Über arithmetische Bestimmung der endlichen Gruppen.

Seitdem durch Cayley der Begriff einer endlichen Gruppe von dem Substitutionsbegriff unabhängig gemacht ist, läuft die Aufgabe der Gruppenbestimmung auf die Aufsuchung von Operationen hinaus, für die teilweise die Gesetze der Arithmetik gelten. Es schien mir daher der Versuch nicht uninteressant, die Gruppenbestimmung als rein arithmetische Aufgabe aufzufassen und zu behandeln. Diesem Versuch ist die vorliegende Abhandlung gewidmet. Das schließliche Ergebnis, zu dem ich gelangt bin, ist ein unerwartet einfaches: Die Bedingung für die Existenz einer Gruppe läßt sich arithmetisch durch eine Produktgleichung darstellen, und die Bestimmung aller Gruppen gegebener Ordnung kann dadurch zurückgeführt werden auf die Entwicklung eines Produkts von Summen, die ich in expliziter Form aufstelle, nach Potenzen der in ihnen vorkommenden Größen. Damit soll nicht gesagt sein, daß diese Entwicklung und damit die Gruppenbestimmung leicht ausführbar sei; dieselbe verlangt vielmehr schon für niedrige Ordnungszahlen,*) wenigstens bei mechanischer Ausführung, sehr zeitraubende Rechnung. Das erlangte Resultat kann daher nur theoretisches Interesse beanspruchen, sofern aus ihm hervorgeht, daß die Gruppenbestimmung durch formale arithmetische Multiplikation geleistet werden kann.

§ 1.

Es mögen durch $0, 1, 2 \ldots \nu$ die Elemente einer Gruppe $\nu + 1$. Ordnung im Cayleyschen Sinne bezeichnet sein, deren Identität 0 ist, sodaß also stets $0\alpha = \alpha 0 = \alpha$ ist. Dann besteht die Aufgabe der Gruppenbestimmung darin, jeder Verbindung $\alpha\beta$ ($\alpha = 0, 1 \ldots \nu$, $\beta = 0, 1 \ldots \nu$) eine und nur eine Zahl $\gamma = \alpha\beta$ der Reihe $0, 1 \ldots \nu$ so zuzuordnen, daß erstens je zwei Verbindungen $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta$, in denen α und α_1 verschieden von einander sind, und ebenso je zwei Verbindungen $\alpha\beta$, $\alpha\beta_1$, in denen β und β_1 verschieden von einander sind, verschiedene Zahlen γ zugeordnet werden, und daß zweitens das assoziative Gesetz für diese Zuordnungen gilt. Es muß also stets $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ sein, oder wenn $\alpha\beta = \delta$, $\beta\gamma = \epsilon$ ist, so muß $\delta\gamma = \alpha\epsilon$ sein, d. h. den Verbindungen $\delta\gamma$, $\alpha\epsilon$ muß dieselbe Zahl zugeordnet sein.

Die Frage nach denjenigen Zahlen, welche den Verbindungen $\alpha\beta$ zuzuordnen sind, in denen eine der Zahlen α, β, oder beide Null sind, ist dadurch erledigt, daß stets $\alpha 0 = 0\alpha = \alpha$ sein soll. Es kann sich daher nur um die Zuordnungen zu solchen Verbindungen $\alpha\beta$ handeln, in denen α und β von 0 verschieden sind. In diesen muß stets die einer Verbindung $\alpha\beta$ zugeordnete Zahl $\gamma = \alpha\beta$ verschieden von α und β sein, da α schon der Verbindung $\alpha 0$, β der Verbindung 0β zugeordnet ist. Ist außerdem auch γ von 0 verschieden, so ist jede solche

*) Für die Ordnungszahl 4 ist die Ausführung am Schlusse gegeben.

Zuordnung $\alpha\ \beta = \gamma$ durch eine Verbindung $\alpha\ \gamma\ \beta$ der Zahlen $1 \ldots \nu$ bestimmt, in der α und β von γ verschieden sind. Führen wir daher ein System (C) von $\nu\ (\nu-1)^2$ Größen

$$C_{\alpha\gamma\beta}\ (\alpha = 1 \ldots \nu;\ \gamma = 1 \ldots \alpha-1,\ \alpha+1 \ldots \nu;\ \beta = 1 \ldots \gamma-1,\ \gamma+1 \ldots \nu)$$

ein, so entspricht jeder Zuordnung $\alpha\ \beta = \gamma$, in der α, β und γ von 0 verschieden sind, eine Größe $C_{\alpha\gamma\beta}$ dieses Systems (C). Wir setzen fest, daß jede solche Größe $C_{\alpha\gamma\beta}$ den Wert 1 haben soll, die übrigen Größen des Systems aber den Wert 0 haben sollen, und sagen, das so erhaltene Größensystem (C) entspricht der betrachteten Gruppe. Offenbar ist durch das einer Gruppe entsprechende Größensystem die Gruppe völlig bestimmt. Denn die Zuordnungen $\alpha\,\beta\,\gamma$, in denen α, β und γ von 0 verschieden sind, sind dadurch bestimmt, daß für diese $C_{\alpha\gamma\beta} = 1$ ist, die Zuordnungen $\alpha\ \beta = 0$ aber dadurch, daß für diese $C_{\alpha\gamma\beta} = 0$ für alle von α und β verschiedenen γ ist, und die Zuordnungen $\alpha\ 0 = \alpha$, $0\ \alpha = \alpha$ sind von vornherein gegeben. Die Aufgabe der Gruppenbestimmung ist damit auf die Frage nach allen, den verschiedenen Gruppen gegebener Ordnung entsprechenden Größensystemen (C), also auf eine rein arithmetische Frage zurückgeführt.

§ 2.

Soll das eingeführte Größensystem (C) einer Gruppe $\nu+1$ Ordnung entsprechen, so müssen die einzelnen Größen zunächst die Werte 0 oder 1 haben, also den Gleichungen genügen

$$\text{I} \qquad C^2_{\alpha\gamma\beta} - C_{\alpha\gamma\beta} = 0$$
$$(\gamma = 1 \ldots \nu,\ \alpha = 1 \ldots \gamma-1,\ \gamma+1 \ldots \nu,\ \beta = 1 \ldots \gamma-1,\ \gamma+1 \ldots \nu).$$

Sodann darf von je $\nu-1$ Größen

$$C_{\alpha\gamma 1},\ C_{\alpha\gamma 2} \ldots C_{\alpha,\gamma,\gamma-1},\ C_{\alpha,\gamma,\gamma+1} \ldots C_{\alpha\gamma\nu}\ (\alpha \pm \gamma)$$

nur eine gleich 1 sein. Eine aber muß auch gleich 1 sein, denn wäre keiner der $\nu-1$ Verbindungen $\alpha\,\varkappa$ ($\varkappa = 1 \ldots \gamma-1,\ \gamma+1 \ldots \nu$) die Zahl $\gamma = \alpha\,\varkappa$ zugeordnet, so könnten diesen $\nu-1$ Verbindungen nur die $\nu-1$ von α und γ verschiedenen unter den Zahlen $0, 1 \ldots \nu$ zugeordnet sein, und dasselbe würde folglich von den ν Verbindungen $\alpha\,\varkappa$ ($\varkappa = 1 \ldots \nu$) gelten, sodaß zweien dieser ν Verbindungen dieselbe Zahl zugeordnet sein müßte. Somit muß

$$\text{II}^a \qquad \sum\nolimits_\beta C_{\alpha\gamma\beta} = 1^{*)} \left(\begin{matrix}\gamma = 1 \ldots \nu, \\ \alpha = 1 \ldots \gamma-1,\ \gamma+1 \ldots \nu\end{matrix}\right)$$

sein. Ebenso folgt, daß auch

$$\text{II}^b \qquad \sum\nolimits_\alpha C_{\alpha\gamma\beta} = 1 \left(\begin{matrix}\gamma = 1 \ldots \nu, \\ \beta = 1 \ldots \gamma-1,\ \gamma+1 \ldots \nu\end{matrix}\right)$$

sein muß.

