welcher Mittelwert in Wahrheit zu wählen ist: Nach den Sätzen über Potenzen mit Bruch-Exponenten ist z. B:[4])

$$10^{3+\frac{1}{2}} = 10^3 . 10^{\frac{1}{2}} = 10^3 . \sqrt{10} = 10^3 \times 3{,}162$$

Das heisst: 10^3 ergiebt bei der Multiplikation mit 3,162 einen Wert, der, als Potenz von 10 betrachtet, den Exponent $3\frac{1}{2}$ besitzen würde. Bei der Multiplikation von 10^3 mit einem noch grösseren Ergänzungsfaktor muss daher das Resultat, als Potenz von 10 betrachtet, einen Exponenten besitzen, welcher der 4 näher liegt als der 3. Allgemein folgt hieraus die

Regel 2: Der wahre Mittelwert der Ergänzungsfaktoren ist der Wert 3,16(2)

§ 2. Die vier- und fünfstelligen Logarithmen der Zahlen von 1,00—9,99.

Erklärung: Unter dem vier- [fünf-]stelligen Hilfslogarithmus (abgekürzt HL_4 [HL_5], einer Zahl versteht man den Exponenten derjenigen Potenz von 10, deren Wert der 10^4-ten (zehntausendsten) [10^5-ten (hunderttausendsten)] Potenz der gegebenen Zahl am nächsten kommt. Auch für diesen neuen Hilfslogarithmus muss die Regel 1 (und 2) des § 1 gelten bleiben.

Die Bildung der zehntausendsten Potenzen gegebener Zahlen durch fortgesetztes Multiplizieren würde ungeheure Zeit erfordern. Sehr leicht können die Resultate mit der Tafel I gefunden werden.

Beispiel: Den HL_4 5 zu bilden.

Lösung: Nach Tafel I ist unter Benutzung des in § 1 über die letzten Ziffern der Ergänzungsfaktoren Bemerkten:

$$10^6 \times 9{,}76 < 5^Z < 10^6 \times 9{,}77.$$

Wenn diese Ungleichung nach den Regeln über die Potenzen in die zehnte Potenz erhoben wird und dabei für die zehnten Potenzen der Ergänzungsfaktoren 9,76 und 9,77 ihre Werte aus Tafel I entnommen werden, so ergiebt sich:

$$10^{60} . 10^9 \times 7{,}84 < 5^H < 10^{60} . 10^9 \times 7{,}92$$

oder nach den Regeln von den Potenzen:

$$10^{69} \times 7{,}84 < 5^H < 10^{69} \times 7{,}92.$$

Durch noch zweimal wiederholte Potenzierung mit 10 folgt weiter:

$$10^{698} \times 8{,}77 < 5^T < 10^{698} \times 9{,}71$$
$$10^{6989} \times 2{,}69 < 5^V < 10^{6989} \times 7{,}41.$$

Folglich wird in Wahrheit

$$5^V = 10^{6989} \times f,$$

wobei f einen Mittelwert zwischen 2,69 und 7,41 bedeutet.

Nimmt man als Mittelwert etwa das geometrische Mittel von 2,69 und 7,41, welches annähernd den Wert 4 hat, so wird, [nach § 1, Anmerkg. 2] der HL_4 5 um 1 grösser als der nach Tafel I gefundene Wert 6989,

also $HL_4\ 5 = 6990$ [5]).

Aufgabe: Mit Tafel I den HL_4 einer Zahl auf möglichst kurze und übersichtliche Art zu berechnen.

Lösung an den Zahlenbeispielen 3,02 und 8,45.

$$10^4 \times 6{,}31 < 3{,}02^Z < 10^4 \times 6{,}32$$
$$10^{48} \times 1{,}00 < 3{,}02^H < 10^{48} \times 1{,}02$$
$$10^{480} \times 1{,}00 < 3{,}02^T < 10^{480} \times 1{,}22$$
$$10^{4800} \times 1{,}00 < 3{,}02^V < 10^{4800} \times 7{,}31.$$

Also HL_4 3,02 = 4800 [5])

$$10^9 \times 1{,}85 < 8{,}45^Z < 10^9 \times 4{,}96$$
$$10^{92} \times 4{,}70 < 8{,}45^H < 10^{92} \times 4{,}96$$
$$10^{926} \times 5{,}26 < 8{,}45^T < 10^{926} \times 9{,}01$$
$$10^{9267} \times 1{,}62 < 8{,}45^V < 10^{9269} \times 3{,}53$$

Also HL_4 8,45 = 9268
(wahrer Wert 9269).

Genau auf dieselbe Weise können nun mit einer dreistelligen Tafel der Ergänzungsfaktoren die fünfstelligen Hilfslogarithmen aller zweistelligen Dezimalzahlen zwischen 1,00 und 9,99, ja sogar aller dreistelligen Dezimalzahlen zwischen 1,000 und 9,999 gefunden werden [vergl. Tafel IV und § 6]. In den fünfstelligen Logarithmentafeln sind alle diese fünfstelligen Hilfslogarithmen, übersichtlich geordnet, zusammengestellt; doch fehlt in den gegebenen Zahlen das Dezimalkomma. Während nun bei den einstelligen Hilfslogarithmen, welche man aus Tafel I entnimmt, sehr viele Zahlen denselben Hilfslogarithmus — etwa 3 — besitzen und sich lediglich durch ihre Ergänzungsfaktoren unterscheiden, zeigt ein Blick in die fünfstelligen Tafeln, dass jeder in ihnen enthaltene Hilfslogarithmus nur zu einer einzigen Zahl hinzugehört.

Aufgabe 1: Zu den gegebenen Hilfslogarithmen 51055; 95737 u. s. w. die zugehörigen Zahlen zu suchen.

Lösung: 3,24; 9,065.

Aufgabe 2: Wie lautet die W-te*) Potenz von 1,489?

Lösung: Es ist HL_5 1,489 = 17289. Folglich ist nach der Erklärung des HL_5

$$1{,}489^W = 10^{17289} \times f.$$

Würde der dem Werte nach unbekannte Ergänzungsfaktor fortgelassen, also die rechte Seite verkleinert, so müsste, falls eine richtige Gleichung bestehen bleiben soll, auch die Grundzahl auf der linken Seite verkleinert werden. Aber die Verkleinerung darf nur sehr wenig, jedenfalls viel weniger als 1 t, betragen, weil ja für 1,488 schon die Ungleichheit bestehen müsste

$$1{,}488^W < 10^{17261}.$$

Wenn daher alle Dezimalzahlen bis auf höchstens drei Stellen nach dem Komma abgekürzt werden dürfen, so darf man schreiben

$$1{,}489^W = 10^{17289}.$$

Allgemein ergiebt sich die

Regel: Beim Gebrauch der fünfstelligen Logarithmentafeln können die [unbekannten] Ergänzungsfaktoren bei allen Rechnungen unberücksichtigt bleiben, bei denen alle Dezimalzahlen bis auf höchstens drei Stellen nach dem Komma abgekürzt werden dürfen.

*) W = 100000.