Die Γ-Funktion für komplexes Argument.

Während sich in der Theorie der Γ-Funktion mit reellem Argumente zwei fundamentale, verschiedene Definitionen der Γ-Funktion: das Gaußsche Produkt und die von Legendre gegebene Integraldefinition darbieten, hat die Gaußsche Definition auf die funktionentheoretische Behandlung einen wesentlicheren Einfluß ausgeübt und besitzt den Vorzug größerer Allgemeinheit wegen der Möglichkeit, der Veränderlichen alle möglichen Werte (reelle und komplexe) beizulegen. Es ist auch die ganze Theorie der Γ-Funktion kürzer und einheitlicher darstellbar, wenn man vor allem anderen die Produktenentwicklung herleitet und nunmehr die übrige Theorie auf dem gewonnenen Produktausdruck aufbaut. Es soll daher im folgenden zunächst die Entwicklung der Γ-Funktion in ein unendliches Produkt nach verschiedenen Methoden erörtert werden, woraus die wesentlichsten Eigenschaften der in Rede stehenden Funktion gefolgert werden, und schließlich möge noch der Definition der Funktion durch das Legendresche Intergral Rechnung getragen werden.

Als erste Methode, die zur Erweiterung der Γ-Funktion auf komplexes Gebiet führt, soll hier die von Weierstrass*) eingeschlagene ausgeführt werden. Weierstrass geht hiebei von dem Grundsatze aus, daß die Betrachtung eines Produktes aequidifferenter Faktoren von folgender Form für die Fakultätenlehre den Ausgang bildet:

$$(u+x)^y = u(u+x)(u+2x) \ldots . [u+(y-1)x]$$

wo u sowohl eine reelle als auch eine komplexe Größe sein kann und y eine ganze positive Zahl bedeutet, und zeigt, daß dasselbe die Lösung der Differenzengleichung:

$$\frac{\Delta f(u)}{f(u)} = \frac{y \Delta u}{u}$$

ist, wobei sich das Zeichen Δ auf u bezieht und $\Delta u = x$ angenommen wird. Durch die Untersuchung der Eigenschaften eines solchen Produktes gelangt Weierstrass zu einem Ausdrucke von der Form eines unendlichen Produktes, das sich nach einer kurzen Transformation mit dem reziproken Werte des $\Gamma(u)$, wo u reell und komplex sein kann, als identisch herausstellt. Von diesem unendlichen Produkte zeigt er endlich, daß er für jedes endliche, bestimmte u, welchen Wert (reell oder komplex) es auch haben möge, konvergiert und nach ganzen, positiven Potenzen von u in eine beständig konvergente Reihe entwickelbar ist. Nach dieser kurzen Übersicht der von Weierstrass eingeschlagenen Methode, wenden wir uns der Entwicklung derselben zu, indem noch hinzugefügt werden soll, daß die Bezeichnungsweise des

*) Weierstrass, Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 51 „Über die Theorie der analytischen Fakultäten".

obgenannten unendlichen Produktes $Fc(u)$ = Faktorielle von u der Bezeichnung $\Gamma(u)$ von Weierstrass deshalb der Vorzug gegeben wurde, weil $Fc(u)$ für keinen Wert von u eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet und im wesentlichen den Charakter einer rationalen ganzen Funktion hat.

Wir betrachten: $(u+x)^y = u(u+x)(u+2x)\ldots.[u+(y-1)x]$,
so ist $[u+x,+x]^y = (u+x)(u+2x)\ldots.[u+(y-1)x][u+yx]$,
multipliziert man die rechte Seite der letzten Gleichung mit u, sie gleichzeitig durch u dividierend, so ist:

$$[u+x,+x]^y = \frac{u(u+x)\ldots.[u+(y-1)x]}{u}[u+yx].$$

Es ist also: $$[u+x,+x]^y = \frac{u+yx}{u}[u+x]^y,$$

woraus durch Subtraktion der Indentität

$$(u+x)^y = (u+x)^y$$

die Relation folgt:

$$[u+x,+x]^y - [u+x]^y = \frac{yx}{u}[u+x]^y.$$

Zum Zeichen, daß diese Gleichung eine Differenzengleichung ist, bezeichnen wir die linke Seite mit $\Delta[u+x]^y$ und setzen $x = \Delta u$, so folgt

$$\frac{\Delta[u+x]^y}{[u+x]^y} = \frac{y}{u}\Delta u.$$

Führt nun die Auflösung der Differentialgleichung

$$\frac{df(u)}{f(u)} = y\frac{du}{u}$$

zu der Potenz u^y mit willkürlichem Exponenten, so kann man nach der Funktion $f(u)$ fragen, welche der Differenzengleichung

$$\frac{\Delta f(u)}{f(u)} = \frac{y\Delta u}{u}$$

bei einem beliebigen Werte von y genügen soll. Aus dieser Gleichung folgt, wenn man $\Delta u = x$ setzt:

$$f(u+x) - f(u) = \frac{yx}{u}f(u),$$

$$f(u+x) = \frac{u+xy}{u}f(u) \text{ oder}$$

$$f(u) = \frac{u}{u+xy}f(u+x).$$

Setzt man in dieser Relation der Reihe nach für $u : u,\ u+x,\ u+2x, \ldots$ $\ldots u+(n-1)x$, wo $n > o$ ist und eine ganze Zahl bedeutet, so erhält man:

$$\left\{\begin{array}{l} f(u) = \dfrac{u}{u+xy}f(u+x) \\ f(u+x) = \dfrac{u+x}{u+yx+x}f(u+2x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f[u+(n-1)x] = \dfrac{u+(n-1)x}{u+yx+(n-1)x}f(u+nx). \end{array}\right.$$

Multipliziert man diese Gleichungen, so gelangt man zu dem Resultate:

$$f(u) = \frac{u(u+x)\ldots\ldots[u+(n-1)x]}{(u+yx)\ldots\ldots[u+(y+n-1)x]} f(u+nx),$$

welchem man, da. $[u,+x]^n = u(u+x)\ldots[u+(n-1)x]$ und

$$[u+yx+x]^n = [u+yx][u+yx+x]\ldots[u+(y+n-1)x]$$

die Gestalt geben kann:

$$f(u) = \frac{[u,+x]^n}{[u+yx,+x]^n} f(u+nx).$$

Ist y eine ganze Zahl, so kann man

$$f(u) = [u,+x]^y$$

setzen und hat gemäß der Definition:

$$[u+nx,+x]^y = [u+nx][u+nx+x][u+nx+2x]\ldots[u+nx+(y-1)x]$$

$$[u+nx,+x]^y = [u+nx]^y\left[1+\frac{x}{u+nx}\right]\ldots\left[1+\frac{(y-1)x}{u+nx}\right].$$

Der Umstand nun, daß $\lim\limits_{n=\infty}\left\{\frac{[u+nx,+x]^y}{[u+nx]}\right\} = 1$

führt darauf, in der Gleichung

$$f(u) = \frac{[u+x]^n}{[u+yx,+x]^n} f[u+nx]$$

$n=\infty$ zu setzen, nachdem Zähler und Nenner der rechten Seite mit $[u+nx]^y$ multipliziert wurde:

$$f(u) = \lim_{n=\infty}\left\{[u+nx]^y \cdot \frac{[u+x]^n}{[u+xy+x]^n}\right\} \lim_{n=\infty}\frac{f[u+nx]}{[u+nx]^y}.$$

Setzt man darin für $f(u+nx)$ seinen Wert:

$$f(u+nx) = [u+nx,+x]^y$$

so konvergiert der zweite Grenzwert zur Grenze 1 und es bleibt nur noch die Untersuchung darüber übrig, ob auch der erste Faktor für $n=\infty$ einer endlichen, bestimmten Grenze sich nähert. Nach der Definition ist:

$$\frac{[u,+x]^n}{[u+yx,+x]^n} = \frac{u(u+x)\ldots\ldots[u+(n-1)x]}{[u+yx]\ldots\ldots[u+(y+n-1)x]} =$$

$$= \frac{\frac{u}{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)\ldots\left[1+\frac{u}{(n-1)x}\right]}{\frac{u+yx}{x}\left[1+\frac{u+yx}{x}\right]\ldots\left[1+\frac{u+yx}{(n-1)x}\right]}.$$

Außerdem ist: $\lim\limits_{n=\infty}\left\{\frac{[u+nx^y]}{[nx]^y}\right\} = 1^y.$

Nun setzt man:

$$F(u,n) = n^{-u}u(1+u)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right),$$

dann ist: $F\left(\frac{u}{x},n\right) = n^{-\frac{u}{x}}\cdot\frac{u}{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)\ldots\left[1+\frac{u}{(n-1)x}\right],$

$$F\left(\frac{u+yx}{x},n\right) = n^{-\frac{u}{x}-y}\cdot\frac{u+yx}{x}\left(1+\frac{u+yx}{x}\right)\ldots\left[1+\frac{u+yx}{(n-1)x}\right].$$

Mithin:

$$\frac{1}{n^y} \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}, n\right)}{F\left(\frac{u+yx}{x}, n\right)} = \frac{\frac{u}{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)\ldots\left[1+\frac{u}{(n-1)x}\right]}{\frac{u+yx}{x}\left(1+\frac{u+yx}{x}\right)\ldots\left[1+\frac{u+yx}{(n-1)x}\right]} =$$

$$= \frac{[u, + x]^n}{[u+yx+x]^n}.$$

Führt man diesen Wert in dem Ausdrucke für $f(u)$ ein, so erhält $f(u)$ die Gestalt:

$$f(u) = \lim_{n=\infty} \left\{ (u+nx)^y \cdot \frac{1}{n^y} \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}, n\right)}{F\left(\frac{u+yx}{x}, n\right)} \right\} \lim_{n=\infty} \frac{f(u+nx)}{[u+nx]^y}$$

oder:

$$f(u) = \lim_{n=\infty} \left\{ x^y \frac{[u+nx]^y}{[nx]^y} \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}, n\right)}{F\left(\frac{u+yx}{x}, n\right)} \right\} \lim_{n=\infty} \frac{f(u+nx)}{[u+nx]^y},$$

woraus zufolge der Relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{[u+nx]^y}{[nx]^y} = 1^y$$

die Gleichung sich ergibt:

$$f(u) = x^y \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{F\left(\frac{u}{x}, n\right)}{F\left(\frac{u+xy}{x}, n\right)} \right\} \lim_{n=\infty} \frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y}.$$

Auf den Grenzwert des ersten Quotienten wenden wir nun folgenden Satz von Weierstrass an:

Gegeben ist eine unendliche Reihe, deren Glieder $u_0, u_1, \ldots u_n$ das Gesetz befolgen, daß sich der Quotient $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ in eine (endliche oder unendliche) Reihe von der Form:

$$1 + \frac{a_1}{u} + \frac{a_2}{u^2} + \frac{a_3}{u^3} + \ldots$$

entwickeln läßt, wo $a_1, a_2, a_3 \ldots$ von n unabhängig sind, sonst aber beliebige komplexe Werte haben können, auf die Weise, daß

$$\lim_{n=\infty} n \left\{ \frac{n_n}{u_{n-1}} - 1 \right\} = a_1$$

$$\lim n^2 \left\{ \frac{u_n}{u_{n-1}} - 1 - \frac{a_1}{n} \right\} = a_2 \text{ etc.}$$

Wenn in diesem Falle a_μ die erste der Größen $a_1, a_2 \ldots$ ist, die nicht verschwindet, so daß also

$$\lim_{n=\infty} n^\mu \left\{ \frac{n_n}{u_{n-1}} - 1 \right\} = a\mu$$

und $\mu > 1$, so wird u_n für $n = \infty$ zu einer bestimmten, endlichen von Null verschiedenen Größe konvergieren.

