§ 3. Die Zwischenschaltung (Interpolation) und das Zahlsuchen (Numerusaufschlagen).

Vorübung: e bedeute eine beliebige der ganzen Zahlen von 1—9. Dann kann der Quotient der zehngliedrigen Summe $x^9 + x^8 + x^7 + \ldots x + 1$ und der e-gliedrigen Summe $x^{e-1} + x^{e-2} + \ldots + x + 1$ auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x + 1}{x^{e-1} + x^{e-2} + \ldots + x + 1} = \frac{x^9 + x^8 + \ldots + x^e}{x^{e-1} + x^{e-2} + \ldots + x + 1} + 1,$$

oder auch, indem der letzte Bruch durch x^e gehoben wird:

$$\frac{x^9 + x^8 + \ldots + x + 1}{x^{e-1} + x^{e-2} + \ldots + x + 1} = \frac{x^{9-e} + x^{8-e} + \ldots + 1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^e}} + 1.$$

Auf der rechten Seite der letztern Gleichung werde jetzt der Reihe nach

1) x beliebig, aber > 1 | 2) x beliebig, aber < 1

3) $x = 1$ angenommen.

Im ersten Falle | Im zweiten Falle

wird dann der Zähler des letzten Bruches einen

grösseren | kleineren

Wert als im dritten Falle annehmen, dagegen jedes Glied des Bruchnenners und somit der ganze Nenner einen

kleineren | grösseren

Wert als im dritten Falle, daher auch der ganze Bruch und somit auch die ganze rechte Seite der letzten Gleichung einen

grösseren | kleineren

Wert als im dritten Falle, wo diese rechte Seite — entsprechend der linken — den Wert $\frac{10}{e}$ annimmt. Es wird also auch für die linke Seite die Ungleichheit bestehen:

(für $x > 1$) $\frac{x^9 + x^8 + \ldots + x + 1}{x^{e-1} + x^{e-2} + \ldots + x + 1} > \frac{10}{e}$ | (für $x < 1$) $\frac{x^9 + x^8 + \ldots + x + 1}{x^{e-1} + x^{e-2} + \ldots + x + 1} < \frac{10}{e}$

Nun aber ergeben sich durch einfaches Ausmultiplizieren die Formeln:

$(x^9 + x^8 + \ldots + x + 1)(x - 1) = x^{10} - 1$ | $(x^9 + x^8 + \ldots + x + 1)(1 - x) = 1 - x^{10}$

$(x^{e-1} + x^{e-2} + \ldots + x + 1)(x - 1) = x^e - 1$ | $(x^{e-1} + x^{e-2} + \ldots + x + 1)(1 - x) = 1 - x^e.$

Daher kann für die linke Seite der vorigen Ungleichheit auch

$\frac{x^{10} - 1}{x^e - 1}$ | $\frac{1 - x^{10}}{1 - x^e}$

geschrieben werden und es ergiebt sich:

(für $x > 1$:) $\frac{x^{10} - 1}{x^e - 1} > \frac{10}{e}$ (I | (für $x < 1$:) $\frac{1 - x^{10}}{1 - x^e} < \frac{10}{e}$ (II

Um die fünfstelligen Hilfslogarithmen einer mehr als dreistelligen Dezimalzahl zwischen 1 und 10 zu erhalten, kann man, wenn bloss die bisher gebrauchte Logarithmentafel benutzt werden soll, folgendermassen verfahren:

a bedeute eine beliebige dreistellige Dezimalzahl zwischen 1 und 10, e eine beliebige der ganzen Zahlen 1—9, so wird $a + e\,v$ einen beliebigen vierstelligen Dezimalbruch bedeuten, und $a + 1t$ ist der nächstgrössere, $a - 1t$ der nächstkleinere dreistellige Dezimal-

bruch. Nun sei aus der Logarithmentafel — also unter Fortlassung der hier überflüssigen Ergänzungsfaktoren — bereits gefunden:

$$(a - 1t)^{W*)} = 10^{\lambda}$$
$$a^{W} = 10^{l}$$
$$(a + 1t)^{W} = 10^{L}$$

Es handelt sich dann um die Bestimmung der ganzen Zahl y, die folgende Gleichung möglichst genau erfüllt:

$$(a + e\,v)^{W} = 10^{y}.$$

Zahlenbeispiel: Wie gross sind für 2,7314 die Grössen a, e, a + 1t, a — 1t, λ, l, L?