Endlich soll auch das assoziative Gesetz gelten. Um auch diese Forderung durch ein für das Größensystem (C) bestehendes Gleichungssystem auszudrücken, denken wir uns aus den Größen des Systems (C) alle möglichen Produkte der Form

$$C_{\alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{21}\ \alpha_{23}\ \alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{31}\ \alpha_{32}\ \alpha_{34}} \cdot C_{\alpha_{41}\ \alpha_{42}\ \alpha_{43}}$$

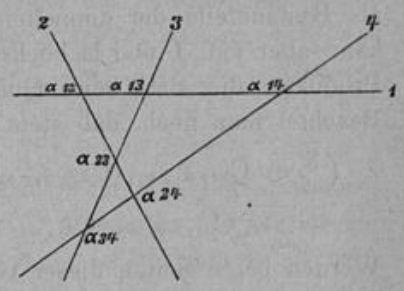
gebildet, für die $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\alpha_{13} = \alpha_{31}$ usw., allgemein $\alpha_{\varkappa\varepsilon} = \alpha_{\varepsilon\varkappa}$ ist, und bilden aus allen diesen Produkten die Summe:

$$\sum\nolimits_{(\alpha)} C_{\alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{21}\ \alpha_{23}\ \alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{31}\ \alpha_{32}\ \alpha_{34}} \cdot C_{\alpha_{41}\ \alpha_{42}\ \alpha_{43}} \cdot (\alpha_{\varkappa\varepsilon} = \alpha_{\varepsilon\varkappa}).$$

---

*) Die Summation wird natürlich hier wie im Folgenden nur über solche Indices bezw. Indicessysteme erstreckt gedacht, für die das allgemeine Summenglied existiert, die Größen C desselben also in dem System (C) vorkommen. Soll die Summation auf gewisse dieser Indices bezw. Indicessysteme beschränkt werden, so wird diese Einschränkung unter dem Summenzeichen angegeben. In II^a ist also die Summation über alle $\beta = 1 \ldots \gamma-1,\ \gamma+1 \ldots \nu$ erstreckt zu denken.

Bezeichnen wir durch die Zahlen 1, 2, 3, 4 die Seiten eines vollständigen Vierseits, durch α_{12}, α_{13} usw., die durch die Seiten 1 und 2, 1 und 3 usw. bestimmten Eckpunkte, wie es in beistehender Figur geschehen ist, so stellen die Bezeichnungen der Eckpunkte auf je einer Seite in der Reihenfolge, in welcher die sie bestimmenden drei andern Seiten auf e·a folgen, die Indices je einer Größe C in dem allgemeinen Gliede der obigen Summe dar. Nun ist den Formeln II zufolge die Anzahl der von 0 verschiedenen Größen $C_{\alpha\gamma\beta}$, die also gleich 1 sind, gleich $\nu(\nu-1)$. Es sei $C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} = 1$ eine dieser Größen. Dann sind weiter in der betrachteten Gruppe den ν Verbindungen $\alpha_{13}\,\varkappa$ $(\varkappa = 1 \ldots \nu)$ die ν Elemente $0, 1 \ldots \alpha_{13}-1$, $\alpha_{13}+1 \ldots \nu$ in irgend einer Reihenfolge als gleich zugeordnet.



Ist daher $\alpha_{13}\,\alpha'_{13} = 0$ und $\alpha_{34} \gtrless \alpha'_{13}$, so existiert für die Verbindung $\alpha_{13}\,\alpha_{34}$ ein und nur ein Element $\alpha_{23} = \alpha_{13}\,\alpha_{34}$ der Reihe $1 \ldots \nu$, also auch nur eine Größe $C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} = 1$, während für jedes $\varkappa$ $C_{\alpha_{13}\,\varkappa\alpha'_{13}} = 0$ ist. Ist ebenso $\alpha_{14}\,\alpha'_{14} = 0$ und $\alpha_{34} \gtrless \alpha'_{14}$, so existiert für die Verbindung $\alpha_{14}\,\alpha_{34}$ eine und nur eine Größe $C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}} = 1$, während für jedes $\varkappa$ $C_{\alpha_{14}\,\varkappa\alpha'_{14}} = 0$ ist. Es muß also die Anzahl aller von 0 verschiedenen, der Einheit gleichen Produkte der Form $C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} \cdot C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}}$ mit denselben Indices α_{13}, α_{14} gleich der Anzahl der von α'_{13}, α'_{14} verschiedenen Elemente der Reihe $1 \ldots \nu$, d. h. gleich $\nu-2$ sein, denn wegen $\alpha_{13} \gtrless \alpha_{14}$ muß auch $\alpha'_{13} \gtrless \alpha'_{14}$ sein. Da es aber den $\nu(\nu-1)$ Verbindungen $\alpha_{13}\,\alpha_{14}$ $(\alpha_{13} \gtrless \alpha_{14})$ der Elemente $1 \ldots \nu$ entsprechend in dem System (C) genau $\nu(\nu-1)$ Größen $C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}}$ gibt, die den Wert 1 haben, so folgt, daß es unter den Produkten der Größen C genau $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Produkte der Form $C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} \cdot C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}}$ gibt, von denen jedes den Wert 1 hat, während die übrigen Produkte dieser Form gleich 0 sind. Für jedes dieser von 0 verschiedenen Produkte muß aber auch $C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} = 1$ sein. Denn die Gleichungen $C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} = 1$, $C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} = 1$ sind der Ausdruck dafür, daß in der betrachteten Gruppe $\alpha_{12}\,\alpha_{14} = \alpha_{13}$, $\alpha_{13}\,\alpha_{34} = \alpha_{23}$ ist. Dem assoziativen Gesetz zufolge muß aber $(\alpha_{12}\,\alpha_{14})\,\alpha_{34} = \alpha_{12}\,(\alpha_{14}\,\alpha_{34})$ sein. Da $C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}} = 1$ ist, so ist hier $\alpha_{14}\,\alpha_{34} = \alpha_{24}$, und nach dem Vorangehenden ist $(\alpha_{12}\,\alpha_{14})\,\alpha_{34} = \alpha_{13}\,\alpha_{34} = \alpha_{23}$. Mithin muß $\alpha_{23} = \alpha_{12}\,\alpha_{24}$, oder $C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} = 1$ sein. Die Zahl $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ ist also auch die Anzahl der von 0 verschiedenen Produkte der Form:

$$C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} \cdot C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}},$$

die sich aus den Größen C bilden lassen, oder die oben gebildete, über alle möglichen Produkte dieser Form erstreckte Summe hat den Wert $\nu(\nu-1)(\nu-2)$. Damit ergibt sich eine neue Gleichung, der die Größen des Systems (C) zu genügen haben, nämlich:

$$\text{III.} \qquad \nu(\nu-1)(\nu-2) = \sum_{(\alpha_{\varkappa\varepsilon} = \alpha_{\varepsilon\varkappa})}^{(\alpha)} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{21}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{31}\,\alpha_{32}\,\alpha_{34}} \cdot C_{\alpha_{41}\,\alpha_{42}\,\alpha_{43}}.$$

§ 3.