Wir setzen in unserem Falle

$$u_n = F(un)$$

und bilden:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{F(un)}{F(u, n-1)} = \frac{n^{-u}\, u(u+1)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)}{(n-1)^{-u}\, u(u+1)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-2}\right)} =$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-u}\left(1+\frac{u}{n-1}\right)$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{F(u, n)}{F(u, n-1)} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{u}\left(1+\frac{u}{n-1}\right) = \left[1-\frac{u}{n}+\frac{u(n-1)}{2n^2}-\ldots\right]$$

$$\left[1+\frac{u}{n}+\frac{u}{n^2}+\ldots\right]$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 - \frac{u(n-1)}{2n^2} + \ldots\ldots\ldots$$

In unserem Falle ist also $a_1 = 0$ und $a_2 = -\frac{u(n-1)}{2}$; bilden wir also:

$$\lim_{n=\infty} n^2\left\{1-\frac{u(n-1)}{2n^2}-1\right\} = \lim_{n=\infty}\left\{n^2-\frac{u(n-1)}{2}-n^2+\ldots\right\}, \text{ so ist}$$

$$\lim_{n=\infty} n^2\left\{\frac{u_n}{u_{n-1}}-1\right\} = -\frac{u(n-1)}{2}$$

Nun ist die erste nicht verschwindende Größe $a_2 = -\frac{u(u-1)}{2}$ und $\mu = 2$, also > 1. Daher wird $\lim\limits_{n=\infty} F(u, n)$ gegen eine bestimmte, endliche, von Null verschiedene Grenze konvergieren, die eine Funktion von u ist und die mit $Fc(u)$ d. h. Faktorielle von u bezeichnet werden möge.

$$Fc(u) = \lim_{n=\infty} F(u, n) = \lim_{n=\infty}\left\{n^{-u}\, u(n+1)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)\right\}$$

oder da: $n^{-u} = \left(\frac{1}{1}\right)^{u}\left(\frac{1}{2}\right)^{u}\left(\frac{2}{3}\right)^{u}\ldots\left(\frac{n-1}{n}\right)^{u}$ kann man auch setzen:

$$Fc(u) = u \lim_{n=\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{u}(1+u)\left(\frac{2}{3}\right)^{u}\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{u}\cdot\left(1+\frac{u}{n-2}\right)\right.$$

$$\left.\left(\frac{n-1}{n}\right)^{u}\cdot\left(1+\frac{u}{n-1}\right)\right\}$$

Da $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right) = 1$, so kann man auch diesen Faktor noch in die Klammer einfügen und erhält so für $Fc(u)$ in Produktform geschrieben folgenden Ausdruck:

$$Fc(u) = u \prod_{\alpha=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{u}\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)$$

der nur für die Werte $u = 0, -1, -2, \ldots$ verschwindet.

Nach dem früheren ist

$$Fc(u) = \lim_{n=\infty} F(u, n)$$

Daraus folgt, einmal $u = \frac{u}{x}$, das zweitemal $u = \frac{u}{x} + y$ gesetzt:

$$\lim F\left(\frac{u}{x}, n\right) = Fc\left(\frac{u}{x}\right)$$

$$\lim F\left(\frac{u}{x} + y, n\right) = Fc\left(\frac{u}{x} + y\right)$$

oder:

$$\frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y\right)} = \lim_{n=\infty} \frac{F\left(\frac{u}{x}, n\right)}{F\left(\frac{u}{x} + y, n\right)}.$$

Es wird also $$f(u) = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y\right)} \lim_{n=\infty} \frac{f(u + n x)}{(u + n x)^y}.$$

Gibt es also wirklich eine Funktion $f(u)$, die der Gleichung

$$\frac{\Delta f(u)}{f(u)} = \frac{y}{u} \Delta u$$

genügt, so muß auch $$\lim_{n=\infty} \frac{f(u + n x)}{(u + n x)^y}$$

sich einer bestimmten, endlichen Grenze nähern, wenn n beständig wächst, wenigstens insofern $Fc\left(\frac{u}{x}\right) \neq 0$. Bezeichnet man diese Grenze mit

$$\psi(u) = \lim_{n=\infty} \frac{f(u + n x)}{(u + n x)^y}$$

so folgt, da $$\lim_{n=\infty} \frac{f(u + n x)}{(u + n x)^y} = \lim_{n=\infty} \frac{f(u + x + n x)}{(u + x + n x)^y},$$

daß $$\psi(u + x) = \psi(u) \quad \text{sein muß.}$$

Man erhält nun $f(u)$ in der Form:

$$f(u) = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y\right)} \cdot \psi(u).$$

Umgekehrt läßt sich auch zeigen, daß wirklich $f(u)$ der Gleichung

$$\frac{\Delta f(u)}{f(u)} = \frac{y}{u} \Delta n$$

genügt. Es ist nämlich:

$$F(u, n) = n^{-u} u (1 + u) \left(1 + \frac{u}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{u}{n-1}\right)$$

und für $u : u + 1$:

$$F(u + 1, n) = n^{-u-1} (u + 1)(2 + u) \left(1 + \frac{u + 1}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{u + 1}{n - 1}\right),$$

$$u F(u + 1, n) = n^{-u-1} \cdot \frac{u (u + 1)(u + 2) \ldots (u + n)}{(n - 1)!} =$$

$$= \frac{u + n}{n} \left[n^{-u} u \left(1 + \frac{u}{1}\right) \ldots \left(1 + \frac{u}{n - 1}\right)\right];$$

da aber der Klammerausdruck $F(u, n)$ ist, so erhält man:

$$u\,F(u+1, n) = \frac{u+n}{n}\,F(u, n)$$

woraus folgt: $$u\,Fc(u+1) = Fc(u),$$

wenn man n ins Unendliche wachsen läßt und beiderseits zur Grenze übergeht. Setzt man in dieser Gleichung zuerst für $u = \frac{u}{x} + y$, dann $u = \frac{u}{x}$, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$Fc\left(\frac{u}{x} + y + 1\right) = \frac{x}{u + xy} \cdot Fc\left(\frac{u}{x} + y\right)$$

$$Fc\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{u}{x}\,Fc\left(\frac{u}{x} + 1\right).$$

Es nimmt dann mit Berücksichtigung derselben $f(u+x)$, das gegeben ist, durch

$$f(u+x) = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x} + 1\right)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y + 1\right)}\,\psi(u+x)$$

die Form an:

$$f(u+x) = x^y \cdot \frac{\frac{x}{u} \cdot Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{\frac{x}{u+xy}\,Fc\left(\frac{u}{x} + y\right)}\,\psi(u) = \frac{u+xy}{u}\left[x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y\right)}\right],$$

somit ist $$f(u+x) = \frac{u+xy}{u}\,f(u)$$

oder $$f(u+x) - f(u) = \left(\frac{u+xy}{u} - 1\right) f(u) = \frac{xy}{u}\,f(u),$$

$$\frac{f(u+x) - f(u)}{f(u)} = \frac{xy}{u}.$$

Setzt man wieder $\Delta f(u) = f(u+x) - f(u)$
$x = \Delta u$

so gelangt man wieder von da aus zur ursprünglichen Gleichung:

$$\frac{\Delta f(u)}{f(u)} = \frac{y}{u}\,\Delta u.$$

Noch ist aber die Bestimmung von $\psi(u)$ ausständig, welche Funktion am zweckmäßigsten sich in folgender Weise finden läßt. Wir wissen, daß für den Fall eines ganzen y: $f(u) = (u+x)^y$ und

$$\lim_{n=\infty} \frac{[u+nx, x]^y}{[u+nx]^y} = 1^y.$$

Infolgedessen ist $$(u+x)^y = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y\right)},$$

ferner folgt durch wiederholte Anwendung der Formel:

$$Fc(u) = u\,Fc(u+1)$$

$$Fc(u) = u(u+1)(u+2)\ldots(u+n-1)\,Fc(u+n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha)$$

wo n eine ganze, positive Zahl bedeutet. Seht man darin $u = 1$, so wird:

$$Fc(1) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . \; n \; Fc(1 + n)$$

und da:

$$Fc(n) = n \; Fc(1 + n),$$

erhält man die Beziehung:

$$1 = Fc(1) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n - 1) \; Fc(n) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \beta)$$

Durch Division der Gleichung $\beta)$ durch Gleichung $\alpha)$ folgt:

$$\frac{1}{Fc(u)} = \frac{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (n-1)}{u(u+1)\ldots(u+n-1)} \cdot \frac{Fc(n)}{Fc(u+n)},$$

$$\frac{Fc(n)}{Fc(u+n)} \cdot Fc(u) = \frac{u(u+1)\ldots\ldots(u+n-1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (n-1)}.$$

Wird beiderseits durch n^u dividiert, so geht die letzte Gleichung über in:

$$\frac{Fc(u)\,Fc(n)}{n^u \,.\, Fc(u+n)} = n^{-u} \cdot \frac{u(u+1)\ldots(u+n-1)}{(n-1)!}$$

Geht man für beständig wachsendes n zur Grenze über, so ist nach dem früheren die Grenze der rechten Seite für $n = \infty : Fc(u)$ und mithin:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{n^{-u} \,.\, Fc(n)}{Fc(u+n)} \right\} = 1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \gamma)$$

Da nun u auch komplex sein kann, so legt man, um die Vieldeutigkeit des

$$n^{-u} = 1 - u \, lg \, n + \frac{u^2}{2} (lg \, n)^2 - \ldots .$$

zu beheben, dem n^{-u} unter den verschiedenen Werten denjenigen Wert bei, der aus der letzten Gleichung sich ergibt, wenn von den verschiedenen Werten von $lg \, n$ der reelle Wert genommen wird. Unter dieser Bedingung wird dann $Fc(u)$ zu einer eindeutigen Funktion von u. Nun ist:

$$[u + n\,x, + x]^y = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x} + n\right)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y + n\right)},$$

$$\frac{[u + n\,x, + x]^y}{[u + n\,x]^y} = \frac{1}{[u + n\,x]^y} \cdot x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x} + n\right)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y + n\right)}.$$

Um auf diese Gleichung die Relation $\gamma)$ anwenden zu können, multipliziert man Zähler und Nenner der rechten Seite mit $Fc(u)$ und erhält:

$$\frac{[u + n\,x, + x]^y}{[u + n\,x]^y} = \frac{x^y}{[u + n\,x]^y} \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x} + n\right)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y + n\right)} \cdot \frac{Fc(n)}{Fc(u)} =$$

$$= \frac{x^y}{[u + n\,x]^y} \cdot \frac{Fc(n)}{Fc\left(\frac{u}{x} + y + n\right)} \cdot \frac{1}{\frac{Fc(u)}{Fc\left(\frac{u}{x} + n\right)}} \; \ldots\ldots\ldots \delta)$$

Setzt man in Gleichung $\gamma)$ für $u = \frac{u}{x}$, so wird:

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{n^{-\frac{u}{x}}\,Fc\,(n)}{Fc\left(\frac{u}{x}+n\right)}\right\}=1$$

und für $u=\frac{u}{x}+y$:

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{n^{-\frac{u}{x}-y}\,Fc\,(n)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y+n\right)}\right\}=1$$

Um auf Ausdrücke dieser Form zu kommen, wird man in Gleichung δ) Zähler und Nenner noch mit $n^{\frac{u}{x}+y}$ multiplizieren und erhalten:

$$\frac{[u+n\,x,+x]^y}{[u+n\,x]^y}=\frac{(n\,x)^y}{(u+n\,x)^y}\cdot\frac{n^{-\frac{u}{x}-y}\,Fc\,(n)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y+n\right)}\cdot\frac{1}{\dfrac{n^{-\frac{u}{x}}\,.\,Fc\,(n)}{Fc\left(\frac{u}{x}+n\right)}};$$

