Aber selbst wenn die beiden Differenzen F − f und f − φ nicht vollständig gleichwertig sind, so besteht doch kein erheblicher Unterschied zwischen ihnen. [Vergl. das vorige Zahlenbeispiel.] Nimmt man daher ihren algebraischen Mittelwert m, so wird der gesuchte Ergänzungsfaktor β sich von $f + \frac{em}{10}$ nur äusserst wenig unterscheiden.

Aufgaben: a) Eine kurze Regel über die Zwischenschaltung bei dreistelligen Ergänzungsfaktoren zu bilden.

b) HL_5 5 zu bestimmen.

Lösung:

$$10^{6} \times 9{,}765 < 5^{Z} < 10^{6} \times 9{,}766$$
$$10^{69} \times 7{,}883 < 5^{H} < 10^{69} \times 7{,}891$$
$$10^{698} \times 6{,}266 < 5^{T} < 10^{698} \times 9{,}361$$
$$10^{6989} \times 4{,}665 < 5^{V} < 10^{6989} \times 5{,}167$$
$$10^{69896} \times 4{,}9 < 5^{W} < 10^{69397} \times 1{,}4$$

HL_5 5 = 69 897

c) HL_5 3,02 zu bestimmen.

Lösung:

$$10^{4} \times 6{,}310 < 3{,}02^{Z} < 10^{4} \times 6{,}311$$
$$10^{48} \times 1{,}001 < 3{,}02^{H} < 10^{48} \times 1{,}003$$
$$10^{480} \times 1{,}010 < 3{,}02^{T} < 10^{480} \times 1{,}031$$
$$10^{4800} \times 1{,}105 < 3{,}02^{V} < 10^{4800} \times 1{,}357$$
$$10^{48000} \times 2{,}7 < 3{,}02^{W} < 10^{48001} \times 2{,}0$$

HL_5 3,02 = 48001

Anmerkung: Im Beispiel c) ist der Ergänzungsfaktor f von 6,310 = 1,001, dagegen φ, der Ergänzungsfaktor von 6,30, = 9,849. Bei der Zwischenschaltung darf die Differenz f − φ nicht wie sonst gebildet werden, da hier nicht die bei dem vorigen Beweise stillschweigend gemachte Annahme erfüllt ist, dass für die beiden Zahlen 6,31 und 6,30 der HL_1 denselben Wert hat. Vielmehr muss, wie man sich leicht überzeugt, diesmal die Differenz $f - \frac{\varphi}{10}$ gebildet werden, die gleich 0,016 ist, also gleich der nächstfolgenden Differenz F − f.

Anmerkungen.

1) Es bedarf einer kurzen Rechtfertigung, warum gerade dieser Weg zur Bildung von a^{10} eingeschlagen ist: Der binomische Satz sollte nicht angewandt werden, weil er über das Pensum der Sekunda hinausgeht. Es blieb demnach nur die Zerlegung von a^5 in passende Faktoren übrig. Folgende Zerlegungen habe ich in Betracht gezogen:

$$a^{10} = [(a^2)^2]^2 \,.\, a^2 = (a^3)^3 \,.\, a = (a^2\, a^3)^2.$$

Bei der ersten Zerlegung wurde die Rechnung dadurch unbequem, dass für das erste a^2 eine zu grosse Zahl von Dezimalstellen nötig waren, um das Resultat in der gewünschten Genauigkeit zu erhalten, und dass die Nebenrechnungen zu umständlich wurden. Bei der zweiten Zerlegung wurden die Nebenrechnungen beim zweiten Potenzieren mit 3 gleichfalls sehr umständlich, zumal sie noch eine Quadrattafel erforderten. Mir schien somit die dritte Zerlegung die praktischste zu sein.

2) Ein gänzlich einwandfreier Beweis dafür, dass die bei der Rechnung in Betracht gezogenen Stellenanzahlen wirklich hinreichen zur Erlangung der gewünschten Genauigkeit, würde erst mit den Hilfsmitteln der Fehlerrechnung gefunden werden können.