Das System der Gleichungen I—III gestattet eine Reihe von Umformungen, von denen einige wegen der später aus ihnen zu ziehenden Folgerungen zunächst gegeben werden sollen.

Wir bilden das Quadrat

$$\left(\sum_{\alpha_{13}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} - \sum_{\alpha_{24}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}}\, C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}}\right)^2,$$

in dem das allgemeine Summenglied des Minuendus den Seiten 1 und 3, das des Subtrahendus

den Seiten 2 und 4 des Vierseits in § 2 entspricht. Wird das Quadrieren ausgeführt, so liefern die Quadrate des Minuendus und Subtrahendus bezw. Produkte der Form:

$$C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} \cdot C_{\alpha'_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}}\ (\alpha_{13} \gtrless \alpha'_{13}),\quad C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha'_{24}}\ (\alpha_{24} \gtrless \alpha'_{24})$$

als Bestandteile der doppelten Produkte. Von den beiden Faktoren eines solchen Produkts kann aber zuf. I und II höchstens einer von Null verschieden sein, es müssen also die doppelten Produkte, die sich beim Quadrieren von Minuend und Subtrahend ergeben, verschwinden. Beachtet man noch, daß stets zuf. I $C^2_{\alpha\beta\gamma}$ durch $C_{\alpha\beta\gamma}$ ersetzt werden kann, so folgt

$$\Big(\sum\nolimits_{\alpha_{13}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} - \sum\nolimits_{\alpha_{24}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}}\Big)^2 = \sum\nolimits_{\alpha_{13}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}}$$
$$+ \sum\nolimits_{\alpha_{24}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}} - 2\sum\nolimits_{\alpha_{13},\,\alpha_{24}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} \cdot C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}}.$$

Werden beide Seiten dieser Gleichung über alle Indicessysteme $(\alpha_{12}\ \alpha_{23}\ \alpha_{14}\ \alpha_{34})$ summiert, für die $\alpha_{12} \gtrless \alpha_{23}$, $\alpha_{23} \gtrless \alpha_{34}$ ist, so ergeben die beiden ersten Summen zur Rechten je eine fünffache Summe. Wird zur Ausführung der ersten zuerst über α_{14}, α_{34} summiert, so erhält man zuf. II

$$\sum\nolimits_{\alpha_{14},\,\alpha_{34}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} = \sum\nolimits_{\alpha_{14}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot \sum\nolimits_{\alpha_{34}} C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} = 1.$$

Da alsdann noch über alle Indicessysteme $(\alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{23})$ zu summieren ist, für die α_{12}, α_{13}, α_{23} verschieden von einander sind, so liefert mithin die erste Summe zur Rechten den Beitrag $\nu\,(\nu-1)\,(\nu-2)$. Derselbe Beitrag ergibt sich durch Ausführung der zweiten Summe, wenn hier zuerst über α_{12}, α_{14} summiert wird. Man erhält folglich:

$$\sum_{\substack{\alpha_{12},\,\alpha_{23},\,\alpha_{14},\,\alpha_{34} \\ \left(\substack{\alpha_{12} \gtrless \alpha_{23}, \\ \alpha_{23} \gtrless \alpha_{34}}\right)}} \Big(\sum\nolimits_{\alpha_{13}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} - \sum\nolimits_{\alpha_{24}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}}\Big)^2 =$$
$$2\,\nu\,(\nu-1)\,(\nu-2) - 2\sum\nolimits_{(\alpha)} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} \cdot C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}}.$$

Diese Gleichung besteht für jedes den Gleichungen I und II genügende Grössensystem (C). Genügt dieses auch der Gleichung III, so verschwindet die rechte Seite der letzten Gleichung, da diese die linke Seite der auf Null gebrachten Gleichung III multipliziert mit 2 ist. Alsdann verschwindet mithin auch die linke Seite und folglich auch jedes der Quadrate zur Linken, da die einzelnen Quadrate nur den Wert 0 oder positive Werte haben können. Umgekehrt folgt aus dem Verschwinden der Quadrate für ein den Gleichungen I und II genügendes Größensystem auch das Verschwinden der rechten Seite und mithin das Bestehen der Gleichung III. Die Gleichung III in dem System der Gleichungen I—III kann also durch das System der $\nu\,(\nu-1)^2$ Gleichungen ersetzt werden:

$$\text{IV}\qquad \sum\nolimits_{\alpha_{13}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} - \sum\nolimits_{\alpha_{24}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}} = 0 \left(\substack{\alpha_{12} \gtrless \alpha_{23}, \\ \alpha_{23} \gtrless \alpha_{34}}\right).$$

Eine andere Umformung der Gleichung III ergibt sich durch die folgende Überlegung. Setzt man

$$S_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{23}} = \sum\nolimits_{\alpha_{14},\,\alpha_{24},\,\alpha_{34}} C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} \cdot C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}},$$

so nimmt die rechte Seite von III die Gestalt an $\sum\limits_{\substack{\alpha_{12},\,\alpha_{13},\,\alpha_{23} \\ (\alpha_{12} \pm \alpha_{13} \pm \alpha_{23})}} S_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{23}}$, wo die Summation über alle $\nu\,(\nu-1)\,(\nu-2)$ Indicessysteme $(\alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{23})$ zu erstrecken ist, in denen α_{12}, α_{13}, α_{23} verschieden von einander sind. Den Gleichungen I und II zufolge kann jede der Größen $S_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{23}}$ nur den Wert 0 oder 1 haben, denn ist $C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}} = C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{24}} = C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}} = C_{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}} = 1$, so ist zuf. II $C_{\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha'_{14}} = 0$, wenn $\alpha'_{14} \gtrless \alpha_{14}$ ist, ebenso $C_{\alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha'_{24}} = 0$, wenn $\alpha'_{24} \gtrless \alpha_{24}$ ist, und $C_{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha'_{34}} = 0$, wenn $\alpha'_{34} \gtrless \alpha_{34}$ ist. Soll daher die Gleichung III bestehen,

also die Summe aller $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Größen $S_{\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}}$ den Wert $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ haben, so muß jede dieser Größen gleich 1 sein, und ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so besteht offenbar auch die Gleichung III. Die Gleichung III in dem System der Gleichungen I—III kann somit auch durch das System der $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Gleichungen ersetzt werden:

$$\text{V} \quad \sum_{\alpha_{14},\alpha_{24},\alpha_{34}} C_{\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14}} \cdot C_{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{24}} \cdot C_{\alpha_{13}\alpha_{23}\alpha_{34}} \cdot C_{\alpha_{14}\alpha_{24}\alpha_{34}} = 1 \; (\alpha_{12} \gtrless \alpha_{13},\ \alpha_{13} \gtrless \alpha_{23},\ \alpha_{23} \gtrless \alpha_{12}).$$

§ 4.