Geht man für $n=\infty$ zur Grenze über, so konvergiert der erste Quotient auf der rechten Seite zu 1^y, die beiden anderen zur Grenze 1. Daher ist in der Tat:

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{(u+n\,x,+x)^y}{(u+n\,x)^y}\right\}=1^y.$$

Das Resultat der bisher gepflogenen Untersuchungen läßt sich nun in folgender Weise zusammenfassen:

Es gibt eine und nur eine für alle Werte der unbeschränkt veränderlichen Größe u geltende, eindeutige und für keinen endlichen Wert von u unendlich groß werdende Funktion:

$$Fc\,(u)=u\prod_{\alpha=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\},$$

welche den Gleichungen genügt:

1.) $Fc\,(u)=u\,Fc\,(u+1)$,

2.) $Fc\,(1)=1$,

3.) $\lim\limits_{n=\infty}\left\{\frac{n^{-u}\,Fc\,(u)}{Fc\,(u+n)}\right\}=1.$

Läßt man in dem Produkte für $Fc\,(u):\alpha$ über alle Grenzen wachsen und setzt:

$$Fc\,(u)=\lim_{n=\infty}\left\{u\left(\frac{1}{1}\right)^u.\left(1+\frac{u}{1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^u.\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(\frac{n}{1+n}\right)^u.\left(1+\frac{u}{n}\right)\right\},$$

so ist:
$$Fc\,(u)=\lim_{n=\infty}\frac{u\,(1+u)\,(2+u)\,..\,(n+u)}{n\,!\,n^u},$$

wenn man berücksichtigt, daß

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)=1,$$

und man der Symmetrie wegen die Einheit statt dieses Ausdruckes einführt. Nun ist aber aus der Theorie der Γ-Funktion mit reellem Argumente die Relation bekannt:

$$\Gamma(a) = \lim_{n=\infty} \frac{n^a . n!}{a(a+1)\ldots(a+n)},$$

somit ist unser letzter Ausdruck gleich dem reziproken Werte von $\Gamma(u)$, wo u eine beliebige (reelle oder komplexe) Veränderliche ist:

$$\frac{1}{\Gamma(u)} = \lim \frac{u(u+1)\ldots.(u+n)}{n!\,n^u}.$$

Da aber die rechte Seite nur eine andere Form des Weierstraßschen Produktes ist, so gilt $\frac{1}{\Gamma(u)}$ ebenso wie das Weierstraßsche Produkt für alle Werte der unbeschränkt Veränderlichen u. Aus der letzten Gleichung endlich folgt:

$$\Gamma(u) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\,n^u}{u(u+1)\ldots(u+n)}$$

als Definition der Γ-Funktion, die für eine Reihe von Abhandlungen den Ausgangspunkt bildet, und mit Hilfe deren die allgemein gültigen Relationen abgeleitet werden.

Von der Gleichung ausgehend:

$$\frac{1}{\Gamma(u)} = \lim_{n=\infty} \frac{u(1+u)\ldots.(n+u)}{n^u . n!}$$

gelangt man nach dem von M. Godefroy (La fonction Gamma 1901) angegebenen Verfahren zu einer anderen Form der Darstellung, welche die von Weierstrass zuerst gefundene Zerlegung der Funktion $\frac{1}{\Gamma(u)}$ in primäre Faktoren liefert. Setzt man nämlich:

$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{n},$$

so ist: $e^{s_n} = e^{\frac{1}{1}} . e^{\frac{1}{2}} \ldots e^{\frac{1}{n}}$ und analog:

$$\left(e^{s_n}\right)^u = e^u . e^{\frac{u}{2}} \ldots e^{\frac{u}{n}} \text{ oder:}$$

$$\left(e^{s_n}\right)^{-u} = e^{-u} . e^{-\frac{u}{2}} \ldots. e^{-\frac{u}{n}} = 1,$$

woraus durch Multiplikation von $\frac{1}{\Gamma(u)}$ beiderseits folgt:

$$\frac{1}{\Gamma(u)} = \lim_{n=\infty} \left\{ \left(\frac{e^{s_n}}{n}\right)^u . \left[\left(1+\frac{u}{1}\right) e^{-\frac{u}{1}}\right] \ldots. \left[\left(1+\frac{u}{n}\right) e^{-\frac{u}{n}}\right] \right\}.$$

Setzt man den Faktor: $\frac{e^{s_n}}{n} = \lambda_n$, logarithmiert diese Gleichung:

$$l(\lambda_n) = s_n - ln,$$

so läßt sich auf folgende Weise zeigen, daß die rechte Seite der letzten Gleichung beim Übergange zur Grenze für $n = \infty$ zu einer bestimmten, endlichen Grenze konvergiert, welche man die Mascheronische oder Eulersche Konstante nennt.

Setzt man: $n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \ldots. \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1}$, dann ist

$$ln = l\left(1+\frac{1}{1}\right)+l\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+l\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$s_n - l_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-ln = -\left[\sum_{K=1}^{n-1}\left\{l\left(1+\frac{1}{K}\right)-\frac{1}{K}\right\}-\frac{1}{n}\right].$$

Um zu zeigen, daß diese Summe für $n=\infty$ konvergiert, geht man aus von der Relation:

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\Theta x)^2},\ 0<\Theta<1$$

und setzt in der Gleichung:

$$l(1+x)-x = -\frac{x^2}{2(1+\Theta x)^2}$$

$$x = \frac{1}{K},$$

so erhält man:

$$l\left(1+\frac{1}{K}\right)-\frac{1}{K} = -\frac{1}{2K^2\left(1+\frac{\Theta x}{K}\right)^2},$$

mithin ist:

$$\left[l\left(1+\frac{1}{K}\right)-\frac{1}{K}\right] = \frac{1}{K^2}\cdot\frac{1}{2\left[1+\frac{\Theta x}{K}\right]^2}.$$

Nun konvergiert $1+\frac{\Theta x}{K}$ mit unendlich wachsendem K zur Einheit, daher ist:

$$\left[1+\frac{\Theta x}{K}\right] > m,$$

und daraus folgt:

$$\left[l\left(1+\frac{1}{K}\right)-\frac{1}{K}\right] < \frac{1}{K^2}\cdot\frac{1}{2m^2}.$$

Da aber die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{2K^2m^2}$ ist, für $K=\infty$ konvergiert, so konvergiert die Reihe, deren allgemeines Glied $l\left(1+\frac{1}{K}\right)-\frac{1}{K}$ ist, absolut. Es ist also wirklich:

$$\lim_{n=\infty}[s_n - ln] = C,$$

somit:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{e^{s_n}}{n}\right)^u = e^{uC}$$

und daher:

$$\frac{1}{\Gamma(u)} = u\,e^{Cu}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)e^{-\frac{u}{n}}.$$

Diese Zerlegung von $\frac{1}{\Gamma(u)}$ in primäre Faktoren ist für die ganze Ebene gültig, und zeigt, daß $\frac{1}{\Gamma(u)}$ eine ganze transzendente Funktion mit den Nullstellen $0, -1, -2, \ldots$ ist, während diese Punkte der Ebene für $\Gamma(u)$ Pole sind.

Weierstrass zeigte ferner, daß $\frac{1}{\Gamma(u)}$ sich in eine nach ganzen Po-

tenzen von u aufsteigende Reihe entwickeln läßt, die für alle reellen und komplexen Werte von u beständig konvergiert, und ging zu diesem Zwecke aus von der schon früher gegebenen Relation:

$$\frac{1}{\Gamma(u)} = u \prod_{\alpha=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha} \right) \right].$$

Er zerlegt die rechte Seite in zwei Produkte, von denen in dem ersten α die Werte von 1 bis $m-1$ in dem zweiten von m bis ∞ durchläuft:

$$\frac{1}{\Gamma(u)} = u \prod_{\alpha=1}^{m-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha} \right) \right\} \prod_{m}^{\infty}{}_{\alpha} \left\{ \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha} \right) \right\}.$$

Nun beschränkt Weierstrass vorläufig die Veränderlichkeit des u nur auf solche Werte, die der Ungleichung genügen:

$$|u| < m,$$

wo m eine beliebige, ganze positive Zahl ist. Man setzt:

$$\prod_{m}^{\infty}{}_{\alpha} \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha} \right) \right] = \prod_{0}^{\infty}{}_{\alpha} \left[\left(\frac{\alpha+m}{\alpha+m+1} \right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha+m} \right) \right] = \varphi(u,m)$$

oder, wenn man zum Logarithmus übergeht:

$$lg\, \varphi(u,m) = lg \prod_{0}^{\infty}{}_{\alpha} \left[\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha+m}} \right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha+m} \right) \right] =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left\{ -u\, lg \left(1 + \frac{1}{\alpha+m} \right) + lg \left(1 + \frac{u}{\alpha+m} \right) \right\}.$$

Nun läßt sich aber jeder Summand nach ganzen Potenzen von $\alpha + m$ entwickeln:

$$lg \left(1 + \frac{1}{\alpha+m} \right) = \frac{1}{\alpha+m} - \frac{1}{2(\alpha+m)^2} + \frac{1}{3(\alpha+m)^3} - \cdots\cdots$$

$$lg \left(1 + \frac{u}{\alpha+m} \right) = \frac{u}{\alpha+m} - \frac{u^2}{2(\alpha+m)^2} + \frac{u^3}{3(\alpha+m)^3} - \cdots\cdots$$

Multipliziert man die erste der beiden Gleichungen mit $(-u)$ und addiert beide Gleichungen, so folgt:

$$-u\, lg \left(1 + \frac{1}{\alpha+m} \right) + lg \left(1 + \frac{u}{\alpha+m} \right) = \sum_{a=2}^{\infty} \left\{ (-1)^a \cdot \frac{u^a - u}{a(\alpha+m)^a} \right\} = \varphi_a(u)$$

und:

$$lg\, \varphi(u,m) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left\{ \sum_{a=2}^{\infty} (-1)^a \frac{u^a - u}{a(\alpha+m)^a} \right\}.$$

Ersetzt man nun in der Entwicklung von $\varphi_a(u)$ die Koeffizienten durch ihre absoluten Beträge, so erhält man die Reihe der

$$\psi_a(u) = \sum_{a=2}^{\infty} \left[\frac{u^a + u}{a(m+\alpha)^a} \right].$$

Zur Untersuchung der Reihe der $\varphi_a(u)$ bedarf es zweier von Weierstrass herrührender Hilfssätze, von denen der erste lautet:

Wenn in der unendlichen Reihe

$$\Sigma\, a_{\alpha\beta \ldots} x^\alpha y^\beta \ldots.$$

wo $x, y \ldots$ veränderliche Größen und $\alpha, \beta, \ldots$ ganze Zahlen sind, von denen jede unabhängig von der anderen alle Werte von 0 bis ∞ durchläuft, die Glieder derselben endlich bleiben, wenn man für $x, y, \ldots$ bestimmte Werte $x_0, y_0, \ldots$ setzt, wie groß auch $\alpha, \beta, \ldots$ werden mögen, so konvergiert die Reihe für alle Werte $x, y, \ldots$, deren absoluter Betrag kleiner ist als $x_0, y_0, \ldots$ unbedingt.

