Abkürzungen: $Z = 10$; $H = 100$; $T = 1000$; $V = 10000$; $W = 100000$; $M = 1000000$;
$z = \frac{1}{10}$; $h = \frac{1}{100}$; $t = \frac{1}{1000}$; $v = \frac{1}{10000}$; $w = \frac{1}{100000}$; $m = \frac{1}{1000000}$.

§ 1. Die einstelligen Logarithmen der Zahlen von 1,00 bis 9,99.

Aufgabe: Durch fortgesetztes Multiplizieren die zehnten Potenzen der ganzen Zahlen 1 bis 9 zu bilden.

Lösung: $1^z = 1$	$4^z = 1048576$	$7^z = 282475249$
$2^z = 1024$	$5^z = 9765625$	$8^z = 1073741824$
$3^z = 59049$	$6^z = 60466176$	$9^z = 3486784401$

Die zehnten Potenzen werden also recht grosse Zahlen, die schon in ihrer Stellenzahl sehr von einander abweichen. Diesen Unterschied in der Stellenanzahl kann man noch besser durch eine andere Schreibweise sichtbar machen, indem man nämlich z. B. schreibt:

$$4^z = 10^6 \times 1{,}048576 \text{ oder } 7^z = 10^8 \times 2{,}82475249.$$

Für das folgende ist es ausreichend, wenn die Dezimalbrüche in diesen Gleichungen auf 2, höchstens auf 3 Stellen abgekürzt werden, wodurch man erhält:

$$4^z = 10^6 \times 1{,}0\underline{5} \qquad\qquad 4^z = 10^6 \times 1{,}04\underline{9}$$
$$7^z = 10^8 \times 2{,}82 \qquad \text{oder} \qquad 7^z = 10^8 \times 2{,}82\underline{5}$$

Die Striche unter den letzten Ziffern sollen andeuten, dass diese Ziffern durch Erhöhung entstanden sind; also ist genauer z. B.

$$10^6 \times 1{,}04 < 4^z < 10^6 \times 1{,}05.$$

Fehlt der Strich unter der letzten Ziffer, wie in dem Beispiel 7^z, so bedeutet das natürlich:

$$10^8 \times 2{,}82 < 7^z < 10^8 \times 2{,}83.$$

Erklärung: Unter dem einstelligen Hilfslogarithmus (abgekürzt HL_1) einer Zahl versteht man den Exponenten derjenigen Potenz von 10, deren Wert der 10ten Potenz der gegebenen Zahl am nächsten kommt.

Demnach wäre

$$HL_1\ 4 = 6 \text{ und } HL_1\ 7 = 8.$$

Die Faktoren 1,0$\underline{5}$ und 2,82 [1,04$\underline{9}$ und 2,82$\underline{5}$], die in den obigen Gleichungen für 4^z und 7^z vorkommen, sollen die Ergänzungsfaktoren der gegebenen Zahlen heissen und

in der Regel mit den Buchstaben f oder F oder φ bezeichnet werden. Ihrem Werte nach müssen diese Ergänzungsfaktoren immer zwischen 1 und 10 liegen.

In derselben oder in ähnlicher Weise können auch die 10ten Potenzen aller zweistelligen Dezimalzahlen von 1,00—9,99 gebildet werden.

Abgekürzte Berechnung der zehnten Potenzen mit zweistelligen Ergänzungsfaktoren: a bedeute eine beliebige der Dezimalzahlen von 1,01 bis 9,99. Nun ist $a^{10} = (a^5)^2$. Man könnte also zunächst den Wert von a^5 berechnen.

Damit schliesslich der zu a^{10} gehörige Ergänzungsfaktor auf zwei Dezimalstellen genau erhalten wird, [u. z. soll die Ungenauigkeit $< \frac{1}{2}$ h, d. h. $<$ 5 t sein] ist es ausreichend, wenn von a^5 die ersten drei Ziffern genau, die vierte Ziffer noch annähernd genau gefunden ist.

Nachweis an einem Zahlenbeispiel:

a = 4,22; durch Ausmultiplizieren findet man: a^5 liegt zwischen 1338 und 1339, also

$$10^3 \times 1{,}338 < a^5 < 10^3 \times 1{,}339.$$

Es wird sich daher bei der Berechnung von a^{10} handeln um die Berechnung von $1{,}338^2$ bezw. $1{,}339^2$. Jetzt soll die Tafel II benutzt werden, welche die Quadrate aller zweistelligen Dezimalbrüche gleich ausgerechnet enthält. Nach ihr wird $1{,}33^2$ bis auf drei Stellen abgekürzt 1,769. Nun ist aber

$$(1{,}33 + 8\,t)^2 = 1{,}33^2 + 1{,}33 \,.\, 16\,t + 64\,m;$$
$$(1{,}33 + 9\,t)^2 = 1{,}33^2 + 1{,}33 \,.\, 18\,t + 81\,m.$$