Man kann nun folgendermassen den Wert von y finden: y muss diejenige ganze Zahl sein, die folgenden beiden Ungleichheiten entspricht oder doch am wenigsten widerspricht:

$$y > l + \frac{e}{10}(L - l) \quad \text{und} \quad y < l + \frac{e}{10}(l - \lambda).$$

Zahlenbeispiel: Wie lautet HL_5 2,7314?

Lösung: $y > 43632 + 0{,}4 \,.\, 16$ und $y < 43632 + 0{,}4 \,.\, 16$, d. h.
$y > 43638{,}4$ und $y < 43638{,}4$.

Diesen sich selbst widersprechenden Ungleichheiten kann natürlich auch keine ganze Zahl genau entsprechen. Am wenigsten widerspricht ihnen aber die Zahl 43638, also

$$HL_5\ 2{,}7314 = 43638.$$

Ein Durchblättern der Logarithmentafel zeigt, dass fast überall die Differenzen $L - l$ und $l - \lambda$ denselben Wert d besitzen. In allen diesen Fällen kann man daher für y diejenige ganze Zahl setzen, die die Gleichung

$$y = l + \frac{ed}{10}$$

am besten erfüllt.

Nachweis der Richtigkeit der beiden Grenzwerte für y.

Die oben entwickelte Formel

(I | (II

lässt sich auch schreiben:

[für $x > 1$]: $x^{10} > \frac{10}{e}(x^e - 1) + 1$, | [für $x < 1$]: $1 - \frac{10}{e}(1 - x^e) < x^{10}$

oder durch Erheben in die e-te Potenz:

[für $x > 1$] $x^{10e} > \left[\frac{10}{e}(x^e - 1) + 1\right]^e$ | [für $x < 1$] $\left[1 - \frac{10}{e}(1 - x^e)\right]^e < x^{10e}$

In dieser Ungleichheit darf man für x den Wert [6])

$x = \sqrt[e]{\frac{a + e\,v}{a}}$; d. h. $x = \sqrt[e]{1 + \frac{e\,v}{a}}$ | $x = \sqrt[e]{\frac{a}{a + e\,v}}$

einsetzen, weil dieser Wert offenbar
grösser als 1 | kleiner als 1
ist. Nun wird

$x^e = 1 + \frac{e\,v}{a}$; also $\frac{10}{e}(x^e - 1) = \frac{10\,v}{a} = \frac{1\,t}{a}$ | $x^e = \frac{a}{a + e\,v}$; also $\frac{10}{e}(1 - x^e) = \frac{10}{e} \cdot \frac{e\,v}{a + e\,v} = \frac{1\,t}{a + e\,v}$

---

*) $v = \frac{1}{10000}$, $t = \frac{1}{1000}$, $W = 100\,000$.

Daher geht die letzte Ungleichheit durch die Einsetzung über in

$$\left(1 + \frac{e\,v}{a}\right)^{10} > \left(1 + \frac{1\,t}{a}\right)^{e} \qquad 7)$$

$$\left(1 - \frac{1\,t}{a + e\,v}\right)^{e} < \left(\frac{a}{a + e\,v}\right)^{10} \qquad 7)$$

Diese Ungleichheit bleibt erst recht richtig, wenn statt der linken Seite etwas noch Kleineres gesetzt wird. Nun ist aber

$$\frac{1\,t}{a} > \frac{1\,t}{a + e\,v},$$

folglich $1 - \frac{1\,t}{a}$ und alle Potenzen dieser Grösse kleiner, als die entsprechenden Potenzen der Grösse $1 - \frac{1\,t}{a + e\,v}$. Daher muss die Ungleichheit bestehen:

$$\left(1 - \frac{1\,t}{a}\right)^{e} < \left(\frac{a}{a + e\,v}\right)^{10}$$

oder durch Gleichnamigmachen der 1 mit dem nachfolgenden Nenner:

$$\frac{(a + e\,v)^{10}}{a^{10}} > \frac{(a + 1\,t)^{e}}{a^{e}} \qquad \frac{(a - 1\,t)^{e}}{a^{e}} < \frac{a^{10}}{(a + e\,v)^{10}}$$

Durch Erheben dieser Ungleichheiten in die W-te [100 000-te] Potenz folgt:

$$\frac{(a + e\,v)^{10W}}{a^{10W}} > \frac{(a + 1\,t)^{eW}}{a^{eW}} \qquad \frac{(a - 1\,t)^{eW}}{a^{eW}} < \frac{a^{10W}}{(a + e\,v)^{10W}}$$