Beweis: Bezeichnet man

$$\begin{array}{lll} |a_{\alpha\beta}\ldots| = A_{\alpha\beta}\ldots & |x| = \xi, & |x_0| = \xi_0, \quad \xi < \xi_0, \\ & |y| = \eta, & |y_0| = \eta_0, \quad \eta < \eta_0, \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \end{array}$$

so gibt es nach der Voraussetzung eine positive Zahl G, so daß

$$A_{\alpha\beta}\ldots\ \xi_0^\alpha \eta_0^\beta \ldots < G,$$

darnach ist

$$A_{\alpha\beta}\ldots = |a_{\alpha\beta}\ldots| < \frac{G}{\xi_0^\alpha \eta_0^\beta \ldots},$$

daher ist

$$|a_{\alpha\beta}\ldots x^\alpha y^\beta \ldots| < G\xi_0^{-\alpha}\eta_0^{-\beta}\ldots\xi^\alpha\eta^\beta\ldots$$

und

$$\Sigma\,|a_{\alpha\beta}\ldots x^\alpha y^\beta\ldots| < \Sigma\, G\,\xi_0^{-\alpha}\eta_0^{-\beta}\ldots\xi^\alpha\eta^\beta\ldots \qquad \text{I.)}$$

Die rechte Seite läßt sich aber auch so schreiben:

$$\Sigma\, G\,\xi_0^{-\alpha}\eta_0^{-\beta}\ldots\xi^\alpha.\eta^\beta\ldots = \Sigma\, G\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\alpha\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^\beta\ldots,$$

ferner durchlaufen $\alpha, \beta \ldots$ alle Werte von 0 bis ∞ und:

$$\frac{\xi}{\xi_0} + \frac{\xi^2}{\xi_0^2} + \ldots = \frac{\frac{\xi}{\xi_0}}{1 - \frac{\xi}{\xi_0}}$$

$$\frac{\eta}{\eta_0} + \frac{\eta^2}{\eta_0^2} + \ldots = \frac{\frac{\eta}{\eta_0}}{1 - \frac{\eta}{\eta_0}} \quad \text{etc.}$$

Daher ist:

$$\Sigma\, G\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\alpha\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^\beta\ldots = G\,\frac{\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)\ldots}{\left(1-\frac{\xi}{\xi_0}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_0}\right)\ldots}.$$

Da $\frac{\xi}{\xi_0} < 1$, $\frac{\eta}{\eta_0} < 1 \ldots$, so wird die Ungleichung in I.) noch mehr verstärkt, wenn man dafür die Einheit setzt, so daß:

$$\Sigma\,|a_{\alpha\beta}\ldots x^\alpha y^\beta\ldots| < \frac{G}{\left(1-\frac{\xi}{\xi_0}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_0}\right)\ldots},$$

womit obiger Satz bewiesen ist.

Aus diesem Satze und dem Begriffe der unbedingten Konvergenz folgt unmittelbar der zweite Hilfssatz:

$\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ seien Glieder einer unendlichen Reihe und Funktionen beliebig vieler Veränderlichen $x, y, \ldots$, die sich nach ganzen Potenzen von $x, y, \ldots$ entwickeln lassen. Ersetzt man jeden Koeffizienten der φ durch seinen absoluten Wert, so erhält man eine neue unendliche Reihe $\psi, \psi_1, \psi_2 \ldots$; wenn nun für bestimmte positive Werte $x = \xi$, $y = \eta, \ldots$ die Reihen der $\psi, \psi_1, \psi_2 \ldots$, konvergieren, sowie auch deren Summe:

$$\psi + \psi_1 + \psi_2 + \ldots\ldots,$$

so ist dies auch der Fall bei der Summe:

$$\varphi_o + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\ldots$$

für alle $x, y, \ldots$, wo $|x| \leqq \xi$, $|y| \leqq \eta, \ldots\ldots$ Sind $a_{\alpha\beta} \ldots a'_{\alpha\beta} \ldots$ die Koeffizienten der Reihe $\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ und es ist

$$a_{\alpha\beta} \ldots + a'_{\alpha\beta} \ldots + \ldots = A_{\alpha\beta} \ldots,$$

so ist für die Werte $\xi \leqq x$, $\eta \leqq y \ldots$ auch die Reihe

$$\Sigma A_{\alpha\beta} \ldots x^{\alpha} y^{\beta} \ldots$$

konvergent und gleich der Summe:

$$\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\ldots \quad .$$

Bei der Anwendung dieses Satzes auf unser Theorem, hat man nun folgendes zu beachten:

$\Sigma \varphi_{\varkappa}(u)$ wird sich in eine nach ganzen Potenzen von u aufsteigende und für alle u, wo $|u| < m$ ist, konvergierende Reihe entwickeln lassen, wenn:

$$\psi + \psi_1 + \ldots\ldots = \sum_{\alpha=o}^{\infty} \left\{ \sum_{a=2}^{\infty} \frac{u^a - u}{a\,(m+\alpha)^a} \right\}$$

für positive u einen endlichen Wert hat. Nun ist:

$$\sum_{\alpha=o}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^a} = \frac{1}{m^a} \sum_{o}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^a},$$

und das n^{te} Glied dieser Summe t_n:

$$t_n = \frac{1}{\left(1+\frac{n}{m}\right)^a}$$

also ist:

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{n-1}{m}\right)^a}{\left(1+\frac{n}{m}\right)^a} = \frac{(m+n-1)^a}{(m+n)^a} = \left(\frac{1+\frac{m-1}{n}}{1+\frac{m}{n}}\right)^a = 1 - \frac{a}{n} + \ldots,$$

welche Reihe bekanntlich für $a > 1$ konvergiert.

Setzt man ferner: $\displaystyle\sum_{\alpha=o}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^a} = s_a$ und bildet:

$$\sum_{a=2}^{\infty} s_a$$

so ist diese Reihe eine abnehmende; denn

$$s_n = \frac{1}{\left(1+\frac{u}{m}\right)^a},$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{n+1}{m}\right)^a}$$

und:

$$m+n < m+n+1,$$

$$1+\frac{u}{m} < 1+\frac{n+1}{m},$$

$$\frac{1}{1+\frac{n}{m}} > \frac{1}{1+\frac{n+1}{m}},$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{n}{m}\right)^a} > \frac{1}{\left(1+\frac{n+1}{m}\right)^a},$$

$$s_n > s_{n+1},$$

außerdem ist, da der Voraussetzung nach $|u| < m$, wo m eine beliebig große, ganze, positive Zahl ist:

$$\frac{u}{m} < 1;$$

daher konvergiert für alle u, für welche $|u| < m$ ist,

$$\sum_{\alpha=o}^{\infty} \sum_{a=2}^{\infty} \left\{\frac{u^a+u}{a(m+\alpha)^a}\right\} = \sum_{a=2}^{\infty} s_a = \sum_{a=2}^{\infty} \left\{\frac{(u^a+u)\, s_a}{a\, m^a}\right\}.$$

Mithin läßt sich auch:

$$lg\, \varphi(u,m) = lg \prod_{\alpha=m}^{\infty} \left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}$$

nach ganzen Potenzen von u in eine für alle u, für die $|u| < m$ ist, konvergierende Reihe entwickeln und daher ist auch:

$$\prod_{m}^{\infty}{}_{\alpha} \left\{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\} = e^{lg\, \varphi(u,m)}.$$

Dasselbe ist aber auch für alle Werte von u, für welche $|u| < m$ ist, der Fall bei:

$$u \prod_{1}^{m-1}{}_{\alpha} \left\{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\},$$

somit ergibt sich, daß sich auch:

$$\frac{1}{\Gamma(u)} = u \prod_{1}^{\infty} \left\{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}$$

nach ganzen Potenzen von u in eine unendliche Reihe entwickeln läßt, die für alle Werte: $|u| < m$ konvergiert. Da aber m ganz beliebig groß sein kann, so muß $\frac{1}{\Gamma(u)}$ für alle Werte von u konvergieren. $\frac{1}{\Gamma(u)}$ ist also eine eindeutige Funktion von u, die für alle Werte von u endlich und stetig ist.

Zur Untersuchung der wesentlichsten Eigenschaften der Γ-Funktion geht man am zweckmäßigsten aus von der durch Gauss gegebenen Definition:

$$\Gamma(u) = \lim_{n=\infty} \frac{n^u}{u\left(1+\frac{u}{1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{u}{n}\right)},$$

wo $n^u = e^{u\,ln}$ und unter ln der positive Wert des Logarithmus zu verstehen ist.

Bildet man:

$$\Gamma(u+1) = \lim \frac{n^{u+1}}{(u+1)\left(1+\frac{u+1}{1}\right)\ldots\left(1+\frac{u+1}{n}\right)},$$

so folgt, da $\quad 1+\frac{u+1}{p} = \frac{p+u+1}{p} = \frac{p+1}{p}\left(1+\frac{u}{p+1}\right),$

daß $$\frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u)} = \lim \frac{n\,u}{(n+1)\left(1+\frac{u}{n+1}\right)} = u$$

und $$\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u) \ldots\ldots\ldots 1.)$$

Daraus erhält man, da
$$\Gamma(1) = 1,$$
$$\Gamma(2) = 1$$
$$\Gamma(3) = 1\cdot 2$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\Gamma(u+1) = u!\,.$$

Ferner ist nach Gleichung 1.) $\Gamma(1-u) = -u\,\Gamma(-u)$

und $$\Gamma(u)\,\Gamma(1-u) = -\Gamma(u)\,u\,\Gamma(-u).$$

Nun ist aber: $\frac{1}{\Gamma(u)} = u \prod_1^\infty \left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\},$

und $$\frac{1}{-u\,\Gamma(u)} = \prod_1^\infty \left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{-u} \left(1-\frac{u}{\alpha}\right)\right\}.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen folgt:

$$\frac{1}{\Gamma(u)\,\Gamma(1-u)} = \frac{1}{-u\,\Gamma(u)\,\Gamma(-u)} = u \prod_1^\infty \left(1-\frac{u^2}{\alpha^2}\right).$$

Bekanntlich ist aber: $\sin \pi u = \pi u \prod_1^\infty \left(1-\frac{u^2}{\alpha^2}\right),$

also ist: $$u \prod_1^\infty \left(1-\frac{u^2}{\alpha^2}\right) = \frac{\sin \pi u}{\pi}$$

und daher: $$\Gamma(u)\,\Gamma(1-u) = \frac{\pi}{\sin \pi u} \;\ldots\; 2.)$$

Mit Hilfe dieser zweiten Eigenschaft, welche gestattet, das Zahlenintervall der Einheit, welches nach Gleichung 1.) für die Berechnung von $\Gamma(u)$ hinreicht, auf das Intervall $\frac{1}{2}$ zu reduzieren, findet man:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ etc.}$$

Dabei ist aber $\sqrt{\pi}$ immer positiv zu nehmen, weil wir eben vorausgesetzt haben, daß $n^z = e^{z\,ln}$, wo ln den positiven Wert des Logarithmus bezeichnet.

Zur Ableitung der dritten Eigenschaft der Γ-Funktion, die mit dem Gaußschen Multiplikationstheorem identisch ist, mögen im folgenden zwei Methoden angeführt werden, von denen die eine sich der bereits abgeleiteten zwei Eigenschaften bedient, während die andere eine direkte und von den anderen Eigenschaften der Γ-Funktion unabhängig ist.