Der letzte Summand mit der Benennung m kann zu den ersten drei Stellen nach dem Komma keinen Beitrag mehr liefern. Der vorhergehende Summand mit der Benennung t wird, nach den Regeln der abgekürzten Multiplikation bis auf die vollen t abgekürzt, 21 t bezw. 23 t ergeben. Daher ist

$$1{,}338^2 = \begin{cases} 1{,}769 \\ +\,21 \end{cases} = 1{,}790 \qquad \Big| \qquad 1{,}339^2 = \begin{cases} 1{,}769 \\ +\,23 \end{cases} = 1{,}792.$$

Also auf zwei Stellen ergiebt sich thatsächlich in beiden Fällen das gleiche Resultat 1,79. Folglich ist

$$a^{10} = (a^5)^2 = \left(10^3 \times 1{,}33\tfrac{8}{9}\right)^2 = 10^6 \times 1{,}79.$$

Den hierbei gebrauchten Wert von a^5 erhält man auf 4 Ziffern am bequemsten, wenn ausser der Quadrattafel II noch die Tafel III für die dritten Potenzen benutzt wird. Dann braucht man nämlich aus den beiden Hülfstafeln bloss die Werte von a^2 und a^3 zu entnehmen[1]). Und zwar schreibe man jeden Wert gleich in Form einer Potenz von 10 und eines Ergänzungsfaktors. Letzterer darf stets auf drei Stellen abgekürzt werden.

Nachweis an dem vorigen Zahlenbeispiel a = 4,22.

Aus den Tafeln II und III ergiebt sich auf drei Stellen:

$$a^2 = 10^1 \times 1{,}781 \text{ und } a^3 = 10^1 \times 7{,}515.$$

Da das Produkt der beiden Ergänzungsfaktoren offenbar mehr als 10 beträgt, so schreibt man gleich:

$$a^5 = a^2 \,.\, a^3 = 10^3 \times 0{,}1781 \times 7{,}515.$$

Nach den Regeln der abgekürzten Multiplikation erhält man dann auf drei Stellen:

$$a^5 = 10^3 \times \begin{cases} 1{,}247 \\ \quad 89 \\ \quad\;\; 2 \\ \quad\;\; 1 \end{cases}$$

$= 10^3 \times$ 1,339, was vorhin als hinreichend genau nachgewiesen war[2]).

Aufgabe: Mit den Tafeln II und III den Wert von a^{10} auf möglichst kurze und übersichtliche Art zu berechnen.

Lösung für das Zahlenbeispiel $a = 6{,}57$:

$$a^2 = 10^1 \times 4{,}316; \quad a^3 = 10^2 \times 2{,}836$$

$$a^5 = a^2 . a^3 = 10^4 \times 0{,}2836 \times 4{,}316$$

$$= 10^4 \times \begin{cases} 1{,}134 \\ \quad 85 \\ \quad\ \ 3 \\ \quad\ \ 2 \end{cases}$$

$$a^5 = 10^4 \times 1{,}224$$

$$a^{10} = 10^8 \times 1{,}224^2 = 10^8 \times (1{,}22^2 + 1{,}22 . 8t)$$

$$= 10^8 \times \begin{cases} 1{,}488 \\ \quad 10 \end{cases}$$

$$a^{10} = 10^8 \times 1{,}498 = 10^8 \times 1{,}5\underline{0}.$$

Anmerkung 1: Wenn der Ergänzungsfaktor bei a^5 [grösser als $\sqrt{10}$, d. h.] grösser als 3,1 62 ist, so wird das Quadrat dieses Faktors grösser als 10. In diesen Fällen genügt es daher, das Quadrat des Ergänzungsfaktors bloss bis auf zwei Dezimalstellen zu berechnen; denn schliesslich muss ja, um einen Ergänzungsfaktor unter 10 zu erhalten, doch noch ein Faktor 10 abgeteilt werden, wodurch das zweistellige Resultat wieder dreistellig wird.

Beispiel: $a = 1{,}3$;

$$a^3 . a^2 = 2{,}197 \times 1{,}69 = \begin{cases} 2{,}197 \\ 1{,}318 \\ \quad 198 \end{cases}$$

$$a^5 = 3{,}713$$

$$a^{10} = \begin{cases} 13{,}76 \\ \quad\ \ 2 \end{cases}$$

$$= 13{,}78.$$

Also wird $a^{10} = 10^1 \times 1{,}378 = 10^1 \times 1{,}3\underline{8}$

Berücksichtigt man bei allen Rechnungen eine Dezimalstelle mehr, so erhält man am Schlusse bei den zehnten Potenzen Ergänzungsfaktoren, die auf drei Dezimalstellen genau sind [Ungenauigkeit $< \frac{1}{2}$ t].

