Die Γ-Funktion für komplexes Argument.

(Schluß.)

Die dritte Methode zur Erweiterung der Γ-Funktion auf komplexes Gebiet knüpft an die Definition der Γ-Funktion durch ein bestimmtes Integral an, welches aber so modifiziert wird, daß es für jeden Wert des Argumentes Bedeutung erlangt. Dieses Erweiterungsverfahren der Γ-Funktion auf komplexes Gebiet beruht auf der Anwendung des Riemannschen Schleifenintegrals und wurde von H. Hankel (Habilitationsdissertation: „Die Eulerschen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes.“ Leipzig 1863) und von N. Bigler in seiner in Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 89 erschienenen Abhandlung: „Über die Γ-Funktion mit beliebigem Parameter“ eingeschlagen.

Die beiden Abhandlungen zugrunde liegende Definition:

$$\frac{1}{\Gamma(u)} = \frac{1}{2i\pi} \int e^x x^{-u} dx$$

erhält deshalb den Namen Schleifenintegral, weil man das Integral, statt es von einem singulären Punkte der zu integrierenden Funktion zu einem anderen zu erstrecken, auf einem Wege um die singulären Punkte herumführt, indem man den Integrationsweg vom Punkte ∞ der Halbachse der negativen, reellen Zahlen ausgehen, den Nullpunkt im positiven Sinne umkreisen und zu seinem Ausgangspunkte zurückkehren läßt. Zu obiger Definition gelangt man nach Hankel auf folgende Weise: Da $\Gamma(u)$ für alle negativen, ganzen Zahlen unendlich groß wird, erscheint es zweckmäßig, $\frac{1}{\Gamma(u)}$ oder $\frac{1}{\Gamma(-u)}$ durch ein bestimmtes Integral auszudrücken, welches stets endlich, stetig und eindeutig bleibt, und nun wendet man auf die Differenzengleichung

$$\frac{1}{\Gamma(-u)} + \frac{u}{\Gamma(1-u)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

das von Laplace empfohlene Verfahren an, dem zufolge das Integral einer solchen Gleichung gleich $\int (-t)^u v\,dt$ gesetzt und v als Funktion von t bestimmt wird. Um aber die Mehrdeutigkeit des $(-t)^u$ zu beheben, führt man in der Ebene von $t=0$ bis $t=+\infty$ einen Schnitt und läßt letzteren mit der Achse der reellen, positiven t zusammenfallen, indem man überdies in $(-t)^u = e^{u\,lg(-t)}$: $lg(-t)$ so bestimmt, daß er reell ist für alle negativen, reellen t. Setzt man nun:

$$\frac{1}{\Gamma(-u)} = \int (-t)^u v\,dt,$$

so geht die Gleichung $a)$ über in die Gleichung:

$$\int (-t)^u v\,dt + \int u(-t)^{u-1}\,dt = 0.$$

Setzt man nun $(-t)^u = w$, so ist $u(-t)^{u-1} = -\frac{\partial w}{\partial t}$ und es wird die letzte Relation lauten:

$$\int \left[\frac{\partial w}{\partial t} - w\right] v\, dt = 0$$

oder

$$\int v \frac{\partial w}{\partial t} dt - \int w v\, dt = 0.$$

Durch partielle Integration findet man:

$$\int v \frac{\partial u}{\partial t} dt = v w - \int w \frac{\partial v}{\partial t} dt$$

und somit:

$$u w - \int w \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v\right] dt = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn w als willkürliche Größe angesehen wird, wenn für beide Grenzen des Integrals v verschwindet und