Bei der ersten Methode setze man:

$$P = \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right),$$

wo p eine ganze Zahl bedeutet, so ist:

$$P^2 = \left[\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\Gamma\left(\frac{p-2}{p}\right)\right]\ldots\left[\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right]$$

und nach Gleichung 2.) ist:

$$P^2 = \frac{\pi}{sin\frac{\pi}{p}}\cdot\frac{\pi}{sin\frac{2\pi}{p}}\cdot\ldots\cdot\frac{\pi}{sin\frac{p-1}{p}\pi},$$

$$P^2 = \frac{\pi^{p-1}}{sin\left(\frac{\pi}{p}\right)sin\left(\frac{2\pi}{p}\right)\ldots sin\left(\frac{p-1}{p}\pi\right)}.$$

Daß das im Nenner auftretende Produkt:

$$sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\ldots\ldots sin\left(\frac{p-1}{p}\pi\right) = \frac{p}{2^{p-1}}$$

zeigt Dirichlet in folgender Weise: Die Wurzeln der Gleichung:

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$$

sind gegeben in der Form: $x = cos\frac{2K}{p}x + i\,sin\frac{2K}{p}x = e^{\frac{2K\pi i}{p}}$, wo

$$\varkappa = 1, 2, 3, \ldots\ldots p-1.$$

Mithin ist: $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = \prod_{K=1}^{p-1}\left(x - e^{\frac{2K\pi i}{p}}\right)$

und für $x = 1$

$$p = \prod_{1}^{p-1}\left(1 - e^{\frac{2K\pi i}{p}}\right).$$

Nun ist: $e^{\frac{2K\pi l}{p}} = \left(e^{\frac{K\pi i}{p}}\right)^2 = \left(cos\frac{K\pi}{p} + i\,sin\frac{K\pi}{p}\right)^2 = cos^2\frac{K\pi}{p} +$

$$+ 2i\,sin\frac{K\pi}{p}cos\frac{K\pi}{p} - sin^2\frac{K\pi}{p},$$

also ist: $p = \prod_{1}^{p-1}\left[1 - cos^2\frac{K\pi}{p} - 2i\,sin\frac{K\pi}{p}cos\frac{K\pi}{p} + sin^2\frac{K\pi}{p}\right],$

$$p = \prod_{1}^{p-1} 2\,sin\frac{K\pi}{p}\left[sin\frac{K\pi}{p} - i\,cos\frac{K\pi}{p}\right],$$

$$p = 2^{p-1}\prod_{1}^{p-1} sin\frac{K\pi}{p}\left[sin\frac{K\pi}{p} - i\,cos\frac{K\pi}{p}\right].$$

Multipliziert man die rechte Seite mit i^{p-1}, indem man sie gleichzeitig durch dieselbe Größe dividiert, so erhält man:

$$p = \frac{2^{p-1}}{i^{p-1}} \prod_{1}^{p-1}{}_{K} \sin \frac{K\pi}{p} \left[\cos \frac{K\pi}{p} + i \sin \frac{K\pi}{p} \right],$$

oder:

$$p = \frac{2^{p-1}}{i^{p-1}} \prod_{1}^{p-1}{}_{K} \sin \frac{K\pi}{p} \cdot e^{\frac{iK\pi}{p}}.$$

Nun ist:

$$\prod_{1}^{p-1}{}_{K} e^{\frac{iK\pi}{p}} = e^{\frac{i\pi}{p}[1+2+\ldots+(p-1)]} = e^{\pi i \frac{p-1}{2}},$$

$$\left[e^{\frac{\pi i}{2}} \right]^{p-1} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{p-1} = + i^{p-1},$$

$$\prod_{1}^{p-1}{}_{K} e^{\frac{iK\pi}{p}} = i^{p-1}.$$

Mithin wird:

$$p = \frac{2^{p-1}}{i^{p-1}} \cdot i^{p-1} \prod_{1}^{p-1}{}_{K} \sin \frac{K\pi}{p}$$

oder:

$$\prod_{1}^{p-1}{}_{K} \sin \frac{K\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}}.$$

Kehrt man nun zur Gleichung für P^2 zurück, so ist:

$$P^2 = \frac{\pi^{p-1} \cdot 2^{p-1}}{p} \quad \text{und} \quad P = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{1/2}} \quad \ldots\ldots 1.)$$

oder:

$$P = \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{2}{p}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p^{-\frac{1}{2}}.$$

Diese Formel läßt sich nun erweitern mit Benützung der Identität:

$$1 + \frac{a + \frac{r}{p}}{q} = \left(1 + \frac{pa}{pq+r}\right) \left(1 + \frac{\frac{r}{p}}{q}\right) \quad \ldots\ldots \alpha')$$

Daraus folgt:

$$q + a + \frac{r}{p} = \left(1 + \frac{pa}{pq+r}\right) \left(q + \frac{r}{p}\right).$$

Für $q = 0$ ersetzt man obige Identität durch:

$$a + \frac{r}{p} = \left(1 + \frac{pa}{r}\right) \frac{r}{p}.$$

Nun bilde man:

$$2.) \quad \prod_{r=0}^{p-1} \left(a + \frac{r}{p}\right) \prod_{q=1}^{n} \left(1 + \frac{a + \frac{r}{p}}{q}\right) = a \prod_{r=1}^{p-1} \prod_{q=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{pa}{qp}\right) \left(1 + \frac{pa}{r}\right) \cdot \frac{r}{n} \left(1 + \frac{pa}{pq+r}\right) \left(1 + \frac{\frac{r}{p}}{q}\right) \right].$$

Zur Untersuchung dieser Gleichung bildet man:

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{p-1}{p}\right)=\frac{n^a}{a\prod\limits_{q=1}^{n}\left(1+\frac{a}{q}\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{n^{a+\frac{1}{p}}}{\left(a+\frac{1}{p}\right)\prod\limits_{q=1}^{n}\left(1+\frac{a+\frac{1}{p}}{a}\right)}\cdots\frac{n^{a+\frac{p-1}{p}}}{\left(a+\frac{p-1}{p}\right)\prod\limits_{q=1}^{n}\left(1+\frac{a+\frac{p-1}{p}}{q}\right)},$$

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{p-1}{p}\right)=\frac{n^{pa+\frac{p-1}{2}}}{\prod\limits_{r=0}^{p-1}\left(a+\frac{r}{p}\right)\prod\limits_{q=1}^{n}\left(1+\frac{a+\frac{r}{p}}{q}\right)}.$$

Es ist also:

$$3.)\quad \prod_{r=0}^{p-1}\prod_{q=1}^{n}\left[a+\frac{r}{p}\right]\left[1+\frac{a+\frac{r}{p}}{q}\right]=$$

$$=\frac{n^{pa+\frac{p-1}{2}}}{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{p-1}{p}\right)}.$$

Nun ziehen wir wieder die Definition der Γ-Funktion heran:

$$\Gamma(p,a)=lim\,\frac{n^{pa}}{pa\prod\limits_{q=1}^{n}\left(1+\frac{pa}{q}\right)}.$$

Setzt man darin $n=np+p-1$, so wird:

$$\prod_{q=1}^{pn+p-1}\left(1+\frac{pa}{q}\right)=\left[\left\{\left[1+\frac{pa}{1}\right]\ldots\left[1+\frac{pa}{p-1}\right]\right\}\cdot\right.$$

$$\left\{\left(1+\frac{pa}{p}\right)\ldots\left(1+\frac{pa}{p+p-1}\right)\right\}\cdot\left\{\left(1+\frac{pa}{2p}\right)\ldots\left(1+\frac{pa}{2p+p-1}\right)\right\}\ldots$$

$$\left.\ldots\ldots\left\{\left(1+\frac{pa}{np}\right)\ldots\left(1+\frac{pa}{np+p+1}\right)\right\}\right]$$

oder:

$$\prod_{q=1}^{pn+p-1}\left(1+\frac{pa}{q}\right)=\prod_{r=1}^{p-1}\left(1+\frac{pa}{r}\right)\prod_{r=1}^{p-1}\left(1+\frac{pa}{p+r}\right)\prod_{r=1}^{p-1}\left(1+\frac{pa}{2p+r}\right)\ldots$$

$$\ldots\prod_{q=1}^{n}\left(1+\frac{pa}{qp}\right),$$

$$\prod_{q=1}^{pn+p+1}\left(1+\frac{pa}{q}\right)=\left\{\prod_{r=1}^{p-1}\prod_{K=0}^{n}\left(1+\frac{pa}{Kp+r}\right)\right\}\prod_{q=1}^{n}\left(1+\frac{pa}{qp}\right).$$

Trennt man das Glied für $K=0$ und ersetzt $K=q$, so ist:

$$\prod_{q=1}^{pn+p-1}\left(1+\frac{pa}{q}\right)=\prod_{r=1}^{p-1}\prod_{q=1}^{n}\left(1+\frac{pa}{r}\right)\left(1+\frac{pa}{qp+r}\left(1+\frac{pa}{qp}\right)\right.$$

Daher ist:

$$\Gamma(pa) = lim \frac{(pn+p-1)^{pa}}{pa \prod_1^{p-1}{}_r \prod_1^n{}_q \left(1+\frac{pa}{r}\right)\left(1+\frac{pa}{qp+r}\right)\left(1+\frac{pa}{qp}\right)}.$$

Mithin ist:

$$P = lim \frac{n^{\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p}\prod_1^n{}_q\left(1+\frac{\frac{1}{p}}{q}\right)} \cdots\cdots\cdots \frac{n^{\frac{p-1}{p}}}{\frac{p-1}{p}\prod_1^n{}_q\left(1+\frac{\frac{p-1}{p}}{q}\right)},$$

$$P = lim \frac{n^{\frac{p-1}{2}}}{\prod_1^{r-1}{}_r\left(\frac{r}{p}\right)\prod_1^n{}_q\left(1+\frac{\frac{r}{p}}{q}\right)}.$$

Bildet man: $\Gamma(ap) = P =$

$$= lim \frac{(np+p-1)^{pa}\, n^{\frac{p-1}{2}}}{pa \prod_{r=1}^{p-1}{}_r \prod_1^n{}_q \left[\left(1+\frac{pa}{r}\right)\left(1+\frac{pa}{qp+r}\right)\left(1+\frac{pa}{qp}\right)\left(\frac{r}{p}\right)\left(1+\frac{\frac{r}{p}}{q}\right)\right]},$$

so erhält man daraus:

$$a \prod_1^{p-1}{}_r \prod_1^n{}_q \left(1+\frac{pa}{r}\right)\left(1+\frac{pa}{qp+r}\right)\left(1+\frac{pa}{qp}\right)\left(\frac{r}{p}\right)\left(1+\frac{\frac{r}{p}}{q}\right) =$$

$$= \frac{(np+p-1)^{pa} n^{\frac{p-1}{2}}}{p\,\Gamma(ap)\,P} \ldots 4.)$$

Aus den Gleichungen 1.), 2.), 3.) und 4.) aber folgt:

$$\frac{n^{pa+\frac{p-1}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{p-1}{p}\right)} = \frac{(np+p-1)^{pa} n^{\frac{p-1}{2}}}{p\,\Gamma(pa)(2\pi)^{\frac{p-1}{2}} . p^{-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{n^{pa}\left(p+\frac{p-1}{n}\right)^{pa} n^{\frac{p-1}{2}}}{p^{1/2}\,\Gamma(pa)(2\pi)^{-\frac{p-1}{2}}},$$

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{p-1}{p}\right) = \frac{p^{1/2}(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}\Gamma(pa)}{\left(p+\frac{p-1}{p}\right)^{pa}} =$$

$$= (2\pi)^{\frac{p-1}{2}}\Gamma(pa)\left(p+\frac{p-1}{n}\right)^{-pa} . p^{1/2}.$$

Für $n = \infty$ folgt dann:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{p-1}{p}\right) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{\frac{1}{2}-ap}\Gamma(ap),$$

woraus sich für den Wert $a = \frac{z}{2}$ und $p = 2$ die Relation ergibt:

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) = 2^{1-z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(z).$$

Bei der zweiten Methode zur Ableitung dieser Eigenschaft der Γ-Funktion geht man vom Gaußschen Produkte aus:

$$\Gamma(u) = \lim_{m=\infty} \frac{m!\,m^{u-1}}{u(u+1)\ldots(u+m-1)}.$$

Es ist dann: $$\Gamma(u) = \frac{m!\,m^{u-1}}{u(u+1)\ldots(u+m-1)}(1+\varepsilon m),$$

wo ε_m eine Größe bedeutet, die für $m = \infty$ verschwindet. Ersetzt man $u = u + \frac{i}{n}$, so erhält man die Gleichung:

$$\Gamma\left(u+\frac{i}{n}\right) = \frac{m!\,m^{u+\frac{i}{n}-1}}{\left(u+\frac{i}{n}\right)\left(u+\frac{i}{n}+1\right)\ldots\left(u+\frac{i}{n}+m-1\right)}(1+\varepsilon m).$$

Dadurch, daß man dem i der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, ... $n-1$ erteilt, erhält man folgende Gleichungen:

$$\Gamma(u) = \frac{1.2\ldots m\,m^{u-1}}{u(u+1)\ldots(u+m-1)}(1+\varepsilon m),$$

$$\Gamma\left(u+\frac{1}{n}\right) = \frac{m!\,m^{u+\frac{1}{n}-1}}{\left(u+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(u+\frac{1}{n}+m-1\right)}(1+\varepsilon m),$$

. . . . . .

$$\Gamma\left(u+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{m!\,m^{u+\frac{n-1}{n}-1}}{\left(u+\frac{n-1}{n}\right)\ldots\left(u+\frac{n-1}{n}+m-1\right)}(1+\varepsilon m),$$

aus welchen durch Multiplikation folgt:

$$\Gamma(u)\Gamma\left(u+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(u+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(m!)^n . m^{nu-\frac{n+1}{2}} . n^{mn}}{nu(un+1)\ldots(nu+nm-1)}(1+\varepsilon m),$$

wo ε_m nach wie vor eine Größe bedeutet, die für $m = \infty$ verschwindet.