Ordnet man alle erhaltenen Werte der zehnten Potenzen in passender Weise an, so entsteht die Tafel I mit zweistelligen Ergänzungsfaktoren.[3])

Beispiel zur Einübung des richtigen Gebrauches von Tafel I:

Den HL_1 4,73 zu finden.

Lösung: Nach Tafel I ist: $4{,}73^Z = 10^6 \times 5{,}61$.

Hierauf beginnt die zehnte Potenz von 4,73 mit den Ziffern 5 6, liegt also offenbar der nächst höheren Potenz von 10, nämlich 10^7 näher als der nächst niederen 10^6. Daher wird vermöge der obigen Erklärung HL_1 4,73 = 7, und allgemein gilt die

Regel 1: Der Hilfslogarithmus einer Zahl wird um 1 grösser als der Tafelwert, wenn der Ergänzungsfaktor der Zahl über dem Mittelwert der sämtlichen Ergänzungsfaktoren liegt.

Anmerkung 2: Es liegt nahe, als Mittelwert der Ergänzungsfaktoren den arithmetischen Mittelwert zwischen 1 und 10, also $\frac{1 + 10}{2} = 5{,}5$, anzunehmen. Folgende Betrachtung aber lehrt,

welcher Mittelwert in Wahrheit zu wählen ist: Nach den Sätzen über Potenzen mit Bruch-Exponenten ist z. B:[4])

$$10^{3+\frac{1}{2}} = 10^3 . 10^{\frac{1}{2}} = 10^3 . \sqrt{10} = 10^3 \times 3{,}162$$

Das heisst: 10^3 ergiebt bei der Multiplikation mit 3,162 einen Wert, der, als Potenz von 10 betrachtet, den Exponent $3\frac{1}{2}$ besitzen würde. Bei der Multiplikation von 10^3 mit einem noch grösseren Ergänzungsfaktor muss daher das Resultat, als Potenz von 10 betrachtet, einen Exponenten besitzen, welcher der 4 näher liegt als der 3. Allgemein folgt hieraus die

Regel 2: Der wahre Mittelwert der Ergänzungsfaktoren ist der Wert 3,16(2)

§ 2. Die vier- und fünfstelligen Logarithmen der Zahlen von 1,00—9,99.

Erklärung: Unter dem vier- [fünf-]stelligen Hilfslogarithmus (abgekürzt HL_4 [HL_5], einer Zahl versteht man den Exponenten derjenigen Potenz von 10, deren Wert der 10^4-ten (zehntausendsten) [10^5-ten (hunderttausendsten)] Potenz der gegebenen Zahl am nächsten kommt. Auch für diesen neuen Hilfslogarithmus muss die Regel 1 (und 2) des § 1 gelten bleiben.

Die Bildung der zehntausendsten Potenzen gegebener Zahlen durch fortgesetztes Multiplizieren würde ungeheure Zeit erfordern. Sehr leicht können die Resultate mit der Tafel I gefunden werden.

Beispiel: Den HL_4 5 zu bilden.

Lösung: Nach Tafel I ist unter Benutzung des in § 1 über die letzten Ziffern der Ergänzungsfaktoren Bemerkten:

$$10^6 \times 9{,}76 < 5^Z < 10^6 \times 9{,}77.$$

Wenn diese Ungleichung nach den Regeln über die Potenzen in die zehnte Potenz erhoben wird und dabei für die zehnten Potenzen der Ergänzungsfaktoren 9,76 und 9,77 ihre Werte aus Tafel I entnommen werden, so ergiebt sich:

$$10^{60} . 10^9 \times 7{,}84 < 5^H < 10^{60} . 10^9 \times 7{,}92$$

oder nach den Regeln von den Potenzen:

$$10^{69} \times 7{,}84 < 5^H < 10^{69} \times 7{,}92.$$

Durch noch zweimal wiederholte Potenzierung mit 10 folgt weiter:

$$10^{698} \times 8{,}77 < 5^T < 10^{698} \times 9{,}71$$
$$10^{6989} \times 2{,}69 < 5^V < 10^{6989} \times 7{,}41.$$

Folglich wird in Wahrheit

$$5^V = 10^{6989} \times f,$$

wobei f einen Mittelwert zwischen 2,69 und 7,41 bedeutet.

Nimmt man als Mittelwert etwa das geometrische Mittel von 2,69 und 7,41, welches annähernd den Wert 4 hat, so wird, [nach § 1, Anmerkg. 2] der HL_4 5 um 1 grösser als der nach Tafel I gefundene Wert 6989,

also $HL_4\ 5 = 6990$ [5]).