Aufgabe: Den Wortlaut der eben angedeuteten Regeln zu finden.

Die früher gefundenen Regeln über die Zwischenschaltung müssen unverändert ihre Gültigkeit behalten. Nur ist zu bemerken, dass die als Logarithmenzuwachs erhaltene ganze Zahl zu der letzten (fünften) Dezimalstelle des nächst kleineren Logarithmus hinzugefügt werden muss.

Aufgaben: 1) Die Aufgabe a) des § 4, 2 unter Anwendung der neuen abgekürzten Schreibweise zu rechnen:

Lösung:

$$\begin{aligned} 2{,}574 &= 10^{0{,}41061} \\ 3{,}641 &= 10^{0{,}56122} \\ \hline 2{,}574 \,.\, 3{,}641 &= 10^{0{,}97183} = 9{,}372. \end{aligned}$$

2) Zu beliebigen fünf- (sechs-)zifferigen Zahlen den gemeinen Logarithmus zu suchen.

3) Zu beliebigen, nicht unmittelbar in der Logarithmentafel enthaltenen Logarithmen die Zahlen zu suchen.

4) Die übrigen Aufgaben des § 4 unter Anwendung der neuen abgekürzten Schreibweise zu lösen.

§ 6. Anhang. Die Berechnung der fünfstelligen Hilfslogarithmen.

Die Beispiele in § 2 zeigen, dass die Tafel I höchstens zur Berechnung der vierstelligen Hilfslogarithmen ausreicht. Zur Berechnung fünfstelliger Hilfslogarithmen ist die Tafel IV erforderlich, welche dreistellige Ergänzungsfaktoren liefert. Um nun genau wie in § 2 zu verfahren, müsste man die zehnten Potenzen dieser dreistelligen Faktoren bilden. Da die Tafel IV aber nur die zehnten Potenzen zweistelliger Dezimalbrüche enthält, so ist hierzu ein besonderes Verfahren erforderlich, das man auch Zwischenschaltung nennen kann.

Vorübung: Durch Ausmultiplizieren folgt:

$$x^{10} - u^{10} = (x - u)\,(x^9 + x^8u + x^7u^2 + \ldots\ u^9),$$

oder in Form eines Quotienten:

$$x^9 + x^8u + x^7u^2 + \ldots + u^9 = \frac{x^{10} - u^{10}}{x - u}.$$

Nun sei $x > u$ und n eine ganz beliebige Zahl, so wird offenbar:

$$x^9 + x^8n + x^7n^2 + \ldots + n^9 > u^9 + u^8n + u^7n^2 + \ldots + n^9,$$

also vermöge der vorigen Gleichung:

[für $x > u$:] $$\frac{x^{10} - n^{10}}{x - n} > \frac{u^{10} - n^{10}}{u - n} \qquad \text{(III.}$$

Wenn die bisher ganz willkürlich gewählte Zahl n ihrer Grösse nach zwischen x und u liegt, so wird der letzte Bruch der vorigen Ungleichheit im Zähler und Nenner negatives Vorzeichen erhalten, und man schreibt daher besser:

[für $x > u$ und n zwischen x und u:] $$\frac{x^{10} - n^{10}}{x - n} > \frac{n^{10} - u^{10}}{n - u}. \qquad \text{(IV.}$$

a bedeute eine beliebige zweistellige Dezimalzahl zwischen 1 und 10, e eine beliebige der ganzen Zahlen 1—9, so wird a + et*) einen beliebigen dreistelligen Dezimalbruch be-

*) t bedeutet tausendstel.

deuten, und $a + 1h$*) ist der nächstgrössere, $a - 1h$ der nächstkleinern zweistellige Dezimalbruch. Nun sei aus der Tafel IV bereits gefunden:

$$(a - 1h)^{10} = 10^l \times \varphi$$
$$a^{10} = 10^l \times f$$
$$(a + 1h)^{10} = 10^l \times F.$$

Es handelt sich dann um die Bestimmung der dreistelligen Dezimalzahl β, welche die Gleichung erfüllt:

$$(a + et)^{10} = 10^l \times \beta.$$

Zahlenbeispiel: Wie gross sind für 9,766 die Grössen a, e, $a + 1h$, $a - 1h$, l, φ, f, F?

Nun folgt aus Formel III, wenn in ihr $x = a + 1h$, $u = a + et$, $n = a$ gesetzt wird, wenn also $x - n = 1h = 10t$ und $u - n = et$ wird:

$$\frac{(a + 1h)^{10} - a^{10}}{10t} > \frac{(a + et)^{10} - a^{10}}{et}$$

Ferner folgt aus der Formel IV, wenn darin $x = a + et$, $u = a - 1h$, $n = a$ gesetzt wird, wenn also $x - n = et$ und $n - u = 1h = 10t$ wird:

$$\frac{(a + et)^{10} - a^{10}}{et} > \frac{a^{10} - (a - 1h)^{10}}{10t}$$

Aus den beiden letzten Ungleichheiten ergeben sich nun zwei Grenzwerte für $(a + et)^{10}$, nämlich

$$(a + et)^{10} < a^{10} + \frac{e}{10}\,[(a + 1h)^{10} - a^{10}]$$

und $$(a + et)^{10} > a^{10} + \frac{e}{10}\,[a^{10} - (a - 1h)^{10}].$$

Wenn man jetzt für die sämtlichen zehnten Potenzen die vorhin festgesetzten Werte einsetzt, so lassen sich diese Ungleichheiten schreiben:

$$10^l \times \beta < 10^l \times f + \frac{e}{10}\,[10^l \times F - 10^l \times f]$$

und $$10^l \times \beta > 10^l \times f + \frac{e}{10}\,[10^l \times f - 10^l \times \varphi],$$

also wenn noch gliedweise durch 10^l dividiert wird:

$$\beta < f + \frac{e}{10}\,(F - f) \quad \text{und} \quad \beta > f + \frac{e}{10}\,(f - \varphi).$$

Zahlenbeispiel: $9{,}766^{10}$ mit dreistelligem Ergänzungsfaktor zu bilden.