Setzt man nun in der definierenden Gleichung für $\Gamma(u)$ statt $u = nu$ und statt $m = nm$, so ist:

$$\Gamma(nu) = \frac{(1.2\ldots mn)(mn)^{nu-1}}{nu(nu+1)\ldots(nu+m-1)}(1+\varepsilon' m)$$

und man erhält aus beiden Gleichungen:

$$\frac{\Gamma(u)\Gamma\left(u+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(u+\frac{n-1}{n}\right)}{n^{-un}\Gamma(nu)} = \frac{(m!)^n . n^{mu+1}}{(1.2\ldots mn)\,m^{\frac{n-1}{2}}}(1+\varepsilon m).$$

Da die rechte Seite von u unabhängig ist und nur von n abhängt, so wollen wir sie mit $\varphi(n)$ bezeichnen:

$$\Gamma(u)\,\Gamma\left(u+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(u+\frac{n-1}{n}\right)=n^{-un}\,\Gamma(nu)\,\varphi(n)$$

und
$$\varphi(n)=\lim_{m=\infty}\frac{(1.2\ldots m)^n.\,n^{mn+1}}{(1.2\ldots mn)^{m^{\frac{n-1}{2}}}}.$$

Setzt man:
$$\psi(m)=\frac{m!}{m^{m+\frac{1}{2}}},$$

so kann man schreiben:

$$\varphi(n)=\lim_{m=\infty}\frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)}\sqrt{n}=A_n\sqrt{n};$$

denn:
$$\frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)}=\frac{(m!)^n}{m^{nm+\frac{n}{2}}}\cdot\frac{(nm)^{nm+\frac{1}{2}}}{(mn)!}=\frac{(m!)^n}{m^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\frac{n^{mn+\frac{1}{2}}}{(mn)!}$$

und:
$$\sqrt{n}\,\frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)}=\frac{(m!)^u.\,n^{mu+1}}{(mn)!^{m^{\frac{n-1}{2}}}}.$$

Man setzt also:
$$A_n=\lim\frac{[\psi(m)]^2}{\psi(m,n)},$$

woraus durch die Substitution $m=2m$ folgt:

$$A_n=\lim\frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2m,n)}.$$

Nun ist aber:

$$A_n=\frac{A_n^2}{A_n}=\frac{\lim\left\{\frac{[\psi(m)]^{2n}}{\psi(mn)^2}\right\}}{\lim\left\{\frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2mn)}\right\}}=\frac{\lim\left\{\frac{[\psi(m)]^2}{\psi(2m)}\right\}^n}{\lim\left\{\frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2m,n)}\right\}},$$

woraus folgt, da sowohl
$$\frac{[\psi(m)]^2}{\psi(2mn)}=A_2,$$
als auch
$$\frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2mn)}=A_2,$$
$$A_n=A_2^{n-1}.$$

Daher ist:
$$\varphi_n\sqrt{n}\,A_2^{n-1}.$$

Substituiert man $u=2$ in:

$$\varphi(n)=\sqrt{n}\,A_n,\quad\text{so ist}$$
$$\varphi(2)=\sqrt{2}\,A_2,$$

$$A_2=\frac{\varphi(2)}{\sqrt{2}}=\lim\frac{(m!)^2.\,2^{2m+\frac{1}{2}}}{(1.2\ldots 2m).\,m^{1/2}}$$

und da nach der Formel von Wallis in der Gleichung:

$$A_2 = lim \sqrt{4\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}}$$

der Grenzwert des Radikanden 2π ist, so erscheint A_2 in der Form:

$$A_2 = \sqrt{2\pi}.$$

Folglich ist $$\varphi(n) = n^{1/2}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

und $$\Gamma(u)\,\Gamma\left(u+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(u+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-nu+\frac{1}{2}}\,\Gamma(nu).$$

Im Anschlusse an das Gaußsche Produkt gelangt M. Lerch zu einer eleganten Formel, die den absoluten Betrag der Γ-Funktion mit komplexem Argument betrifft, unter der Voraussetzung, daß der reelle Teil des Argumentes $u = \alpha + i\beta$ der Bedingung genügt:

$$0 < \alpha < 1.$$

Es ist bekanntlich:

$$\frac{1}{\Gamma(u)} = u\,e^{Cu}\prod_1^\infty{}_n\left(1+\frac{u}{n}\right)e^{-\frac{u}{n}} \quad \text{und daher}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta i)} = (\alpha+i\beta)\,e^{C\alpha}.e^{Ci\beta}\prod_1^\infty{}_n\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)+\frac{\beta i}{n}\right]e^{-\frac{\alpha}{n}-\frac{i\beta}{n}}.$$

Ferner ist: $$|\alpha+i\beta| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{und}$$

$$e^{iC\beta} = \cos C\beta + i\sin C\beta,$$

$$|e^{iC\beta}| = \sqrt{\cos^2 C\beta + \sin^2 C\beta} = 1 \quad \text{u. analog:}$$

$$\left|e^{\frac{i\beta}{n}}\right| = 1.$$

Ferner ist: $$\left|\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)+\frac{i\beta}{n}\right| = \sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2+\frac{\beta^2}{n^2}}, \quad \text{mithin wird:}$$

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha+i\beta)}\right| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}.e^{C\alpha}\prod_1^\infty{}_n\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2+\frac{\beta^2}{n^2}\right]^{1/2}.e^{-\frac{\alpha}{n}}.$$

Das rechts stehende Produkt ist in zwei Produkte zerlegbar:

$$\prod_1^\infty{}_n\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2+\frac{\beta^2}{n^2}\right]^{1/2}.e^{-\frac{\alpha}{n}} = \prod_1^\infty{}_n\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]^{1/2}.$$

Setzt man in der bekannten Formel:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}$$

für $\Gamma(\alpha)$ seinen Wert, so ist:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} = e^{C\alpha}\prod_1^\infty{}_n\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}},$$

also ist:

$$\prod_1^\infty{}_n\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2+\frac{\beta^2}{n^2}\right]^{1/2}e^{-\frac{\alpha}{n}} = \frac{1}{e^{C\alpha}\Gamma(\alpha+1)}\prod_1^\infty{}_n\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]^{1/2}.$$

Da $0 < \alpha < 1$, so liegt das Produkt

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]$$

zwischen den beiden Produkten, die man erhält, wenn man einmal $\alpha = 0$, das anderemal $\alpha = 1$ setzt:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left[1+\frac{\beta^2}{n^2}\right] \text{ und } \prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left[1+\frac{\beta^2}{(1+n)^2}\right].$$

Wenden wir auf das erste Produkt:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left[1+\frac{\beta^2}{n^2}\right]=\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left[1-\left(\frac{i\beta}{n}\right)^2\right]$$

die bekannte Formel an:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}$$

und setzen $z = i\beta$, so wird:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left[1-\left(\frac{i\beta}{n}\right)^2\right]=\frac{\sin i\beta\pi}{i\beta\pi},$$

andererseits ist: $\sin i\beta\pi = \dfrac{e^{-\pi\beta}-e^{\pi\beta}}{2i}$ und

$$\frac{\sin i\beta\pi}{2i\beta\pi}=\frac{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}}{2\beta\pi}=\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left[1+\frac{\beta^2}{n^2}\right].$$

Das zweite Produkt für $\alpha = 1$ läßt sich auch so schreiben:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(1+n)^2}\right]=\left(1+\frac{\beta^2}{2^2}\right)\cdots\cdots\left[1+\frac{\beta^2}{(1+n)^2}\right].$$

Durch beiderseitige Multiplikation mit $\left(1+\frac{\beta^2}{1^2}\right)$ folgt:

$$(1+\beta^2)\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left[1+\frac{\beta^2}{(1+n)^2}\right]=\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left[1+\frac{\beta^2}{\nu^2}\right]=\frac{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}}{2\beta\pi},$$

also ist:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left[1+\frac{\beta^2}{(1+n)^2}\right]=\frac{1}{1+\beta^2}\cdot\frac{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}}{2\beta\pi}$$

und demnach:

$$\frac{1}{1+\beta^2}\cdot\frac{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}}{2\beta\pi}\leqq\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]\leqq\frac{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}}{2\beta\pi}.$$

Ist λ eine Zahl von der Art, daß:

$$\frac{1}{1+\beta^2}<\frac{1}{\lambda^2}<1,$$

also:

$$1+\beta^2>\lambda^2>1,$$

so liegt λ so, daß $1<\lambda<\sqrt{1+\beta^2}$ und es ist dann:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]=\frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}}{2\beta\pi}$$

und man hat die Relation:

$$\frac{1}{|\Gamma(\alpha+i\beta)|}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}}{2\beta\pi}}.$$

Es ergibt sich also für den Modul von $\Gamma(\alpha+i\beta)$ die Form:

$$|\Gamma(\alpha+i\beta)|=\lambda\,\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\frac{2\beta\pi}{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}}}.$$

Setzt man darin $\alpha=0$, so ist $\lambda=1$ zu wählen, und man erhält:

$$|\Gamma(i\beta)|=\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2\beta\pi}{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}}}.$$

M. Lerch gibt für $|\Gamma(\alpha+i\beta)|$ noch eine andere Darstellungsform, die er mit Hilfe der Binet'schen und Gudermann'schen Formel herleitete. Bevor aber auf die Ableitung dieses Ausdruckes für $|\Gamma(\alpha+i\beta)|$ eingegangen wird, sollen im folgenden vorerst die beiden genannten Formeln abgeleitet werden:

Nach dem früheren ist:

$$\Pi(u)=n^u\cdot\frac{n!}{u(u+1)\ldots(u+n)}=\frac{1}{u}\prod_1^n{}_\nu\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^u}{\left(1+\frac{u}{\nu}\right)}$$

und:

$$\lim_{n=\infty}\Pi(u)=\Gamma(u),$$

so daß:

$$\Gamma(u)=\frac{1}{u}\prod_1^\infty{}_\nu\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^u}{\left(1+\frac{u}{\nu}\right)}$$

oder:

$$u\,\Gamma(u)=\prod_1^\infty{}_\nu\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^u}{\left(1+\frac{u}{\nu}\right)},$$

woraus weiter folgt:

$$lg\,u+lg\,\Gamma(u)=\sum_1^\infty{}_\nu\left\{u\,lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-lg\left(1+\frac{u}{\nu}\right)\right\}.$$