Es bleibt noch zu zeigen, daß jedem durch das Gleichungssystem (I—III) oder eines der mit diesem äquivalenten Gleichungssysteme (I, II, IV), (I, II, V) definierten Größensysteme (C) auch eine Gruppe der Ordnung $\nu+1$ in dem angegebenen Sinne entspricht, sodaß also, wenn man jeder Größe $C_{\alpha\gamma\beta}=1$ eine Relation $\alpha\beta=\gamma$ entsprechen läßt, dagegen $\alpha\beta=0$ setzt, wenn für alle $\varkappa$ $C_{\alpha\varkappa\beta}=0$ ist, durch diese Relationen unter Hinzunahme von $\alpha 0 = 0\alpha = \alpha$ eine Gruppe der Ordnung $\nu+1$ mit den Elementen $0, 1 \ldots \nu$ bestimmt ist.

Hierzu ist erstens (§ 1) zu zeigen, daß nicht gleichzeitig $\alpha\beta=\gamma$, $\alpha_1\beta=\gamma$, oder $\alpha\beta=\gamma$, $\alpha\beta_1=\gamma$ sein kann, wenn $\alpha \gtrless \alpha_1$, $\beta \gtrless \beta_1$ ist. Es darf also zunächst, da stets $\alpha 0 = 0\alpha = \alpha$ sein soll, nicht $\alpha\beta=\alpha$, oder $\alpha\beta=\beta$ sein, wenn α und β von 0 verschieden sind. Daß diese Bedingung erfüllt ist, folgt unmittelbar daraus, daß das System der Größen C nur solche Größen $C_{\alpha\gamma\beta}$ enthält, für die $\gamma \gtrless \alpha, \beta$ ist. Sodann folgt aus den Gleichungen II^a, daß nicht gleichzeitig $\alpha\beta=\gamma$, $\alpha\beta_1=\gamma$ sein kann, wenn $\alpha, \beta, \beta_1, \gamma$ von 0 verschieden sind, da zuf. II^a nicht $C_{\alpha\gamma\beta}=C_{\alpha\gamma\beta_1}=1$ sein kann. Ebenso folgt aus den Gleichungen II^b, daß nicht gleichzeitig $\alpha\beta=\gamma$, $\alpha_1\beta=\gamma$ sein kann, wenn $\alpha, \alpha_1, \beta, \gamma$ von 0 verschieden sind. Es bleibt somit nur noch nachzuweisen, daß auch nicht gleichzeitig $\alpha\beta=0$, $\alpha\beta_1=0$, oder $\alpha\beta=0$, $\alpha_1\beta=0$ sein kann, wenn $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ von 0 verschieden sind und $\alpha \gtrless \alpha_1$, oder $\beta \gtrless \beta_1$ ist. Hierzu ist es nötig, aus den Gleichungen IV noch eine andere Folgerung abzuleiten.

Wir summieren die Gleichung

$$\text{VI} \qquad \sum_{\gamma} C_{\alpha\gamma\beta}\, C_{\gamma\varepsilon\delta} = \sum_{\gamma_1} C_{\beta\gamma_1\delta}\, C_{\alpha\varepsilon\gamma_1}, \qquad (\alpha \gtrless \varepsilon,\ \delta \gtrless \varepsilon)$$

die aus IV folgt, wenn wir jetzt der Kürze halber $\alpha_{12}=\alpha$, $\alpha_{13}=\gamma$, $\alpha_{14}=\beta$, $\alpha_{23}=\varepsilon$, $\alpha_{34}=\delta$, $\alpha_{24}=\gamma_1$, setzen, über alle $\delta \gtrless \varepsilon$, indem wir das Indicessystem $\alpha, \beta, \varepsilon$ unverändert lassen. Dadurch erhält man unter Berücksichtigung von II^a:

$$\sum_{(\gamma \gtrless \alpha,\ \beta,\ \varepsilon)} \gamma\, C_{\alpha\gamma\beta} = \sum_{(\gamma_1 \gtrless \beta,\ \varepsilon)} \gamma_1 (1 - C_{\beta\gamma_1\varepsilon})\, C_{\alpha\varepsilon\gamma_1} = \sum_{(\gamma_1 \gtrless \beta,\ \varepsilon)} \gamma_1\, C_{\alpha\varepsilon\gamma_1} - \sum_{(\gamma_1 \gtrless \beta,\ \varepsilon)} \gamma_1\, C_{\beta\gamma_1\varepsilon}\, C_{\alpha\varepsilon\gamma_1}.$$

Hier ist wieder zuf. II^a:

$\sum_{(\gamma_1 \gtrless \beta,\ \varepsilon)} \gamma_1\, C_{\alpha\varepsilon\gamma_1} = 1 - C_{\alpha\varepsilon\beta}$, wenn $\beta \gtrless \varepsilon$ ist, oder $= 1$, wenn $\beta = \varepsilon$ ist. In beiden Fällen ergibt sich, wenn man im ersten noch $C_{\alpha\varepsilon\beta}$ nach links schafft:

$$\sum_{(\gamma \gtrless \alpha,\ \beta)} \gamma\, C_{\alpha\gamma\beta} = 1 - \sum_{(\gamma \gtrless \beta,\ \varepsilon)} \gamma\, C_{\beta\gamma\varepsilon}\, C_{\alpha\varepsilon\gamma} \quad (\alpha \gtrless \varepsilon).$$

Nehmen wir nun an, es sei $C_{\alpha\varepsilon\beta} = C_{\alpha\varepsilon_1\beta} = \ldots = C_{\alpha\varepsilon_{\lambda-1}\beta} = 1$, dagegen $C_{\alpha\gamma\beta}=0$, wenn γ von ε, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{\lambda-1}$ verschieden ist. Dann reduziert sich die linke Seite dieser Gleichung auf λ, auf der rechten Seite verschwindet der Subtrahend, da $C_{\alpha\varepsilon\beta}=1$ sein soll, zuf. II^a aber alsdann für jedes $\gamma \gtrless \beta$ $C_{\alpha\varepsilon\gamma}=0$ sein muß. Man erhält somit $\lambda=1$, d. h. für jede Verbindung $\alpha\beta$ kann es höchstens ein γ geben, für das $C_{\alpha\gamma\beta}=1$ ist.