Wenn man hierin für die W-ten Potenzen von $a + 1\,t$, a, $a + e\,v$, $a - 1\,t$ die oben festgesetzten Potenzen von 10, nämlich 10^{L}, 10^{l}, 10^{y}, 10^{λ} einführt, so ergiebt sich:

$$\frac{10^{10y}}{10^{10l}} > \frac{10^{eL}}{10^{el}} \qquad \frac{10^{e\lambda}}{10^{el}} < \frac{10^{10l}}{10^{10y}}$$

Für 10^{10y} folgt hieraus nach den Regeln von den Potenzen mit gleichen Grundzahlen:

$$10^{10y} > 10^{10l + e(L-l)} \qquad 10^{10y} < 10^{l + e(l-\lambda)},$$

also mit Fortlassung der überall gleichen Grundzahl 10:

$$10\,y > 10\,l + e\,(L - l) \qquad 10\,y < 10\,l + e\,(l - \lambda),$$

folglich, wie behauptet:

$$y > l + \frac{e}{10}(L - l) \qquad y < l + \frac{e}{10}(l - \lambda)$$

Anmerkung 1: Aus dem Vorhergehenden folgt zugleich auch, dass zu jeder einzelnen der vierstelligen Dezimalzahlen zwischen 1 und 10 ein besonderer HL_5 hinzugehört. Daher kann man ebenso wie am Schlusse von § 2 schliessen und findet:

Die frühere Regel von der Fortlassung der Ergänzungsfaktoren bleibt auch noch richtig für Aufgaben mit höchstens vier Dezimalstellen in den gegebenen Zahlen.

Wäre die gegebene Zahl n etwa ein fünfstelliger Dezimalbruch, also etwa $= a + k\,w$*), wobei k eine beliebige der ganzen Zahlen von 1 bis 99 bedeutet, so fände man:

Der $HL_5\,n$ ist diejenige ganze Zahl, welche die Gleichung

$$HL_5\,n = 1 + \frac{k\,d}{100} \text{**)}$$

am besten erfüllt.

*) a bedeutet, wie vorhin, einen dreistelligen Dezimalbruch, $w = \frac{1}{100\,000}$.

**) d bedeutet, wie vorhin, den Unterschied der benachbarten Logarithmen.

Zum Beweise hätte man nur von den Formeln

[für $x > 1$] $\frac{x^{100} - 1}{x^k - 1} > \frac{100}{k}$ | [für $x < 1$] $\frac{1 - x^{100}}{1 - x^k} < \frac{100}{k}$,

ansgehen müssen, die ebenso abzuleiten sind, wie die Formeln I und II.

Anmerkung 2. Die frühere Regel von der Fortlassung der Ergänzungsfaktoren bleibt aus gleichem Grunde wie vorhin auch noch richtig, wenn die gegebenen Dezimalzahlen einer Aufgabe bis auf fünf Stellen nach dem Komma berücksichtigt werden müssen.

Mehr als fünf Dezimalstellen nach dem Komma sollen beim Gebrauch der fünfstelligen Tafeln überhaupt nicht berücksichtigt werden.

Denn es würde nicht mehr zu jedem etwa sechsstelligen Dezimalbruche noch ein besonderer Werth des HL_5 hinzugehören, sondern es wären jetzt zur Unterscheidung der gegebenen Zahlen Ergänzungsfaktoren hinzuzufügen.

Kurze Regel für die Zwischenschaltung:

Das Verfahren, den HL_5 vier- [bezw. fünf-]stelliger Dezimalzahlen zwischen 1 und 10 mittels der gewöhnlichen fünfstelligen Logarithmentafel durch eine einfache Rechnung zu finden, heisst auch Zwischenschaltung. Die Grösse e [k], also die Einer der vierten [vierten und fünften] Dezimalstelle, soll der Zahlzuwachs heissen; die Grösse d [$= L - l = l - \lambda$] der Logarithmenunterschied; die in $\frac{ed}{10}$ $\left[\frac{kd}{100}\right]$ enthaltene ganze Zahl, welche laut der Gleichung

$$y = l + \frac{ed}{10} \left[HL_5\, n = l + \frac{kd}{100}\right]$$

zu dem Hilfslogarithmus l des nächstkleineren dreistelligen Dezimalbruches hinzuzufügen ist, soll der Logarithmenzuwachs heissen. Dann ist also:

$$\textbf{Logarithmenzuwachs} = \frac{ed}{10} = \frac{\textbf{Zahlzuwachs} \times \textbf{Logarithmenunterschied;}}{10}$$

[oder genauer für einen zweistelligen Zahlzuwachs:

$$\text{Logarithmenzuwachs} = \frac{kd}{100} = \frac{\text{Zahlzuwachs} \times \text{Logarithmenunterschied.}}{100}\Big]$$

In jedem Falle ist der Logarithmenzuwachs auf eine ganze Zahl abzurunden.