Bezeichnet man mit:

$$b_\nu=u\,lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-lg\left(1+\frac{u}{\nu}\right),$$

so ist:

$$lg\,u+lg\,\Gamma(u)=\sum_{\nu=1}^\infty b_\nu.$$

Läßt man vorläufig ν nur die Werte von 1 bis n durchlaufen, so ist

$$\sum_{\nu=1}^n b_\nu=b_1+b_2+\ldots+b_n=b_1-b_2+2b_2-2b_3-\ldots$$
$$\ldots+(n-1)\,b_{n-1}-(n-1)\,b_n+n\,b_n$$

und

$$\sum_{\nu=1}^\infty b_\nu=\sum_{\nu=1}^\infty \nu\,(b_\nu-b_{\nu+1}),\ \text{da}\ \lim_{n=\infty} b_n=0.$$

Da ferner: $$\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u),$$

so ist: $$lg\,\Gamma(u+1) = lg\,u + lg\,\Gamma(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\,(b_\nu - b_{\nu+1}),$$

$$lg\,\Gamma(u+1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left\{ \left[u\,lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right) - lg\left(1+\frac{u}{\nu}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \left[u\,lg\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right) - lg\left(1+\frac{u}{\nu+1}\right)\right]\right\} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left\{ \left[u\,lg\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) - lg\left(\frac{u+\nu}{\nu}\right)\right] - \left[u\,lg\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\right) - lg\left(\frac{u+\nu+1}{\nu+1}\right)\right]\right\} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left\{ u\left[lg\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) - lg\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\right)\right] + lg\left(\frac{u+\nu+1}{\nu+1}\right) - lg\left(\frac{u+\nu}{\nu}\right)\right\} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left\{ u\,lg\left(\frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{\nu+1}{\nu+2}\right) + lg\,\frac{u+\nu+1}{u+\nu} - lg\,\frac{\nu+1}{\nu}\right\}.$$

Dadurch, daß $u = u-1$ und $\nu = \nu+1$ gesetzt wird, geht die letzte Gleichung über in:

$$lg\,\Gamma(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) \left\{ (u-1)\,lg\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+2}{\nu+3}\right) + lg\,\frac{u+\nu+1}{u+\nu} - lg\,\frac{\nu+2}{\nu+1}\right\} \ldots A.)$$

Nun ist aber:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left[lg\,\frac{u+\nu+1}{u+\nu} - lg\,\frac{\nu+2}{\nu+1}\right] = lg\,\frac{u+n}{n+1} - lg\,u$$

und: $$\lim_{n=\infty} lg\,\frac{u+n}{n+1} = 0,$$

also ist: $$-lg\,u = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[lg\,\frac{u+\nu+1}{u+\nu} - lg\,\frac{\nu+2}{\nu+1}\right].$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\left(u-\frac{1}{2}\right)$ und addiert hernach dazu Gleichung A), so erhält man:

$$lg\,\Gamma(u) - \left(u-\frac{1}{2}\right) lg\,u = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(u+\nu+\frac{1}{2}\right) \left[lg\,\frac{u+\nu+1}{u+\nu} - lg\,\frac{\nu+2}{\nu+1}\right] +$$
$$+ \left[(\nu+1)(u-1)\,lg\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+2}{\nu+3}\right)\right].$$

Nun ist aber:

$$\left(u+\nu+\frac{1}{2}\right) lg\,\frac{u+\nu+1}{u+\nu} = 1 + \frac{1}{12}\,\frac{1}{(u+\nu)^2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(u+\nu)^3} + \ldots\ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{(u+\nu)^2}\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{12\,(u+\nu)} + \ldots\right]$$

und: $$\left(u+\nu+\frac{1}{2}\right) lg\,\frac{u+\nu+1}{u+\nu} - 1 = \frac{\varepsilon_\nu}{(u+\nu)^2},$$

wo unter $$\varepsilon_\nu = \frac{1}{12} - \frac{1}{12\,(u+\nu)} + \ldots.$$

zu verstehen ist. Die Reihe für ε_ν bleibt aber sobald $n+\nu$ unendlich groß wird, endlich; folglich ist die Reihe

$$\omega(u)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(u+\nu+\frac{1}{2}\right)lg\frac{u+\nu+1}{u+\nu}-1\right]$$

absolut und gleichmäßig konvergent. Schließlich kann man der Funktion $\omega(u)$, die als Binet'sche Funktion bekannt ist, noch die Form geben:

$$\omega(u)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(u+\frac{2\nu+1}{2}\right)lg\left(1+\frac{1}{u+\nu}\right)-1\right].$$

Der Ausgangspunkt für die Ableitung der Gudermann'schen Formel bildet wieder das Gaußsche Produkt:

$$\Pi(u)=\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^u\left(1+\frac{1}{2}\right)^u\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^u}{\left(1+\frac{u}{1}\right)\left(1+\frac{u}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{u}{n}\right)},$$

woraus folgt:

$$lg\,\Pi(u)=n\,lg\left(\frac{2}{1}\right)+u\,lg\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+n\,lg\frac{n}{n-1}-lg\,u-\ldots-lg\left(1+\frac{u}{n}\right)=$$

$$=u\,lg\,n-lg\,u-lg\left(1+\frac{u}{1}\right)-lg\left(1+\frac{u}{2}\right)-\ldots-lg\left(1+\frac{u}{n}\right)$$

und da der Ausdruck

$$u\,lg\left(1+\frac{u}{n}\right)+lg\left(1+\frac{u}{n}\right)$$

für $n=\infty$ verschwindet, so kann er zur rechten Seite der letzten Gleichung unbeschadet der Richtigkeit hinzugefügt werden, so daß man erhält:

$$lg\,\Pi(u)=u\,lg\,n-u\,lg\left(1+\frac{u}{n}\right)-lg\,u-lg\left(1+\frac{u}{n}\right)\ldots-lg\left(1+\frac{u}{n-1}\right)-$$
$$-lg\left(1+\frac{u}{n}\right)+lg\left(1+\frac{u}{n}\right).$$

Setzt man:

$$v_n=u\,lg\,(n+u)-lg\,u-lg\left(1+\frac{u}{1}\right)\ldots\ldots-lg\left(1+\frac{u}{n-1}\right),$$

so ist

$$\lim_{n=\infty}v_n=lg\,\Gamma(u).$$

Bildet man nun die Differenz:

$$v_{n+1}-v_n=u\,lg\left(1+\frac{1}{u+n}\right)-lg\left(1+\frac{u}{n}\right),$$

so läßt sich dieselbe in folgende Gestalt transformieren:

$$v_{n+1}-v_n=\left[\left(u+\frac{2n+1}{2}\right)lg\left(1+\frac{1}{u+n}\right)-1\right]-$$
$$-\left[\frac{2n+1}{2}lg\left(1+\frac{1}{u}\right)-1\right]-\left[\frac{2n+1}{2}lg\left(1+\frac{u}{n+1}\right)-\frac{2n-1}{2}lg\left(1+\frac{u}{n}\right)\right].$$

Ferner kann man:

$$\omega(u)=\sum_{0}^{\infty}{}_n\left[\left(u+\frac{2n+1}{2}\right)lg\left(1+\frac{1}{u+n}\right)-1\right]$$

auch die Form geben:

$$\omega(u)=\left(1+\frac{1}{2}\right)lg\left(1+\frac{1}{1}\right)-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(u+\frac{2n+1}{2}\right)lg\left(1+\frac{1}{u+n}\right)-1\right],$$

woraus für $u=1$ folgt:

$$\omega(1)=\left(1+\frac{1}{2}\right)lg\left(1+\frac{1}{1}\right)-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{2n+1}{2}\right)lg\left(1+\frac{1}{1+n}\right)-1\right]$$

oder:

$$\omega(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{2}lg\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right].$$

Mit Berücksichtigung der eben erhaltenen Relationen, läßt sich die Summe von $v_{n+1}-v_n$ für $n=1, 2\ldots\infty$, so schreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(v_{n+1}-v_n)=\left[\omega(u)-\left(u+\frac{1}{2}\right)lg\left(1+\frac{1}{u}\right)+1\right]-\omega(1)-$$
$$-\left[u-\frac{1}{2}lg(1+u)\right].$$

Anderseits ist:

$$\sum_{n=1}^{n}(v_{n+1}-v_n)=v_2-v_1+v_3-v_2+\ldots+v_{n+1}-v_n=-v_1+v_{n+1}$$

und:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(v_{n+1}-v_n)=-v_1+\lim_{n=\infty}v_{n+1}.$$

Da aber:

$$\lim_{n=\infty}v_{n+1}=lg\,\Gamma(u)$$

so ist:

$$lg\,\Gamma(u)-v_1=\omega(u)-\left(u+\frac{1}{2}\right)lg\left(1+\frac{1}{u}\right)+1-\omega(1)-u+\frac{1}{2}lg(1+u)$$

und weil:

$$-u\,lg\left(1+\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{2}lg\left(1+\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{2}lg(1+u)=\left(u-\frac{1}{2}\right)lg\,u,$$

so ist: $lg\,\Gamma(u)=1-\omega(1)+\left(u-\frac{1}{2}\right)lg\,u-u+\omega(u)$. Setzt man

$$1-\omega(1)=\lambda,$$

so wird:

$$lg\,\Gamma(u)=\lambda+\left(u-\frac{1}{2}\right)lg\,u-u+\omega(u).$$

Zur Bestimmung des λ setzt man einmal für $u=n$, dann $u=2n$ und erhält:

$$2\,lg\,\Gamma(n)=2\lambda+(2n-1)\,lg\,n-2n+2\,\omega(n),$$

$$lg\,\Gamma(2n)=\lambda+\left(2n-\frac{1}{2}\right)lg\,2n-2n+\omega(2n).$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen folgt:

$$lg\left[\frac{\Gamma(2n)}{(\Gamma(n))^2}\right]=-\lambda+\frac{1}{2}lg\,n+\left(2n-\frac{1}{2}\right)lg\,2+\omega(2n)-2\,\omega(n)$$

oder:

$$lg\frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}=-\lambda+\frac{1}{2}lg\,n+\left(2n-\frac{1}{2}\right)lg\,2+\omega(2n)-2\,\omega(n),$$

so daß:

$$\lambda=\frac{1}{2}lg\,n+\left(2n-\frac{1}{2}\right)lg\,2+lg\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}+\omega(2n)-2\,\omega(n).$$

Setzt man: $$\lambda_n = n^{1/2} . 2^{2n-\frac{1}{2}} . \left[\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\right]^2,$$

so wird: $$\lambda = lg\,\lambda_n + \omega(2n) - 2\,\omega(n).$$

Läßt man in dieser Gleichung n unendlich groß werden, so verschwindet $\omega(2n)$ und $\omega(n)$, während sich λ_n, nachdem man es so transformiert hat, daß

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{4}{2n} \cdot \frac{(2.4.6\ldots 2n)^2}{[1.3.5..(2n-1)]^2}},$$

der Grenze $\sqrt{2\pi}$ nähert, wie sich mit Hilfe der Formel von Wallis zeigen läßt. Da nun:

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n = \sqrt{2\pi},$$

so ist: $$\lambda = lg\sqrt{2\pi}$$

und: $$lg\,\Gamma(u) = lg\sqrt{2\pi} + \left(u - \frac{1}{2}\right) lg\,u - u + \omega(u),$$

welche Formel nach Gudermann benannt ist.