3) Ich brauche wohl kaum zu bemerken, dass die Tafel I in Wahrheit nicht auf die soeben angegebene Weise berechnet worden ist, sondern vielmehr mit der Logarithmentafel.

4) Ohne Anwendung des Wurzelbegriffes wäre die Ableitung des wahren Mittelwertes etwa folgendermassen zu geben:

Es ist z. B. 10^5 offenbar der Mittelwert zwischen 1 [= 10^0] und 10^{10}. Daher ist es nur natürlich, festzusetzen: f soll dann der Mittelwert zwischen den beiden Ergänzungsfaktoren 1 und 10 heissen,

wenn es aus diesen beiden Werten durch dieselbe Rechnung hervorgeht, wie 10^5 aus 1 und 10^{10}. Nun geht aber 10^5 keineswegs durch die Rechnung $x = \frac{1 + 10^{10}}{2}$ aus 1 und 10^{10} hervor, sondern vielmehr durch die Rechnung: $1 : x = x : 10^{10}$

(10^5 ist nicht der arithmetische, sondern der geometrische Mittelwert von 1 und 10^{10}). Folglich muss der verlangte Mittelwert f sich aus 1 und 10 durch die Rechnung ergeben:

$$1 : f = f : 10.$$

Hieraus folgt aber $f = 3{,}162$, wie die Probe beweist.

5) Nach der Methode bei Bardey-Pietzker-Presler würde sich die Berechnung des log 5 und des log 3,02 unter Benutzung der Tafel II folgendermassen gestalten:

$$5^2 = 25$$
$$5^4 = 625 = 10^2 \times 6{,}25$$
$$10^5 \times 3{,}90 < 5^8 < 10^5 \times 3{,}91$$
$$10^{11} \times 1{,}52 < 5^{16} < 10^{11} \times 1{,}53$$
$$10^{22} \times 2{,}31 < 5^{32} < 10^{22} \times 2{,}34$$
$$10^{44} \times 5{,}34 < 5^{64} < 10^{44} \times 5{,}48$$
$$10^{89} \times 2{,}85 < 5^{128} < 10^{89} \times 3{,}00$$
$$10^{178} \times 8{,}12 < 5^{256} < 10^{178} \times 9{,}00$$
$$10^{357} \times 6{,}59 < 5^{512} < 10^{357} \times 8{,}10$$
$$10^{715} \times 4{,}34 < 5^{1024} < 10^{715} \times 6{,}56$$
$$10^{1431} \times 1{,}88 < 5^{2048} < 20^{1431} \times 4{,}30$$

Hieraus folgt vermöge Anmerkung 2 in § 1:

$$10^{1431} < 5^{2048} < 10^{1432}$$
$$1431 < 2048 \log 5 < 1432$$

Also im Mittel wird

$$\log 5 = 1431{,}5 : 2048 = 0{,}6990$$

12288
2027
1843
184
184

$$9{,}12 < 3{,}02^2 < 9{,}13$$
$$10^1 \times 8{,}32 < 3{,}02^4 < 10^1 \times 8{,}34$$
$$10^3 \times 6{,}92 < 3{,}02^8 < 10^3 \times 6{,}96$$
$$10^7 \times 4{,}79 < 3{,}02^{16} < 10^7 \times 4{,}84$$
$$10^{15} \times 2{,}29 < 3{,}02^{32} < 10^{15} \times 2{,}34$$
$$10^{30} \times 5{,}24 < 3{,}02^{64} < 10^{30} \times 5{,}48$$
$$10^{61} \times 2{,}74 < 3{,}02^{128} < 10^{61} \times 3{,}00$$
$$10^{122} \times 7{,}51 < 3{,}02^{256} < 10^{122} \times 9{,}00$$
$$10^{245} \times 5{,}64 < 3{,}02^{512} < 10^{245} \times 8{,}10$$
$$10^{491} \times 3{,}18 < 3{,}02^{1024} < 10^{491} \times 6{,}56$$
$$10^{983} \times 1{,}01 < 3{,}02^{2048} < 10^{983} \times 4{,}30$$