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = 0.$$

Aus der letzten Gleichung aber folgt:

$$v = c e^{-t}$$

und daraus wieder, daß v nur für $t = +\infty$ verschwindet, so daß man also berechtigt ist:

$$\frac{1}{\Gamma(-u)} = c \int_{+\infty}^{+\infty} (-t)^u e^{-t} dt$$

zu setzen, wobei sich der Integrationsweg vom Punkte $t = +\infty$ oberhalb der Abscissenachse in einer Kurve, welche die positive, reelle Achse nicht schneidet, bis zum Punkte $t = +\infty$ unterhalb der Abscissenachse erstreckt. Da ferner die zu integrierende Funktion monodrom ist, so ist obiges Integral gleich demselben Integral, dessen Integrationsweg der um den Mittelpunkt $t = 0$ beschriebene, unendlich kleine Kreis ist. Mithin ist:

$$\int_{+\infty}^{+\infty} (-t)^{-1} e^{-t} dt = \int_{0}^{0} (-t)^{-1} e^{-t} dt,$$

wenn man zur Bestimmung der Integrationskonstante c: $u = -1$ gesetzt hat.

Es ist dann

$$1 = c \int_{+\infty}^{+\infty} (-t)^{-1} e^{-t} dt.$$

Setzt man nun $f(t) = -\frac{e^{-t}}{t}$, so ist, da $\lim_{t=0} t f(t) = -\lim_{t=0} (e^{-t}) = -1$ ist, nach der Formel von Cauchy:

$$\int_{0}^{0} (-t)^{-1} e^{-t} dt = -2 i \pi$$

und daher

$$1 = c \int_{0}^{0} (-t)^{-1} e^{-t} dt = -2 c i \pi$$

und

$$c = -\frac{1}{2 i \pi}.$$

Mit Benützung dieses Wertes von c geht die frühere Gleichung über in:

$$-\frac{2\pi i}{\Gamma(-u)} = \int_{+\infty}^{+\infty} (-t)^u e^{-t} dt,$$

woraus dadurch, daß man u durch $(-u)$ ersetzt, die Relation folgt:

$$\frac{1}{\Gamma(u)} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{+\infty}^{+\infty} (-t)^{-u} e^{-t} dt,$$

welche mit der am Anfange erwähnten Definitionsgleichung von $\frac{1}{\Gamma(u)}$ vollständig zur Übereinstimmung gebracht wird, wenn man als neue Veränderliche $t = -x$ setzt.

Mit Benützung der einfachsten Sätze von Cauchy über die Integration auf imaginärem Wege hat auch E. Heine (Crelles Journal Bd. 89 „Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy") dem reziproken Wert

$$G(a) = \frac{1}{\Gamma(a)}$$

die Form gegeben: $$G(a) = \frac{1}{2i\pi} \int e^z z^{-a} dz,$$

wobei der Integrationsweg des Integrals eine Kurve bildet, welche den Nullpunkt umkreisend in der Richtung der negatigen x-Achse verläuft, ohne daß die Kurve geschlossen zu sein braucht, und $G(a)$ für alle Werte von a definiert ist. Wie schon früher gezeigt wurde, besteht für komplexes a mit reellem positiven Teile die Gleichung:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{G(a)} = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx,$$

wobei die Integration auf reellem Wege erfolgt und unter der hier auftretenden Potenz x^{a-1} die sogenannte Hauptpotenz zu verstehen ist. Aus der Definition der Funktion $\frac{1}{G(a)}$ folgt dann sofort die Gleichung:

$$G(a) = a\, G(a+1).$$

Zur Fortsetzung der Funktion $G(a)$ auch für solche Argumente a, deren reeller Teil nicht positiv ist, wird festgesetzt, daß für alle a die letzte Relation bestehen soll. (z. B. für $a = o \ldots G(o) = o\, G(1) = o$.) Für den Fall, daß in $a = \alpha + \beta i : o < \alpha < 1$ ist, wissen wir bereits, daß die Gleichung:

$$\pi\, G(a)\, G(1-a) = \sin a\pi$$

besteht. Um nun zu zeigen, daß diese Relation auch für andere a besteht, geht man schrittweise vor. Ist $a = 1 + qi$ und $q = o$, so gilt die Relation ohne weiteres, da $G(o) = o$ ist gemäß unserer Festsetzung. Ist aber $a = 1 + qi$, wo $q \neq o$ ist, so beweist man zuerst die Richtigkeit der Gleichung:

$$\Gamma(1+qi)\, \Gamma(1-qi) = \frac{q\pi i}{\sin q\pi i}$$

durch Multiplikation der beiden Γ-Integrale. Daraus folgt durch Einführung der G-Funktionen:

$$\pi\, G(1+qi)\, G(1-qi) = \frac{\sin qi\pi}{qi}.$$

Nun besteht aber die Relation:

$$G(a) = a\,G(a+1)$$

für alle Argumente a, also auch für $a = 1 + q\,i$ und $a = 1 - q\,i$, daher ist:

$$G(-q\,i) = -q\,i\,G(1-q\,i),$$

somit: $$\pi\,G(1+q\,i)\,\frac{G(-q\,i)}{-q\,i} = \frac{sin\,(q\,i\,\pi)}{q\,i} \quad \text{oder:}$$

$$\pi\,G(1+q\,i)\;G(-q\,i) = -\,sin\,(q\,i\,\pi) = sin\,(1+q\,i)\,\pi.$$

Damit ist nun bewiesen, daß die Gleichung:

$$\pi\,G(a)\;G(1-a) = sin\,a\,\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad b)$$

für alle a gilt von der Form: $a = p + q\,i$, wo $0 < p \leqq 1$ ist. Vermöge der Festsetzung $G(a) = a\,G(a+1)$ gilt dann aber die Gleichung $b)$ für alle a.

Kehren wir nun zu unserem Kurvenintegral

$$\int e^{z}.\,z^{-a}\,dz$$

zurück und wählen wir als Integrationsweg die x-Achse von $-\infty$ bis zum Punkte $-\eta$, dann den Kreis vom Radius η um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt und die x-Achse vom Punkte $-\eta$ bis zum Punkte $-\infty$, so setzt sich das Kurvenintegral aus drei Teilen zusammen. Es ist dann:

$$z = \varrho\,(cos\,\omega + i\,sin\,\omega)$$
$$z^{-a} = \varrho^{-a}\,(cos\,a\,\omega - i\,sin\,a\,\omega)$$
$$dz = \varrho\,(-\,sin\,\omega + i\,cos\,\omega)\,d\omega + (cos\,\omega + i\,sin\,\omega)\,d\varrho\,; \text{ und } \omega = -\,\pi.$$

Ferner ist im ersten Teilintegral $dz = -\,d\varrho$ zu setzen, $z = -\,\varrho$ und $\omega = -\,\pi$ und

$$z^{-a} = \varrho^{-a}\,[cos\,a\,\pi + i\,sin\,a\,\pi].$$

Im zweiten Teilintegral um den Kreis vom Radius η ist: $z = \eta\,e^{i\,\omega}$, $dz = i\,\eta\,e^{i\,\omega}\,d\omega$, $z^{-a} = \eta^{-a}\,e^{-a\,\omega\,i}$, während als Grenzen für ω: $-\,\pi$ und $+\,\pi$ zu nehmen sind.

Endlich im letzten Teilintegral ist: $\omega = +\,\pi$, $z = -\,\varrho$ und $dz = -\,d\varrho$ zu setzen. Setzt man nun in dem Integral:

$$\int e^{z}.\,z^{-a}\,dz = \int_{-\infty}^{-\eta} e^{z}.\,z^{-a}\,dz + \int_{-\eta}^{-\eta} e^{z}.\,z^{-a}\,dz + \int_{-\eta}^{-\infty} e^{z}.\,z^{-a}\,dz$$

in jedes der drei rechts stehenden Integrale die zugehörigen Werte ein, so ist:

$$\int_{-\infty}^{-\eta} e^{z}.\,z^{-a}\,dz = -\int_{\infty}^{\eta} e^{-\varrho}\,\varrho^{-a}\,(cos\,a\,\pi + i\,sin\,a\,\pi)\,d\varrho,$$

$$\int_{-\eta}^{-\eta} e^{z}.\,z^{-a}\,dz = i\,\eta^{1-a}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{(1-a)\,\omega\,i}\;e^{\eta\,e^{\omega\,i}}\,d\omega,$$

$$\int_{-\eta}^{-\infty} e^{z}.\,z^{-a}\,dz = \int_{\eta}^{\infty} e^{-\varrho}.\,\varrho^{-a}\,(cos\,a\,\pi - i\,sin\,a\,\pi)\,d\varrho.$$