Setzt man nun in dieser Formel:

$$u = \alpha + i\beta$$

und berücksichtigt, daß:

$$lg(\alpha + i\beta) = lg(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} + i\,arc\,tan\frac{\beta}{\alpha},$$

so ist: $$u^{u-\frac{1}{2}} = (\alpha + i\beta)^{\alpha - \frac{1}{2} + i\beta} = e^{(\alpha - \frac{1}{2} + i\beta)\,lg(\alpha + i\beta)} =$$

$$= e^{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) lg(\alpha + i\beta)} . e^{i\beta\,lg(\alpha i + \beta)} =$$

$$= e^{\left[\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + i\frac{\beta}{2}\right] lg(\alpha^2 + \beta^2)} . e^{-\beta\,arc\,tan\frac{\beta}{\alpha} + i\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) arc\,tan\frac{\beta}{\alpha}},$$

$$u^{u-\frac{1}{2}} = [\alpha^2 + \beta^2]^{\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + i\frac{\beta}{2}} . e^{-\beta\,arc\,tan\frac{\beta}{\alpha} + i\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) arc\,tan\frac{\beta}{\alpha}}$$

und: $$\left| u^{u-\frac{1}{2}} \right| = [\alpha^2 + \beta^2]^{\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} e^{-\beta\,arc\,tan\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Ferner geht zur Bestimmung von $|\omega(\alpha + i\beta)|$ aus der Formel für $\omega(u)$ hervor, daß

$$|\omega(\alpha + i\beta)| < \frac{1}{12} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(\alpha + \nu + i\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha + \nu + i\beta)^3} \right\}$$

$$< \frac{1}{12} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(\sqrt{(\alpha+\nu)^2 + \beta^2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{(\alpha+\nu)^2 + \beta^2})^{3/2}} \right]$$

$$< \frac{1}{12} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(\alpha+\nu)^2 + \beta^2}\,[\sqrt{(\alpha+\nu)^2 + \beta^2} - 1]} \cdot$$

$$\left[1 - \frac{1}{(\sqrt{(\alpha+\nu)^2 + \beta^2})^2} \right],$$

da $$\frac{1}{(\sqrt{(\alpha+\nu)^2 + \beta^2})^2} < 1,$$

so wird obige Ungleichung noch verstärkt, wenn man dieses Glied wegläßt und schreibt

$$|\omega(\alpha+i\beta)| < \frac{1}{12}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(\alpha+\nu)^2+\beta^2}\left[\sqrt{(\alpha+\nu)^2+\beta^2}-1\right]};$$

daraus wieder folgt:

$$e^{|\omega(\alpha+i\beta)|} < e^{\frac{1}{12}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(\alpha+\nu)^2+\beta^2}\left[\sqrt{(\alpha+\nu)^2+\beta^2}-1\right]}} < 1+M,$$

wo M eine endliche Größe bedeutet, die mit $\alpha=\infty$ und $\beta=\infty$ verschwindet.

Es läßt sich dann immer eine Zahl Θ finden derart, daß

$$e^{|\omega(\alpha+i\beta)|} = 1+\Theta M = 1+\varepsilon.$$

Wird nun in der Formel von Gudermann:

$$\Gamma(u) = \sqrt{2\pi}\,.\,u^{u-\frac{1}{2}}\,.\,e^{-u}\,.\,e^{\omega(u)}$$

für $u=\alpha+i\beta$ gesetzt und überall der absolute Wert genommen, so erhält man:

$$|\Gamma(\alpha+i\beta)| = \sqrt{2\pi}\left|u^{u-\frac{1}{2}}\right|\left|e^{-u}\right|\left|e^{\omega(u)}\right|,$$

also ist:

$$|\Gamma(\alpha+i\beta)| = \sqrt{2\pi}(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\,e^{-\beta\,arctan\frac{\beta}{\alpha}}\,e^{-\alpha}(1+\varepsilon).$$

Als letzte Anwendung des Gauß'schen Produktes soll in diesem Abschnitte noch die Gültigkeit der Gleichung:

$$B(p\,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

auch für komplexe Argumente bewiesen werden. Durch das Eulersche Integral:

$$B(p\,q) = \int_0^1 \frac{z^{p-1}+z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz$$

wird die Funktion $B(p\,q)$ nur in dem durch die Bedingungen, daß der reelle Teil von p und q größer als Null ist, gegebenen Gebiete definiert. Zur Ausdehnung dieser Funktion auf andere Werte kann man sich entweder der Darstellung von $B(p\,q)$ durch Γ-Funktionen bedienen oder wie bei den Γ-Funktionen einen geschlossenen Integrationsweg einführen (letzteres wurde von Pochhammer Math. Annal. Bd. 35 gezeigt). Wir werden uns im folgenden vorläufig nur auf die Darstellung von $B(p\,q)$ durch Γ-Funktionen beschränken.

Die Binetsche Bezeichnung:

$$B(x\,y) = \int_0^\infty \frac{\alpha^{x-1}}{(1+\alpha)^{x+y}}\,d\alpha$$

nimmt durch die Substitution:

$$\alpha = \frac{\beta}{1-\beta},\quad \beta = 1-\gamma,$$

wenn man schließlich statt β und γ wieder α schreibt, die Form an:

$$B(x\,y) = \int_0^1 \alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y-1}\,d\alpha.$$

Nun ist:

$$B(xy) = \int_0^1 \alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y-1}(1-\alpha+\alpha)\,d\alpha = B(x,y+1) + B(x+1,y)$$

und:

$$B(x+1,y) = \int_0^1 \alpha^{x}(1-\alpha)^{y-1}\,d\alpha = \frac{x}{y}\int_0^1 \alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y}\,d\alpha = \frac{x}{y}B(x,y+1).$$

Es ergibt sich also die Rekursionsformel, da:

$$B(x,y+1) = B(xy) - B(x+1,y),$$

$$B(xy) = \frac{x}{y}B(x,y+1) + B(x,y+1),$$

$$B(xy) = \frac{x+y}{y}B(x,y+1).$$

Aus der Symmetrie von $B(xy)$ hinsichtlich beider Argumente folgt:

$$B(x,y+1) = B(x+1,y)$$

und mithin, daß

$$B(xy) = \frac{x+y}{y}B(x+1,y).$$

Durch n-malige Anwendung dieser Formel folgt:

$$B(xy) = \frac{(x+y)(x+y+1)\ldots(x+y+n-1)}{y(y+1)\ldots\ldots(y+n-1)}B(x,y+n),$$

$$B(xy) = \frac{x+y}{y}\prod_1^{n-1}{}_{\nu}\frac{x+y+\nu}{y+\nu}\cdot B(x,y+n).$$

Will man aus dieser Beziehung die unendliche Produktentwicklung gewinnen, so braucht man nur das Verhalten von $B(x,y+n)$ für unbegrenzt wachsendes n zu untersuchen. Da ohne weiters, wenn $h > o$ ist, folgt:

$$B(xy) > B(x,y+h),$$

so hat man, wenn p die kleinste positive Zahl ist, die größer oder gleich y ist:

$$B(x,n) > B(x,y+n) > B(x,p+n),$$

$$1 > \frac{B(x,y+n)}{B(x,n)} > \frac{B(x,p+n)}{B(x,n)} \quad \ldots\ldots a)$$

Kehrt man jetzt die Gleichung:

$$B(xy) = \frac{(x+y)(x+y+1)\ldots(x+y+n-1)}{y(y+1)\ldots\ldots(y+n-1)}B(x,y+n)$$

um und setzt $y = 1$ und $n = m-1$, so ist

$$B(x,m) = \frac{(m-1)!}{(x+1)\ldots(x+m-1)}B(x,1)$$

und da

$$B(x,1) = \int_0^1 \alpha^{x-1}\,d\alpha = \frac{1}{x},$$

ist:

$$B(x,m) = \frac{(m-1)!}{x(x+1)\ldots(x+m-1)} = \frac{1}{x}\prod_1^{m-1}{}_{\nu}\left(\frac{\nu}{x+\nu}\right).$$

Mit Benützung dieses Resultates geht die Ungleichung a) über in:

$$1 > B(x, y+n)\, x \prod_{1}^{n-1}{}_{\nu} \frac{x+\nu}{\nu} > \frac{n(n+1)\,..\,(n+p-1)}{(x+n)\,...\,(x+n+p-1)} > \frac{n^p}{(x+n)^p}.$$

Daraus folgt:

$$B(x, y+n)\, x \prod_{1}^{n-1}{}_{\nu} \frac{x+\nu}{\nu} = 1 - \Theta \frac{p\,x}{n}, \text{ wo } 0 < \Theta < 1,$$

so daß man setzen kann:

$$B(x, y+n)\, x \prod_{1}^{n-1}{}_{\nu} \frac{x+\nu}{\nu} = 1 - \varepsilon_n,$$

wo

$$\varepsilon_n = \vartheta' \frac{p\,x}{n} \text{ und } 0 < \vartheta' < \Theta < 1.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Mithin läßt sich die Gleichung für $B(x, y)$ so schreiben:

$$B(x\,y) = \frac{x+y}{x\,y} \prod_{1}^{n-1}{}_{\nu} \frac{\nu(x+y+\nu)}{(x+\nu)(y+\nu)} (1 - \varepsilon_n).$$

Wächst n ins Unendliche, so wird:

$$B(x\,y) = \frac{x+y}{x\,y} \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\nu(x+y+\nu)}{(x+\nu)(y+\nu)} = \frac{x+y}{x\,y} \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\left(1+\frac{x+y}{\nu}\right)}{\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\left(1+\frac{y}{\nu}\right)}.$$

Die Konvergenz dieses Produktes erkennt man sofort, wenn man $B(x\,y)$ auf die Form bringt:

$$B(x\,y) = \frac{x+y}{x\,y} \cdot \frac{\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1+\frac{x+y}{\nu}\right) e^{-\frac{x+y}{\nu}}}{\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1+\frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} . \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1+\frac{y}{\nu}\right) e^{-\frac{y}{\nu}}},$$

in welcher dann jedes der Teilprodukte einzeln für sich unbedingt konvergiert, und zwar nicht nur für positive Werte von x und y, sondern auch für alle negativen und komplexen Werte, sofern nicht gerade x oder y oder $x+y$ der Null gleich oder negativ ganzzahlig ist; die letzte Produktenentwicklung kann also wie die der $\Gamma(x)$ als erweiterte Definition von $B(x\,y)$ angesehen werden. Zugleich ergibt sich durch Vergleich die wichtige Beziehung:

$$B(x\,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{Fc(x+y)}{Fc(x)\,Fc(y)} \ldots . b).$$

Setzt man: $y = 1 - x$, so wird, da

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$B(x, 1-x) = \Gamma(x)\;\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \text{ (für beliebige komplexe } x)$$

und falls x und $1-x$ beide positiv sind, das heißt x ein echter positiver Bruch ist, ist:

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{x-1}}{1+\alpha}\, d\alpha = \int_0^1 \frac{a^{-x}}{1+\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (0 < x < 1).$$

Setzt man endlich n gleich einer positiven, ganzen Zahl, so folgt aus Gleichung b) mit Rücksicht darauf, daß:

$$\Gamma(x+n) = (n-1)!\, n^x (1 + \vartheta\, \varepsilon_n), \text{ wo } \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ und } 0 < \vartheta < 1,$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!} B(x,n) = (1 + \vartheta\, \varepsilon_n)\, n^x . B(x,n),$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} n^x . B(x,n),$$

eine Relation, die für $x > 0$ auch an der betreffenden Integralfunktion sich nachweisen läßt, und dann zur Ableitung der Produktentwicklung von $\Gamma(x)$ aus der von $B(x,n)$ dienen kann.

Da die Untersuchung der Γ-Funktion für komplexe Argumente mit diesem Aufsatze noch nicht erschöpft ist, soll dieselbe von anderen Grundlagen, als von dem Gauß'schen Produkte ausgehend, den Gegenstand des nächstjährigen Programmaufsatzes bilden.

Dr. Georg Burggraf.