Nunmehr ist es leicht zu zeigen, daß nicht gleichzeitig $\alpha\beta = 0$, $\alpha\beta_1 = 0$ $(\beta \gtrless \beta_1)$ sein kann. Summieren wir eine der Gleichungen II^a für irgend ein α über alle $\gamma \gtrless \alpha$, so ergibt sich

VII $\sum\limits_{(\beta=1\ldots\nu)}^{\beta} \sum\limits_{(\gamma \gtrless \alpha,\, \beta)}^{\gamma} C_{\alpha\gamma\beta} = \nu - 1$. Wäre nun $\sum\limits^{\gamma} C_{\alpha\gamma\beta_1} = \sum\limits^{\gamma} C_{\alpha\gamma\beta_2} = 0$ $(\beta_1 \gtrless \beta_2)$, so müßte eine der $\nu - 2$ Summen $\sum\limits_{(\gamma \gtrless \alpha,\, \beta)}^{\gamma} C_{\alpha\gamma\beta}$ $(\beta \gtrless \beta_1, \beta_2)$ größer als 1 sein, es gäbe also für eine Verbindung $\alpha\beta$ wenigstens zwei γ, für die $C_{\alpha\gamma\beta} = 1$ wäre. Ebenso folgt mittelst II^b, daß auch nicht gleichzeitig $\alpha\beta = 0$, $\alpha_1\beta = 0$ $(\alpha \gtrless \alpha_1)$ sein kann. Aus VII folgt übrigens noch, was für die Folge inbetracht kommt, daß es zu jedem α auch ein β geben muß, für das $\sum\limits^{\gamma} C_{\alpha\gamma\beta} = 0$, also $\alpha\beta = 0$ ist, da andernfalls die linke Seite in VII die Zahl ν als Summe haben würde. Ebenso folgt mittelst II^b, daß es zu jedem β auch ein α geben muß, für das $\alpha\beta = 0$ ist.

Es bleibt endlich (§ 1) noch nachzuweisen, daß auch für die dem Größensystem (C) entsprechenden Relationen das assoziative Gesetz gilt. Wir unterscheiden hierzu verschiedene Fälle. Es sei für die Verbindung $\alpha\beta$: a) $C_{\alpha\gamma\beta} = 0$ $(\gamma \gtrless \alpha, \beta)$, also $\alpha\beta = 0$. Alsdann wird in VI die linke Seite gleich 0, und man erhält

$$\sum^{\gamma} C_{\beta\gamma\delta}\, C_{\alpha\varepsilon\gamma} = 0 \quad (\varepsilon \gtrless \alpha, \delta).$$

Ist nun $C_{\beta k\delta} = 1$, also $C_{\beta\gamma\delta} = 0$ für jedes $\gamma \gtrless k$, so erhält man $C_{\alpha\varepsilon k} = 0$ $(\varepsilon \gtrless \alpha, k, \delta)$. Wäre also $\delta = \alpha$, oder wäre $\delta \gtrless \alpha$, aber $C_{\alpha\delta k} = 0$, so wäre überhaupt $C_{\alpha\varepsilon k} = 0$ für jedes $\varepsilon \gtrless \alpha, k$ d. h. es wäre $\alpha k = 0$, was unmöglich ist, denn in $C_{\beta k\delta} = 1$ ist $k \gtrless \beta$, und es kann mithin nicht gleichzeitig $\alpha\beta = 0$, $\alpha k = 0$ sein. Es kann also erstens für kein k $C_{\beta k\alpha} = 1$ sein, wenn $\alpha\beta = 0$ ist, d. h. es muß alsdann auch $\beta\alpha = 0$ sein, und zweitens muß, wenn $\alpha\beta = 0$ und $C_{\beta k\delta} = 1$, also $\beta\delta = k$ $(k > 0)$ ist, stets $\delta \gtrless \alpha$ und $C_{\alpha\delta k} = 1$ oder $\alpha k = \delta$ sein. Da nun neben $\beta\alpha = 0$ nicht zugleich $\beta\delta = 0$ sein kann, wenn $\delta \gtrless \alpha$ ist, so folgt aus $\alpha\beta = 0$, $\beta\delta = 0$, daß $\delta = \alpha$ sein muß, d. h. das assoziative Gesetz $(\alpha\beta)\,\delta = \alpha\,(\beta\delta)$ gilt für den Fall, daß $\alpha\beta = 0$, $\beta\delta = 0$ ist. Für den Fall aber, daß $\alpha\beta = 0$, $\beta\delta = k$ $(k > 0)$ ist, folgt seine Giltigkeit aus der Gleichung $\alpha k = \delta$. Damit ist das assoziative Gesetz $(\alpha\beta)\,\delta = \alpha\,(\beta\delta)$ für den Fall, daß $\alpha\beta = 0$ ist, bewiesen. Wir wenden uns jetzt zu dem Fall, daß

b) $C_{\alpha k\beta} = 1$, also $\alpha\beta = k$ $(k > 0)$, und $\beta\delta = 0$ ist.

In diesem Fall wird in VI die rechte Seite gleich 0, und man erhält

$$\sum^{\gamma} C_{\alpha\gamma\beta}\, C_{\gamma\varepsilon\delta} = 0 \quad (\varepsilon \gtrless \alpha, \delta).$$

Da $C_{\alpha k\beta} = 1$, mithin für jedes $\gamma \gtrless k$ $C_{\alpha\gamma\beta} = 0$ ist, folgt $C_{k\varepsilon\delta} = 0$ $(\varepsilon \gtrless \alpha, k, \delta)$. Wäre $\delta = \alpha$, oder $\delta \gtrless \alpha$, aber $C_{k\alpha\delta} = 0$, so wäre also für jedes $\varepsilon \gtrless k$, δ $C_{k\varepsilon\delta} = 0$, also $k\delta = 0$, was unmöglich ist, da schon $\beta\delta = 0$ und in $C_{\alpha k\beta} = 1$ $k \gtrless \beta$ ist. Somit ist $\delta \gtrless \alpha$ und $C_{k\alpha\delta} = 1$, also $k\delta = \alpha$, d. h. das assoziative Gesetz $(\alpha\beta)\,\delta = \alpha\,(\beta\delta)$ gilt auch für den Fall, daß $\alpha\beta = k$ $(k > 0)$, $\beta\delta = 0$ ist. Gleichzeitig ergibt sich, daß wenn umgekehrt $C_{k\alpha\delta} = 1$, also $k\delta = \alpha$, und $C_{\alpha k\beta} = 1$, also $\alpha\beta = k$ $(k > 0)$, auch $\beta\delta = 0$ sein muß. Denn zu jedem β gehört ein δ', für das $\beta\delta' = 0$, mithin nach dem Vorigen $C_{k\alpha\delta'} = 1$ ist. Da aber schon $C_{k\alpha\delta} = 1$ ist, so muß zuf. II^a $\delta' = \delta$ sein.*) Wir betrachten nun den letzten noch möglichen Fall, daß

c) $C_{\alpha k\beta} = 1$, $\alpha\beta = k$ $(k > 0)$, und $C_{\beta l\delta} = 1$, $\beta\delta = l$ $(l > 0)$ ist. In diesem Fall kann entweder $C_{k\varepsilon\delta} = 1$, $k\delta = \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, oder $k\delta = 0$ sein. Ist $k\delta = \varepsilon$, so ist $\varepsilon \gtrless \alpha$, da nach b aus

*) Ganz ähnlich zeigt man, daß aus $\alpha k = \delta$, $\beta\delta = k$ auch $\alpha\beta = 0$ folgt.

