die Funktionen $P(z)$ und $Q(z)$ auch der Bedingung I.) genügen. Aus den evidenten Beziehungen:

$$\left| e^{-x} x^{\xi + \xi' i - 1} \right| \leqq e^{-x} x^{a-1} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1 \\ \xi \geqq a \end{cases}.$$

$$\left| e^{-x} x^{\xi + \xi' i - 1} \right| \leqq e^{-x} x^{a} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 1 \leqq x \\ x \leqq a + 1 \end{cases}$$

folgt zunächst unmittelbar:

$$\left.\begin{array}{l} \left| P(\xi + \xi' i) \right| \leqq P(a) \\ \left| Q(\xi + \xi' i) \right| \leqq Q(a+1) \end{array}\right\} \text{für } a \leqq \xi \leqq a + 1,$$

so daß für die früher genannte Konstante $\frac{g}{2}$ jeder Wert angenommen werden kann, der größer als $P(a)$, beziehungsweise $Q(a+1)$ ist. Zum Beweise endlich, daß $P(z)$ und $Q(z)$ holomorphe Funktionen von z darstellen, dient der folgende allgemeine Satz:

Wenn $f(x, z)$ und $\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}$ in einem endlichen Gebiete G der komplexen Veränderlichen z eindeutige, stetige Funktionen von x und z sind, solange $x_0 \leqq x \leqq x_1$ ist; oder wenn für den Fall, daß $x = x_1$ diese Bedingung nicht mehr gilt, die Integrale:

$$\int_{x_1 - \delta}^{x_1} f(x, z)\, dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1 - \delta}^{x_1} \frac{\partial f(x, z)}{\partial z}\, dx$$

mit abnehmendem δ im ganzen Gebiete G gleichmäßig gegen Null konvergieren, so ist der Differentialquotient der Funktion

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, z)\, dx$$

innerhalb des Gebietes G von der Richtung der Differentiation unabhängig, endlich und gleich $\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dz} f(x, z)\, dx$. Für $x = \infty$ ist $\frac{1}{\delta}$ statt $x_1 - \delta$ zu setzen.

Aus diesem Satze folgt, daß der Differentialquotient von $P(z)$ und $Q(z)$ endlich und von der Richtung der Differentiation unabhängig ist für $a \leqq \xi \leqq a + 1$, wenn wir $a > 1$ annehmen; denn unter dieser Voraussetzung sind:

$$f(x, z) = e^{-x} x^{z-1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z} f(x, z) = e^{-x} x^{z-1} \lg x.$$

eindeutige und stetige Funktionen von x und z für alle Werte x von einschließlich 0 bis einschließlich 1, und für alle Werte x von 1 bis ∞. Außerdem übersteigen die absoluten Beträge der Integrale:

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{z-1} d\,x \text{ und } \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{z-1} lg\, x\, d\,x$$

nicht die Größen:

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{a} d\,x \text{ und } \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{a} lg\, x\, d\,x,$$

konvergieren also mit abnehmenden δ gleichmäßig gegen Null.

Wir wollen nun zum Schlusse der Abhandlung noch zeigen, daß die früher aufgestellten Eigenschaften der Funktion $F(z)$ genügen, um analytische Ausdrücke für dieselbe herzuleiten. Setzt man in:

$$F(z) = (C - c)\, P(z) + (C - c + ec)\, Q(z)$$

$c = 0$, $C = 1$, so wird $F(z) =$ zur $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} d\,x.$$

Aus den Bedingungen, denen $\Gamma(z)$ genügt, folgt sofort die wichtige Relation:

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin\,\pi\,z} \cdot \Gamma^2(1) = \frac{\pi}{sin\,\pi\,z},$$

da nach dem früheren $\Gamma(1) = 1$ ist. Aus der letzten Gleichung aber folgt, daß $\Gamma(z)$ für kein endliches z, das nicht in der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ vorkommt, Null werden kann, da sonst $\Gamma(1-z)$ unendlich groß werden müßte.