Jetzt kann nun auch zu einem gegebenen HL_5, der nicht unmittelbar in der Logarithmentafel steht, die richtige Zahl durch Rechnung gefunden werden.

Beispiel: $HL_5 x = 63872$. Gesucht x. [In anderer Form: Die Potenz 10^{63872} soll in die W-te [100000-te] Potenz einer andern Zahl verwandelt werden. Wie heisst die Zahl?]

Lösung: Man sucht in der Tafel den nächstkleineren HL_5: [nämlich 63869] und die zugehörige dreistellige Dezimalzahl [nämlich 4,352].

Gleichzeitig bestimmt man den zugehörigen Logarithmenunterschied [nämlich $L - l = l - \lambda = 10$] und den Logarithmenzuwachs [nämlich $63\,872 - 63869 = 3$]. Dann wird der verlangte Zahlzuwachs gefunden, indem man die letzte Formel für den Logarithmenzuwachs nach der Grösse Zahlzuwachs auflöst. Es wird:

$$\textbf{Zahlzuwachs} = \frac{\textbf{10} \times \textbf{Logarithmenzuwachs}}{\textbf{Logarithmenunterschied}} \text{ (in dem Zahlenbeispiel} = 3)$$

[Genauer: Es wird der zweistellige

$$\text{Zahlzuwachs} = \frac{100 \times \text{Logarithmenzuwachs}}{\text{Logarithmenunterschied}}\Big]$$

In jedem Falle ist der gefundene Zahlzuwachs auf eine ganze Zahl abzurunden.[8])

§ 4. Vorläufige Beispiele für die Anwendung der Logarithmentafel.

1) Bestimmung des HL_5 einer beliebigen Zahl.

Nach dem bisher Besprochenen kann der HL_5 einer beliebigen (aber höchstens fünfstelligen) Dezimalzahl zwischen den Grenzen 1 und 10 gefunden werden. Die folgenden Beispiele zeigen, wie der HL_5 anderer Zahlen gefunden werden kann.

Beispiele:

a) ? HL_5 234,7

Lösung: $234{,}7 = 10^2 . 2{,}347$

$234{,}7^W = 10^{2W} . 2{,}347^W$.*)

Nun wird nach der Logarithmentafel: $2{,}347^W = 10^{37033}$**), folglich

$$234{,}7^W = 10^{2W} . 10^{37033} = 10^{2W + 37033}.$$

Also der HL_5 234,7 unterscheidet sich von dem HL_5 2,347 bloss durch den Summanden 2W.

b) ? HL_5 0,2347

$$\text{Lösung: } 0{,}2347^W = \left(\frac{2{,}347}{10}\right)^W = \frac{2{,}347^W}{10^W} = \frac{10^{37033}}{10^W} = 10^{37033-W}$$

Also der HL_5 0,2347 unterscheidet sich von dem HL_5 2,347 bloss durch den Summand — W.

Folgerung: Man kann mit der fünfstelligen Logarithmentafel den HL_5 jeder beliebigen Zahl bestimmen. Doch darf die Zahl höchstens 6 Ziffern haben — Nullen an der Spitze von Dezimalbrüchen natürlich nicht mitgerechnet. Zahlen mit mehr als sechs Ziffern müssen daher abgerundet werden.

Beispiel:

? HL_5 7846367

$$7846367 = 10^6 . 7{,}846367 = 10^6 . 7{,}84637$$

$$7846367^W = 10^{6W + 89467},$$

denn der Logarithmenzuwachs giebt hier, nach der genaueren Formel berechnet: $\frac{37.5}{100} = 1{,}85 = 2$.

2) Lösung von Aufgaben mit der Logarithmentafel.

Da mittels der Logarithmentafel die W-ten*) Potenzen aller Zahlen in Potenzen der Grundzahl 10**) verwandelt werden, so können alle Multiplikationen und Divisionen solcher

*) W = 100000.

**) Unter Fortlassung des bereits als überflüssig erkannten Ergänzungsfaktors f.