$k\delta = \alpha$ und $\alpha\beta = k$ die Relation $\beta\delta = 0$ folgen würde. Es gilt daher, da in $C_{k\varepsilon\delta} = 1$ auch $\varepsilon \gtrless \delta$ ist, für die Zahlen α, β, δ, ε die Gleichung VI, deren linke Seite sich jetzt, wegen $C_{\alpha k\beta} = 1$, $C_{k\varepsilon\delta} = 1$ und da für ein $\gamma \gtrless k$ $C_{\alpha\gamma\beta} = 0$ ist, auf 1 reduziert, sodaß man erhält

$$\sum_{(\gamma \gtrless \beta,\ \delta,\ \varepsilon)}{}^{\gamma}\ C_{\beta\gamma\delta}\ C_{\alpha\varepsilon\gamma} = 1.$$

In $C_{\beta l\delta} = 1$ ist l von β und δ verschieden. Es ist aber auch $l \gtrless \varepsilon$, denn da in $C_{\alpha k\beta} = 1$ $\varkappa \gtrless \beta$ ist, so kann nicht gleichzeitig $C_{k\varepsilon\delta} = 1$ und $C_{\beta\varepsilon\delta} = 1$ sein. Somit kommt in der Summe auf der linken Seite der letzten Gleichung $\gamma = l$ vor, und man erhält, da $C_{\beta\gamma\delta} = 0$ für jedes $\gamma \gtrless l$ sein muß, $C_{\alpha\varepsilon l} = 1$, also $\alpha l = \varepsilon$. Es ist also sowohl $(\alpha\beta)\delta$, als auch $\alpha(\beta\delta)$ gleich derselben Zahl ε, d. h. $(\alpha\beta)\delta = \alpha(\beta\delta)$. Ist $k\delta = 0$, so wird die linke Seite in VI gleich 0, da sich dieselbe wegen $C_{\alpha k\beta} = 1$ auf $C_{k\varepsilon\delta}$ reduziert, wegen $k\delta = 0$ aber $C_{k\varepsilon\delta} = 0$ ist. Man erhält daher aus VI: $\sum_{\gamma} C_{\beta\gamma\delta}\, C_{\alpha\varepsilon\gamma} = 0$ $(\varepsilon \gtrless \alpha,\ \delta)$. Da $C_{\beta l\delta} = 1$, für jedes $\gamma \gtrless l$ aber $C_{\beta\gamma\delta} = 0$ ist, so erhält man $C_{\alpha\varepsilon l} = 0$ $(\varepsilon \gtrless \alpha,\ \delta,\ l)$. Wäre $C_{\alpha\delta l} = 1$, also $\alpha l = \delta$, so würde hieraus und aus $\beta\delta = l$ nach b folgen $\alpha\beta = 0$, während $\alpha\beta = k$ $(k > 0)$ ist. Somit muß $C_{\alpha\delta l} = 0$ und folglich $C_{\alpha\varepsilon l} = 0$ $(\varepsilon \gtrless \alpha,\ l)$, also $\alpha l = 0$ sein. Es folgt also wieder, daß $(\alpha\beta)\,\delta$ und $\alpha\,(\beta\delta)$ einander gleich sein müssen. Damit ist das assoziative Gesetz allgemein für alle dem Größensystem (C) entsprechenden Relationen als giltig bewiesen.

§ 5.

Lassen wir jeder Größe $C_{\alpha\gamma\beta} = 1$ des Systems (C) die Relation $\frac{\gamma}{\alpha} = \beta$ entsprechen, die also nichts anderes als eine andere Schreibweise der Relation $\gamma = \alpha\beta$ darstellt, so ist das System der $\nu\,(\nu-1)$ Gleichungen II^a gleichbedeutend mit der Forderung, daß zwischen den Elementen $1 \ldots \nu$ ein System von $\nu\,(\nu-1)$ Relationen $\frac{\gamma}{\alpha} = \beta$ besteht, durch welche jedem der $\nu\,(\nu-1)$ Symbole $\frac{\gamma}{\alpha}$, die man aus je zwei verschiedenen der Elemente $1 \ldots \nu$ bilden kann, ein von γ verschiedenes Element β der Reihe $1 \ldots \nu$ als gleich zugeordnet wird. Dem Gleichungssystem V zufolge muß weiter für je drei von einander verschiedene Indices p, q, r der Reihe $1 \ldots \nu$

$$\text{VI} \qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C_{pq\alpha}\ C_{pr\beta}\ C_{qr\gamma}\ C_{\alpha\beta\gamma} = 1 \quad (p \pm q,\ r,\ q \pm r)$$

sein. Ist also für $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ $C_{pqa} = 1$, $C_{prb} = 1$, $C_{qrc} = 1$, d. h. enthält das System der Relationen $\frac{\gamma}{\alpha} = \beta$ die Relationen $\frac{q}{p} = a$, $\frac{r}{p} = b$, $\frac{r}{q} = c$, so muß auch $C_{abc} = 1$ sein, da die übrigen Summenglieder zuf. II^a sämtlich gleich 0 sein müssen. Es muß daher a verschieden von b, b verschieden von c sein, und das System der Relationen $\frac{\gamma}{\alpha} = \beta$ muß auch die Relation $\frac{b}{a} = c$ enthalten. Erfüllt umgekehrt das System der Relationen $\frac{\gamma}{\alpha} = \beta$ auch diese Bedingung, daß mit je drei Relationen $\frac{q}{p} = a$, $\frac{r}{p} = b$, $\frac{r}{q} = c$, in denen p, q, r von einander verschieden sind, zugleich die Relation $\frac{b}{a} = c$ dem System angehört, so sind offenbar auch die Gleichungen V erfüllt. Aus dem Umstande, daß wenn $C_{prb} = 1$, $C_{qrc} = 1$ und p verschieden von q ist, auch b verschieden von c sein muß, folgt außerdem, daß den $\nu-1$ Verbindungen $\alpha\gamma$ $(\alpha = 1 \ldots \gamma-1,\ \gamma+1 \ldots \nu)$ nur von einander verschiedene Indices β entsprechen können, für die $C_{\alpha\gamma\beta} = 1$ ist. Da ferner zuf. II^a auch jeder Verbindung $\alpha\gamma$ $(\alpha = 1 \ldots \gamma-1,\ \gamma+1 \ldots \nu)$ ein und auch nur ein Index β entspricht, für den $C_{\alpha\gamma\beta} = 1$ ist, und der außerdem verschieden von γ ist, so müßen diese $\nu-1$ den Verbindungen $\alpha\gamma$ $(\alpha = 1 \ldots \gamma-1,\ \gamma+1 \ldots \nu)$ entsprechenden Indices β, für die $C_{\alpha\gamma\beta} = 1$ ist, die Zahlen $1 \ldots \gamma-1$, $\gamma+1 \ldots \nu$ in irg. einer Reihenfolge sein. Es entspricht also auch jeder Verbindung $\gamma\beta$ zweier verschiedenen Indices der Reihe $1 \ldots \nu$ ein und nur ein Index α, für den $C_{\alpha\gamma\beta} = 1$ ist, oder für jede solche Verbindung $\gamma\beta$ besteht