Aus der letztgenannten Eigenschaft von $\Gamma(1-z)$ aber würde wegen der Gleichung: $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ folgen, daß:

$$\Gamma(1-z) = -z(-z+1)(-z+2)\ldots(-z+1 \pm n)\,\Gamma(1-z \pm n)$$

mit $\Gamma(1-z)$ auch die Funktion $\Gamma(1-z \pm n)$ unendlich groß würde.

Diese Annahme ist aber mit der Bedingung I.) bei geeigneter Wahl des n unverträglich. Untersuchen wir das Verhalten der Funktion $\Gamma(z)$ an den Stellen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, so ist, da $F(z)$ in $\Gamma(z)$ für $C = 1$ übergeht und $F(1) = C$ ist: $\Gamma(1) = 1$.

Durch wiederholte Anwendung der Bedingungsgleichung:

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

folgt:

$$\Gamma(n) = n\,!$$

Ebenso $\Gamma(0) = \infty$ und $\Gamma(-n) = \infty$. $\Gamma(z)$ wird also für kein endliches z, das von den Werten $0, -1, -2, \ldots -n$ verschieden ist, Null. Dagegen wird $\Gamma(z)$, sobald z einen der Werte aus der Reihe $0, -1, -2, \ldots -n$, annimmt, unendlich groß mit dem Residuum $\frac{(-1)^n}{n!}$ von der 1. Ordnung. $\frac{d^2\, lg\, \Gamma(z)}{dz^2}$ wird an denselben Stellen und nur da unendlich von der zweiten Ordnung, das Residuum ist 0, der Koeffizient der -2ten Potenz 1. Dieses Verhalten der $\frac{d^2\, lg\, \Gamma(z)}{dz^2}$ führt unmittelbar auf die Reihe:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Die Differenz $\frac{d^2 lg\, \Gamma(z)}{dz^2} - \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ läßt sich offenbar in der Umgebung jedes endlichen Wertes $z = z_0$ nach positiven Potenzen von $z - z_0$ entwickeln und muß daher einer beständig konvergierenden Potenzreihe $P(z)$ gleich sein. Damit gewinnt man die Gleichung:

$$\frac{d^2}{dz^2} lg\, \Gamma(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + P(z).$$

Die rechte Seite kann zwischen den Grenzen k und z gliedweise integriert werden, da sie in jedem endlichen Gebiete von z mit Ausschluß der Punkte $z = 0, -1, -2, \ldots$ konvergiert. Dies gibt, wenn man die Integrationskonstante auf der linken Seite auf die rechte Seite bringt:

$$\frac{d}{dz} lg\, \Gamma(z) = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{z+n} \right) + P_1(z) \ldots\ldots \quad \alpha.)$$

Daß nun die rechte Seite dieser Gleichung ebenfalls gleichmäßig in jedem endlichen Gebiete, welches die Punkte $z = 0, -1, -2, \ldots$ nicht enthält, konvergiert, folgt schon aus dem mit der früheren Gleichung vorgenommenen Integrationsprozeß. Da wir nämlich die Zahl m so bestimmen können, daß in einem Gebiete, welches die Stellen k und z enthält, $\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ überall absolut kleiner als die beliebig vorgegebene Größe δ wird, muß für denselben Wert von m das Integral jener Summe, das ist $\sum_{m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{z+n} \right)$ notwendig kleiner sein als $\delta\,(kz)$, wo kz die absolute Länge einer von k nach z gezogenen, ganz im Gebiete verlaufenden Integrationskurve ist. Die Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der Summe $\sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{z+n} \right)$ ist also erfüllt. Integrieren wir Gleichung α.) nochmals zwischen den Grenzen k_1 bis z, so erhalten wir:

$$lg\, \Gamma(z) = \sum_{0}^{\infty} \left[lg \left(\frac{k_1+n}{z+n} \right) + \frac{z-k_1}{k+n} \right] + P_2(z)$$

und daraus:

$$\Gamma(z) = e^{P_2(z)} \prod_{0}^{\infty}{}_n \left(\frac{k_1+n}{z+n} \right) e^{\frac{z-k_1}{k+n}} \ldots\ldots \quad A.)$$