Mithin wird, da das zweite Integral, sobald der reelle Teil von a zwischen 0 und 1 gewählt wird, verschwindet:

$$\int e^{z} . z^{-a} dz = 2 i \sin a \pi \int_{\eta}^{\infty} e^{-\varrho} \varrho^{-a} d\varrho.$$

Da aber η unendlich klein gewählt werden kann, so ist

$$\int e^{z} . z^{-a} dz = 2 i \sin a \pi \, \Gamma(1-a),$$

woraus mit Benützung der Gleichung $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a \pi}$ folgt:

$$\Gamma(1-a) \sin a \pi = \pi \frac{1}{\Gamma(a)} = \pi\, G(a)$$

und daraus findet man:

$$G(a) = \frac{1}{2 i \pi} \int e^{z} . z^{-a} dz.$$

Die Beschränkung nun, daß der reelle Teil von a zwischen 0 und 1 liegen soll, fällt aber weg mit Rücksicht auf die allgemeine Gültigkeit der Gleichung $G(a) = a\, G(a+1)$,
so daß die Definitionsgleichung:

$$G(a) = \frac{1}{2 i \pi} \int e^{z} . z^{-a} dz$$

für alle Werte von a gilt.

L. Pochhammer endlich zeigt in seiner im 35. Bd. der mathematischen Annalen erschienenen Abhandlung: „Über ein Integral mit doppeltem Umlauf“ und „Zur Theorie der Eulerschen Integrale“, daß $\Gamma(a)$ selbst sich durch ein Schleifenintegral darstellen läßt. Er gelangt auf folgendem Wege zur Darstellung der Funktion: $\Gamma(a) = \frac{1}{2 i \sin a \pi} \int e^{z} . z^{a-1} dz.$

Man ziehe in der z-Ebene um den Punkt $z = o$ als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser R und betrachte das Integral:

$$\int e^{z} . z^{a-1} dz$$

unter der Voraussetzung, daß sich der Integrationsweg von $-\infty$ längs der negativen, reellen Achse bis zum Punkte $-k$ erstreckt, von hier längs des Kreises im positiven Sinne herumläuft bis zum Punkte $+k$, um von hier wieder längs der negativen, reellen x-Achse verlaufend zum Punkte $-\infty$ zurückzukehren. Im Punkte $+k$ (Schnittpunkt des Kreises mit der positiven, reellen x-Achse) soll unter z^{a-1} der Wert $e^{(a-1) lg\, k}$ verstanden werden, wo $lg\, k$ der reelle Logarithmus bedeutet. Das Integral selbst mit dem eben beschriebenen Integrationswege soll mit $\bar{\Gamma}(a)$:

$$\bar{\Gamma}(a) = \int_{-\infty}^{-(o)} e^{z} . z^{a-1} dz$$

bezeichnet werden. Dabei soll der Querstrich über dem Zeichen $\Gamma(a)$ und dem Integral auf die geschlossene Integrationskurve hindeuten, während $-\infty$ an Stelle der unteren Grenze den Anfangs- und Endpunkt des Weges bezeichnet

und die Null in Klammer an Stelle der oberen Grenze andeuten soll, daß der Punkt o im positiven Sinne einmal umkreist werden soll. Dabei ist zu bemerken, daß das Integral von der Größe k unabhängig ist, da der Kreis durch jeden konzentrischen Kreis, der keinen weiteren singulären Punkt enthält, ersetzt werden kann. Ebenso kann statt des früher genannten Integrationsweges jede beliebige, sich selbst nicht schneidende Kurve, die in $-\infty$ beginnt und endigt und den Punkt $z = o$ einmal umkreist, als Integrationsweg von $\bar{\Gamma}(a)$ gewählt werden. Ersetzt man in $\bar{\Gamma}(a)$ die Veränderliche z durch die Veränderliche $(-v)$, so beginnt und endigt die Integration im Punkte $+\infty$ und führt zu einer einmaligen Umkreisung des Punktes o im positiven Sinne.