die Gleichung $\sum_\alpha C_{\alpha\gamma\beta} = 1$. Die Gleichungen II^b in dem System der Gleichungen (I, II, V) sind somit eine Folge der übrigen Gleichungen des Systems. Berücksichtigt man endlich, daß die für das System der Relationen zwischen den Elementen gefundene Bedingung, daß nämlich mit je drei Relationen $\frac{q}{p} = a$, $\frac{r}{p} = b$, $\frac{r}{q} = c$ für drei von einander verschiedene Elemente p, q, r auch die Relation $\frac{b}{a} = c$ dem System angehören soll, auch so ausgesprochen werden kann, daß für je drei von einander verschiedene Elemente p, q, r die Relation $\frac{\frac{r}{p}}{\frac{q}{p}} = \frac{r}{q}$ in dem für die Elemente aufgestellten System von Relationen $\frac{\gamma}{\alpha} = \beta$ bestehen soll, so können die gewonnenen Resultate in dem folgenden Doppelsatz zusammengefaßt werden:

1. Damit einem System (C) von $\nu(\nu-1)^2$ Größen $C_{\alpha\gamma\beta}$ $\begin{pmatrix}\alpha = 1 \ldots \nu, \\ \beta = 1 \ldots \nu \;\; \beta \gtrless \gamma \\ \gamma = 1 \ldots \nu \;\; \gamma \gtrless \alpha\end{pmatrix}$, die den Gleichungen $C^2_{\alpha\gamma\beta} = C_{\alpha\gamma\beta}$ genügen, also die Werte 0, 1 haben, eine Gruppe der Ordnung $\nu + 1$ entspricht, ist notwendig und hinreichend, daß für das Größensystem (C) die $\nu(\nu-1)^2$ Summen

$$S_{pq} = \sum_\alpha C_{pq\alpha} \; (p \gtrless q), \; S_{pqr} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} C_{pq\alpha} \, C_{pr\beta} \, C_{qr\gamma} \, C_{\alpha\beta\gamma} \; (p \gtrless q, \; q \gtrless r, \; r \gtrless p)$$

sämtlich den Wert 1 haben.

2. Schreibt man die Relationen $\gamma = \alpha\beta$ zwischen den von der Identität verschiedenen Elementen $1 \ldots \nu$ einer Gruppe $\nu + 1$. Ordnung in der Form $\frac{\gamma}{\alpha} = \beta$, so erhält man ein System von $\nu(\nu-1)$ Relationen, durch das jedes der $\nu(\nu-1)$ Symbole $\frac{\gamma}{\alpha}$ aus zwei verschiedenen der Elemente $1 \ldots \nu$ einem von γ verschiedenen Elemente β dieser Reihe als gleich zugeordnet wird, und in dem für je drei von einander verschiedene Elemente p, q, r der Reihe $1 \ldots \nu$ die Relation $\frac{\frac{p}{r}}{\frac{q}{r}} = \frac{p}{q}$ besteht. Sind umgekehrt diese Bedingungen für ein System von $\nu(\nu-1)$ Relationen $\frac{\gamma}{\alpha} = \beta$ zwischen ν Elementen $1 \ldots \nu$ erfüllt, so ist auch durch diese Relationen eine Gruppe der Ordnung $\nu + 1$ definiert, in welcher $1 \ldots \nu$ die von der Identität verschiedenen Elemente sind.

Der Satz 2 enthält die gruppentheoretische Interpretation von 1. Es ist zu beachten, daß unter den Relationen $\frac{\gamma}{\alpha} = \beta$, durch die in Satz 2 die Gruppe definiert gedacht wird, die also ein System definierender Relationen im Sinne des Herrn Dyck*) bilden, sich keine die Identität enthaltende befindet. In der Tat müssen diese letzteren Relationen sich als Folgen der übrigen auf Grund des assoziativen Gesetzes erweisen.

Durch die Gleichungen II^a ($S_{pq} = 1$) werden aus den $2^{\nu(\nu-1)^2}$ den Gleichungen I genügenden Größensystemen (C) $(\nu-1)^{\nu(\nu-1)}$ Größensysteme ausgeschieden, die ebenfalls als bekannt angesehen werden dürfen. Es bleiben somit nur die $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Gleichungen $S_{pqr} = 1$ in Satz 1 zu erfüllen übrig. Da für jedes den Gleichungen I und II^a genügende Größensystem (C) die Summen S_{pqr} nur die Werte 0, 1 haben können, so kann das System der Gleichungen $S_{pqr} = 1$ durch die eine Gleichung $\prod S_{pqr} = 1$ ersetzt werden, wobei das Produkt über alle Verbindungen (p, q, r) von je drei von einander verschiedenen Zahlen der Reihe $1 \ldots \nu$ zu erstrecken ist. Die Gleichung $\prod S_{pqr} = 1$ stellt daher einen neuen arithmetischen

*) Gruppentheoretische Studien. Math. Ann. Bd. 20.

Ausdruck für die Existenz einer Gruppe dar, d. h. dafür, daß eine einem Größensystem (C), dessen Größen den Gleichungen I und II^a genügen, entsprechende Gruppe existiert.

Wird das Produkt ΠS_{pqr} nach Potenzen der Größen C entwickelt, so muß für ein den Gleichungen I und II^a genügendes Größensystem (C) jeder Term der Entwickelung, der zwei Faktoren der Form C_{klm}, C_{klm_1} $(m \gtrless m)$, enthält, verschwinden. Soll $\Pi S_{pqr} = 1$ sein, so muß also einer der übrigen Terme den Wert 1 haben, und die in ihm vorkommenden Größen C müssen daher sämtlich gleich 1 sein. Andere von Null verschiedene Größen kann aber das Größensystem (C) nicht enthalten, da für jede Verbindung $\alpha\beta$ $(\alpha \gtrless \beta)$ wenigstens eine Größe $C_{\alpha\beta\gamma}$ in jedem Term der Entwickelung von ΠS_{pqr} sich findet und zwei Größen $C_{\alpha\beta\gamma} = 1$, $C_{\alpha\beta\gamma_1} = 1$ das Größensystem (C) den Gleichungen II^a zufolge nicht enthalten kann. Man erhält also die von Null verschiedenen Größen in einem den Gleichungen I, II^a und $\Pi S_{pqr} = 1$ genügenden Größensystem (C), wenn man die Größen C eines Gliedes der Entwickelung von ΠS_{pqr}, das keine zwei Faktoren der Form C_{klm}, C_{klm_1} $(m \gtrless m_1)$ enthält, sämtlich gleich 1 setzt. Setzt man umgekehrt die Faktoren eines solchen Gliedes gleich 1, die übrigen Größen C gleich 0, so erhält man dadurch ein den Gleichungen I und II^a genügendes Größensystem (C), weil man zu jeder Verbindung (α, β) $(\alpha \gtrless \beta)$ ein und nur ein $C_{\alpha\beta\gamma} = 1$ erhält. Für das erhaltene Größensystem (C) kann daher auch kein anderes Glied der Entwickelung von ΠS_{pqr} von Null verschieden sein, da ΠS_{pqr} für ein den Gleichungen I und II^a genügendes Größensystem überhaupt nur die Werte 0, 1 haben kann. Somit muß für das erhaltene Größensystem (C) auch $\Pi S_{pqr} = 1$ sein.