Lösung: $9{,}766^z = 10^9 \times \beta$.

$$\beta < 7{,}843 + \frac{6}{10}\,(0{,}081)\ ;\ \beta > 7{,}843 + \frac{6}{10}\,(0{,}080)$$

d. h. $\beta < 7{,}8916$; $\beta > 7{,}891$; also auf 3 Stellen annähernd $\beta = 7{,}891$.

Eine Durchsicht der Tafel IV zeigt, dass die Differenzen $F - f$ und $f - \varphi$ sehr oft denselben Wert d haben. In diesem Falle wird der gesuchte Ergänzungsfaktor

$$\beta = f + \frac{ed}{10}\ \text{[auf drei Dezimalstellen abzukürzen].}$$

*) h bedeutet hundertstel

Aber selbst wenn die beiden Differenzen F − f und f − φ nicht vollständig gleichwertig sind, so besteht doch kein erheblicher Unterschied zwischen ihnen. [Vergl. das vorige Zahlenbeispiel.] Nimmt man daher ihren algebraischen Mittelwert m, so wird der gesuchte Ergänzungsfaktor β sich von $f + \frac{em}{10}$ nur äusserst wenig unterscheiden.

Aufgaben: a) Eine kurze Regel über die Zwischenschaltung bei dreistelligen Ergänzungsfaktoren zu bilden.

b) HL_5 5 zu bestimmen.

Lösung:

$$10^{6} \times 9{,}765 < 5^{Z} < 10^{6} \times 9{,}766$$
$$10^{69} \times 7{,}883 < 5^{H} < 10^{69} \times 7{,}891$$
$$10^{698} \times 6{,}266 < 5^{T} < 10^{698} \times 9{,}361$$
$$10^{6989} \times 4{,}665 < 5^{V} < 10^{6989} \times 5{,}167$$
$$10^{69896} \times 4{,}9 < 5^{W} < 10^{69397} \times 1{,}4$$

HL_5 5 = 69 897

c) HL_5 3,02 zu bestimmen.

Lösung:

$$10^{4} \times 6{,}310 < 3{,}02^{Z} < 10^{4} \times 6{,}311$$
$$10^{48} \times 1{,}001 < 3{,}02^{H} < 10^{48} \times 1{,}003$$
$$10^{480} \times 1{,}010 < 3{,}02^{T} < 10^{480} \times 1{,}031$$
$$10^{4800} \times 1{,}105 < 3{,}02^{V} < 10^{4800} \times 1{,}357$$
$$10^{48000} \times 2{,}7 < 3{,}02^{W} < 10^{48001} \times 2{,}0$$

HL_5 3,02 = 48001

Anmerkung: Im Beispiel c) ist der Ergänzungsfaktor f von 6,310 = 1,001, dagegen φ, der Ergänzungsfaktor von 6,30, = 9,849. Bei der Zwischenschaltung darf die Differenz f − φ nicht wie sonst gebildet werden, da hier nicht die bei dem vorigen Beweise stillschweigend gemachte Annahme erfüllt ist, dass für die beiden Zahlen 6,31 und 6,30 der HL_1 denselben Wert hat. Vielmehr muss, wie man sich leicht überzeugt, diesmal die Differenz $f - \frac{\varphi}{10}$ gebildet werden, die gleich 0,016 ist, also gleich der nächstfolgenden Differenz F − f.

Anmerkungen.

1) Es bedarf einer kurzen Rechtfertigung, warum gerade dieser Weg zur Bildung von a^{10} eingeschlagen ist: Der binomische Satz sollte nicht angewandt werden, weil er über das Pensum der Sekunda hinausgeht. Es blieb demnach nur die Zerlegung von a^5 in passende Faktoren übrig. Folgende Zerlegungen habe ich in Betracht gezogen:

$$a^{10} = [(a^2)^2]^2 \,.\, a^2 = (a^3)^3 \,.\, a = (a^2\, a^3)^2.$$

Bei der ersten Zerlegung wurde die Rechnung dadurch unbequem, dass für das erste a^2 eine zu grosse Zahl von Dezimalstellen nötig waren, um das Resultat in der gewünschten Genauigkeit zu erhalten, und dass die Nebenrechnungen zu umständlich wurden. Bei der zweiten Zerlegung wurden die Nebenrechnungen beim zweiten Potenzieren mit 3 gleichfalls sehr umständlich, zumal sie noch eine Quadrattafel erforderten. Mir schien somit die dritte Zerlegung die praktischste zu sein.

2) Ein gänzlich einwandfreier Beweis dafür, dass die bei der Rechnung in Betracht gezogenen Stellenanzahlen wirklich hinreichen zur Erlangung der gewünschten Genauigkeit, würde erst mit den Hilfsmitteln der Fehlerrechnung gefunden werden können.

3) Ich brauche wohl kaum zu bemerken, dass die Tafel I in Wahrheit nicht auf die soeben angegebene Weise berechnet worden ist, sondern vielmehr mit der Logarithmentafel.

4) Ohne Anwendung des Wurzelbegriffes wäre die Ableitung des wahren Mittelwertes etwa folgendermassen zu geben:

Es ist z. B. 10^5 offenbar der Mittelwert zwischen 1 [= 10^0] und 10^{10}. Daher ist es nur natürlich, festzusetzen: f soll dann der Mittelwert zwischen den beiden Ergänzungsfaktoren 1 und 10 heissen,