Zufolge der früheren Festsetzung über z^{a-1} hat man zu setzen:

$$(-v)^{a-1} = e^{-i\pi a} v^{a-1}$$

und es ist dann:

$$\bar{\Gamma}(a) = e^{-i\pi a} \int_{+\infty}^{-(o)} e^{v} v^{a-1} dv.$$

Mit Hilfe dieses Resultates läßt sich eine Beziehung zwischen $\Gamma(a)$ und $\bar{\Gamma}(a)$ unter der Voraussetzung herstellen, daß der reelle Teil von a positiv ist.

Zerlegt man $\bar{\Gamma}(a)$ in die Summe zweier Integrale, von denen das erste sich vom Punkte $+\infty$ unendlich nahe bis an den Nullpunkt heran erstreckt, während das zweite von der letztgenannten Stelle bis zur Grenze $-\infty$ zu erstrecken ist, so nimmt $\bar{\Gamma}(a)$, wenn man noch berücksichtigt, daß das Integral längs der Peripherie des Kreises um den Nullpunkt herumgenommen verschwindet, die Form an:

$$\bar{\Gamma}(a) = e^{-i\pi a} \int_{-\infty}^{o} e^{-v} v^{a-1} dv + e^{2i\pi(a-1)} . e^{-i\pi a} \int_{o}^{\infty} e^{-v} v^{a-1} dv.$$

Nun ist aber:

$$e^{2i\pi a - 2i\pi - i\pi a} = e^{i\pi a} . \frac{1}{e^{2i\pi}} = e^{i\pi a}, \text{ da } e^{2i\pi} = 1.$$

Mithin ist:

$$\bar{\Gamma}(a) = (e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}) \int_{o}^{\infty} e^{-v} v^{a-1} dv = (e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}) \Gamma(a)$$

oder da:

$$\sin \pi a = \frac{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}}{2i},$$

ist:

$$\bar{\Gamma}(a) = 2i \sin \pi a \, \Gamma(a)$$

oder:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2i \sin \pi a} \int e^{z} . z^{a-1} dz,$$

worin eben das rechts auftretende Integral das Schleifenintegral darstellt.

Es sollen nun im folgenden einige wesentliche Eigenschaften der Funktion $\bar{\Gamma}(a)$, welche eine für jedes endliche a eindeutige und stetige Funktion bedeutet, abgeleitet werden. Durch teilweise Integration ergibt sich nach der Definition die Gleichung:

$$\Gamma(a+1)=\int_{-\infty}^{-(o)} e^u u^a\,du=[e^u u^a]_{-\infty}^{-(o)}-a\int_{-\infty}^{-(o)} e^u u^{a-1}\,du$$

und, da das erste Glied auf der rechten Seite verschwindet,:

$$\Gamma(a+1=-a\,\Gamma(a).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man:

$$\Gamma(a+2)=-(a+1)\,\Gamma(a+1)=(-1)^2\,(a+1)\,a\,\Gamma(a)$$
$$\Gamma(a+3)=-(a+2)\,\Gamma(a+2)=(-1)^3\,(a+2)\,(a+1)\,a\,\Gamma(a)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und schließlich für jedes beliebige ganzzahlige positive m:

$$\Gamma(a+m)=(-1)^m\,(a+m-1)\ldots\ldots(a+1)\,a\,\Gamma(a).$$

In analoger Weise findet man auch folgende Relationen:

$$\Gamma(a)=-(a-1)\,\Gamma(a-1)$$
$$\Gamma(a-1)=-(a-2)\,\Gamma a\,(-2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma(a-m+1)=-(a-m)\,\Gamma(a-m)\text{ oder}$$
$$\Gamma(a-m)=(-1)^m\frac{\Gamma(a)}{(a-1)\ldots(a-m)}.$$