Man erhält somit den Satz:

Entwickelt man für ein System von ν $(\nu-1)^2$ unbestimmten Größen $C_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha = 1 \ldots \nu,\ \beta = 1 \ldots \nu,\ \gamma = 1 \ldots \nu;\ \alpha \pm \beta,\ \beta \pm \gamma)$ das Produkt ΠS_{pqr} der $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ Summen

$$S_{pqr} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C_{pq\alpha}\, C_{pr\beta}\, C_{qr\gamma}\, C_{\alpha\beta\gamma} \quad (p \pm q, r;\ q \pm r)$$

nach Potenzen der Größen C, so liefert jedes Glied der Entwickelung, das keine zwei Faktoren der Form C_{klm}, C_{klm_1} $(m \pm m_1)$ enthält, eine Gruppe der Ordnung $\nu+1$, wenn man jedem Faktor C_{klm} desselben die Relation $km = l$ entsprechen läßt. Die Gesamtheit der hierdurch sich ergebenden Gruppen ist die Gesamtheit der Gruppen $(\nu+1)$. Ordnung.

Der Satz setzt voraus, daß $\nu \geqq 3$ ist. Für den Fall $\nu = 2$ wird die Anzahl der Summen S_{pqr} gleich 0, das System der Größen C enthält nur die beiden Größen C_{121}, C_{212}, die beide zuf. II^a gleich 1 sein müssen, d. h. es muß $1 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 2 = 1$ sein, und die Verbindungen 1 2 und 2 1 sind beide gleich der Identität. Für den Fall $\nu = 1$ wird die Anzahl der Größen C gleich 0, die Verbindung 1 1 ist gleich der Identität.

Für den Fall $\nu = 3$ wird

$$S_{pqr} = C_{pqr}\, C_{prq}\, C_{qrp}\, C_{rqp} + C_{pqr}\, C_{prp}\, C_{qrq}\, C_{rpq} + C^2_{pqp}\, C_{prq}\, C_{qrp}$$

und das Produkt ΠS_{pqr} ist über alle Permutationen pqr der Zahlen 1, 2, 3 zu erstrecken. Da es nur auf die Bestimmung der Indicesverbindungen in den Entwickelungsgliedern von ΠS_{pqr} ankommt, so kann statt C^2_{pqp} auch C_{pqp} gesetzt und demgemäß

$$\Pi S'_{pqr} = \Pi \left\{ C_{pqr}\, C_{prq}\, C_{qrp}\, C_{rqp} + C_{pqr}\, C_{prp}\, C_{qrq}\, C_{rpq} + C_{pqp}\, C_{prq}\, C_{qrp} \right\}$$

entwickelt werden. Setzen wir hier $C_{klk} = C_{klm}\, D_{klm}$, so wird

$$S'_{pqr} = C_{pqr}\, C_{prq}\, C_{qrp}\, (C_{rqp} + D_{prq}\, D_{qrp}\, C_{rpq} + D_{pqr})$$

und mithin

$$\Pi S'_{pqr} = \Pi C^3_{pqr} \cdot \Pi (C_{rqp} + C_{rpq} \; D_{prq} \; D_{qrp} + D_{pqr}) = P. \Pi C^3_{pqr},$$

wo jedes Produkt über sämtliche Permutationen p q r der Zahlen 1, 2, 3 zu erstrecken ist. Da ΠC^3_{pqr} jede der Größen C_{pqr} $(p \pm q \pm r)$ in der dritten Potenz enthält, so muß ein Glied der Entwickelung von P, wenn es mit ΠC^3_{pqr} multipliziert keine zwei Faktoren der Form C_{klm}, C_{klm_1} $(m \gtrless m_1)$ ergeben soll, jede Größe $D_{klm} = \frac{C_{klk}}{C_{klm}}$, die es nicht in der nullten Potenz enthält, mindestens in der dritten Potenz enthalten. Somit muß der Addend $C_{rpq} \cdot D_{prq} \cdot D_{qrp}$ mit dem durch Vertauschung von q und p sich ergebenden Addenden $C_{rqp} \cdot D_{qrp} \cdot D_{prq}$ und dem durch Vertauschung von q und r aus dem letzten Addenden D_{pqr} sich ergebenden Addenden D_{prq} multipliziert werden, damit D_{prq} in der dritten Potenz auftritt, und das erhaltene Produkt $C_{rpq} \cdot C_{rqp} \cdot D^3_{prq} \cdot D^2_{qrp}$ muß endlich mit dem durch zyklische Vertauschung aus D_{pqr} sich ergebenden Addenden Dqrp multipliziert werden, damit auch Dqrp in der dritten Potenz auftritt. Das so erhaltene Produkt $C_{rpq} \cdot C_{rqp} \cdot D^3_{prq} \cdot D^3_{qrp}$ ist somit aus Addenden von vier Faktoren der sechs Faktoren von P gebildet. Die noch übrigen zwei Faktoren von P enthalten weder D_{prq}, noch D_{qrp} und ihre Multiplikation kann keine der übrigen Größen D in der dritten Potenz liefern (weil hierzu wenigstens drei Faktoren von P nötig sind). Von den beiden noch übrigen Faktoren von P können mithin nur die beiden ersten Addenden C_{pqr} und C_{qpr} mit $C_{rpq} \cdot C_{rqp} \cdot D^3_{prq} \cdot D^3_{qrp}$ multipliziert werden. Sollen daher die Größen D in einem Entwickelungsgliede von $\Pi S'_{pqr}$ nicht sämtlich in nullter Potenz auftreten, so kann dieses Entwickelungsglied, wenn es keine zwei Faktoren der Form C_{klm}, C_{klm_1} $(m \gtrless m_1)$ nach Substitution der Größen D durch die Größen C ergeben soll, nur die Form haben

$$C_{pqr} \cdot C_{rpq} \cdot C_{rqp} \cdot C_{qpr} \; D^3_{prq} \cdot D^3_{qrp} \; \Pi C^3_{pqr} = C^4_{pqr} \cdot C^4_{rpq} \cdot C^4_{rqp} \cdot C^4_{qpr} \; C^3_{prp} \; C^3_{qrq}.$$

Die Anzahl dieser Entwickelungsglieder ist gleich 3, jedes von ihnen liefert die zyklische Gruppe 4. Ordnung. Sollen endlich die Größen D in einem Entwickelungsgliede von $\Pi S'_{pqr}$ sämtlich in der nullten Potenz auftreten, so kann dieses nur das Glied $\Pi C^3_{pqr} \cdot \Pi C_{rqp} = \Pi C^4_{pqr}$ sein, das die Vierergruppe liefert.