Die rechte Seite genügt unter allen Umständen der unter I.) aufgestellten Bedingung der Funktion $F(z)$. Die diesbezüglichen Bedingungen II. und III. werden erfüllt, wenn man setzt:

$$B. \begin{cases} P(z) = pz + q \\ p = -\lim\limits_{n=\infty} \left(\sum\limits_{\mu=0}^{n} \frac{1}{k+\mu} - lg(k+n) \right) \\ q = \lim\limits_{n=\infty} \left[\sum\limits_{\mu=0}^{n} \frac{1}{k+\mu} - lg(k_1+n) \right] - \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \left[lg \frac{k_1+\mu}{1+\mu} - \frac{k_1-1}{k+\mu} \right]. \end{cases}$$

Da nur eine einzige Funktion existiert, die den Bedingungen I.—III. genügt, so ist der durch A und B gegebene analytische Ausdruck von den Werten der Konstanten k und k_1 unabhängig. Für $k = k_1 = 1$ geht q über in die Mascheronische Konstante λ, p in $-\lambda$ und man erhält:

$$\Gamma(z) = e^{\lambda(1-z)} \prod_{0}^{\infty}{}_{n} \left(\frac{1+n}{z+n} e^{\frac{z-1}{1+n}} \right),$$

welcher Ausdruck von dem Euler-Gaußschen Produkt sich nur durch die Schreibweise unterscheidet.

Zur analytischen Darstellung von $P(z)$ gelangt man durch die Benützung der Bedingung II., aus deren wiederholten Anwendung für $c = -\frac{1}{e}$ die Formel folgt:

$$P(z) = \frac{1}{e} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+\mu-1)} + \frac{P(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}.$$

Das erste Glied rechts nähert sich für jeden Wert von z mit wachsenden n einer Grenze, also auch das zweite Glied. Bezeichnen wir diese beiden Grenzwerte mit $P_1(z)$, beziehungsweise $P_2(z)$, so ist

$$P(z) = P_1(z) + P_2(z).$$

Setzt man in $P_1(z): c = -\frac{1}{e}$, $C = P(1) = 1 - \frac{1}{e}$, so sieht man leicht ein, daß schon $P_1(z)$ den Bedingungen I.—III. genügt. Es muß also da nur eine einzige solche Funktion existieren kann, $P_2(z) = 0$ sein und man erhält:

$$P(z) = \frac{1}{e} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+\mu-1)}$$

$P(z)$ läßt sich aber auch noch in einer anderen Form analytisch darstellen. Aus den Bedingungen I.—III. geht hervor, daß $P(z)$ nur an den Stellen $0, -1, -2, \ldots \infty$[1] mit dem Residuum $\frac{(-1)^n}{n!}$ wird. Dieser Umstand führt zu der Reihe: $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$, welche allen Bedingungen I.—III. für $c = -\frac{1}{e}$, $C = 1 - \frac{1}{e}$ genügt. Diese Reihe stellt ebenfalls die Funktion $P(z)$ dar:

$$P(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)},$$

welche Darstellung man direkt aus $\int_0^1 e^{-x} x^{z-1} dx$ erhält, wenn man e^{-x} nach Potenzen von x entwickelt und gliedweise integriert.

Für die analytische Darstellung von $\varphi(z)$ ist es von Wichtigkeit, daß $C = c$ wird. Dies hat in Anbetracht der Bedingungen II und III^a zur Folge, daß die Funktion für keinen endlichen Wert von z ∞ wird und demnach durch eine beständig konvergierende Potenzreihe dargestellt werden kann, deren Koeffizienten aus der Relation: $\varphi(z) = \Gamma(z) - P(z)$ bestimmt werden können.

Dr. Georg Burggraf.