Also nach Anmerkung 2 in § 1:

$$10^{983} < 3{,}02^{2048} < 10^{984}$$
$$983 < 2048 \log 3{,}02 < 984$$

Im Mittel wird

$$\log 3{,}02 = 983{,}5 : 2048 = 0{,}4802$$

8192
1643
1638
5

6) Will man den Wurzelbegriff vermeiden, so wäre dieses Stück des Beweises etwa folgendermassen auszudrücken:

In dieser Ungleichheit darf man

für $\frac{10}{e}(x^e - 1)$	für $\frac{10}{e}(1 - x^e)$

den Wert

$\frac{10}{e}(x^e - 1) = \frac{1t}{a}$ *)	$\frac{10}{e}(1 - x^e) = \frac{1t}{a + ev}$ *)

einsetzen; denn es wird durch diese Einsetzung:

$x^e - 1 = \frac{e.1t}{10a} = \frac{ev}{a}$	$1 - x^e = \frac{e.1t}{10(a + ev)} = \frac{ev}{a + ev}$
$x^e = 1 + \frac{ev}{a}$,	$x^e = 1 - \frac{ev}{a + ev} = \frac{a}{a + ev}$,

was nur möglich ist, wenn x selbst

grösser als 1	kleiner als 1

*) t bedeutet $\frac{1}{1000}$, $v = \frac{1}{10000}$.

ist. Die zehnte Potenz der letzten Gleichung ergiebt:

$$x^{10e} = \left(1 + \frac{ev}{a}\right)^{10} \quad \Big| \quad x^{10e} = \left(\frac{a}{a + ev}\right)^{10}.$$

Hierdurch geht die vorige Ungleichheit über in

$$\left(1 + \frac{ev}{a}\right)^{10} > \left(1 + \frac{1t}{a}\right)^{e}. \quad \Big| \quad \left(1 - \frac{1t}{a + ev}\right)^{e} < \left(\frac{a}{a + ev}\right)^{10}.$$

Der Rest des Beweises bleibt völlig ungeändert.

7) Diese beiden Ungleichheiten, auf denen der ganze Beweis beruht, lassen sich mit einem Schlage aus dem binomischen Satze für gebrochene Exponenten herleiten. Es wird nämlich nach dem binomischen Satze

$$\left(1 + \frac{ev}{a}\right)^{\frac{10}{e}} > 1 + \frac{10}{e} \cdot \frac{ev}{a} \quad \Big| \quad \left(\frac{a}{a + ev}\right)^{\frac{10}{e}} = \left(1 - \frac{ev}{a + ev}\right)^{\frac{10}{e}} > 1 - \frac{10}{e} \cdot \frac{ev}{a + ev}$$

$$\text{d. h.} > 1 + \frac{1t}{a} \quad \Big| \quad \text{d. h.} > 1 - \frac{1t}{a + ev}$$

Durch Potenzieren mit e folgen hieraus die beiden verlangten Ungleichheiten. Man sieht also, der ganze Beweis des § 3 — die Vorübung miteingeschlossen — besteht lediglich in einer Umgehung des allgemeinen binomischen Satzes. Gerade deswegen dürfte sich der Beweis für solche Anstalten eignen, bei denen der allgemeine binomische Satz nicht mehr zur Lehraufgabe gehört. Die von mir gewählte Art der Umgehung des Satzes schien mir von den verschiedenen, die ich teils vorfand, teils mir selbst zurecht legte, immerhin noch diejenige zu sein, die am wenigsten Vorkenntnisse voraussetzte.

8) Diesen Hinweis, dass sich bei gegebenem Logarithmus durch Interpolation bloss eine, höchstens zwei Stellen des Numerus berechnen lassen, halte ich für recht zweckmässig. Es ist sehr unerfreulich, bei logarithmischen Berechnungen selbst noch in den oberen Klassen das Resultat mittels Interpolation bis auf eine ganz unglaubliche Reihe von Stellen bestimmt zu sehen, die natürlich bis auf die ersten samt und sonders wertlos sind.

9) Will man hier den Wurzelbegriff vermeiden, so muss natürlich die Fragestellung lauten: Die Gleichung aufzulösen $w^5 = 6241$.