Für den Fall, daß a ganzzahlig ist, heben sich die $\Gamma(a)$ enthaltenen geradlinigen Integrale auf, da dann $e^u u^{a-1}$ eine in der ganzen u-Ebene eindeutige Funktion bedeutet. Ist a gleichzeitig positiv, so verschwindet auch das übrigbleibende Kreisintegral. Ist aber a ganzzahlig und negativ, beziehungsweise gleich Null, so entwickelt man:

$$e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\cdots\cdots$$

und:
$$\Gamma(a)=\int_{-\infty}^{o}\left(1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\ldots\right)u^{a-1}\,du.$$

Es wird dann:

$$\Gamma(-m)=\int_{-\infty}^{o}\left(1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\ldots\right)u^{-m-1}\,du$$
$$=\int_{-\infty}^{o}\left(u^{-m-1}\,du+\frac{u^{-m}}{1!}\,du+\ldots+\frac{u^{-1}}{m!}\,du+\ldots\right)$$

Nach einem bekannten Satze aber verschwinden rechts alle Glieder bis auf jenes mit dem Exponenten -1 und

$$\int_{-\infty}^{o}\frac{u^{-1}}{m!}\,du=\frac{2i\pi}{m!}.$$

Mithin wird:
$$\Gamma(-m)=\frac{2i\pi}{m!}$$

und wenn $m=o$ wird, so ist $\Gamma(o)=2i\pi$.

Aus dem Früheren aber folgt, wenn $a = m$ und m ganzzahlig und positiv ist, $\bar{\Gamma}(m) = o$.

Die Größe des $\bar{\Gamma}(a)$ wird unendlich klein, wenn sich der reelle Teil des a dem Werte $-\infty$ nähert, und zwar folgt dies für ganzzahlige a aus der Gleichung:

$$\bar{\Gamma}(-m) = \frac{2i\pi}{m!},$$

für nicht ganzzahlige a aus der Gleichung:

$$\bar{\Gamma}(a-m) = (-1)^m \frac{\bar{\Gamma}(a)}{(a-1)\ldots(a-m)}.$$

Schließlich soll noch $\bar{\Gamma}(a)$ in Produktform ähnlich dem Gaußschen Produkte dargestellt und eine Beziehung zwischen $\bar{\Gamma}(a)$ und dem Eulerschen Integral 1. und 2. Art aufgestellt werden. Zu diesem Zwecke verwende man die Gleichung: $\bar{\Gamma}(a) = 2i \sin a\pi\, \Gamma(a)$

und, da nach dem Früheren: $\Gamma(a) = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{n!\, n^a}{a(a+1)\ldots(a+n)}$,

$$\sin a\pi = a\pi \prod_1^\infty{}_\nu \frac{(\nu+a)(\nu-a)}{\nu^2},$$

nimmt $\bar{\Gamma}(a)$ die Form an:

$$\bar{\Gamma}(a) = 2i\pi \lim_{n=\infty} \frac{n^a\, n!\,(1+a)(1-a)(2+a)(2-a)\ldots(n+a)(n-a)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)(n!)^2},$$

$$\bar{\Gamma}(a) = 2i\pi \lim_{n=\infty} \frac{n^a (1-a)(2-a)\ldots(n-a)}{n!}.$$

Als weitere Anwendung der Gleichung

$$\bar{\Gamma}(a) = 2i \sin a\pi\, \Gamma(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.)$$

folgt:

$$\bar{\Gamma}(1-a) = 2i \sin(1-a)\pi\, \Gamma(1-a)$$

$$\bar{\Gamma}(1-a) = 2i \sin \pi a\, \Gamma(1-a) \quad . \quad . \quad . \quad 3.)$$

und durch Multiplikation der Gleichung 1.) und 3.) ergibt sich:

$$\bar{\Gamma}(1-a)\,\bar{\Gamma}(a) = -4 \sin^2 \pi a\, \Gamma(a)\,\Gamma(1-a),$$

da aber: $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi}$, so ist

$$\bar{\Gamma}(1-a)\,\bar{\Gamma}(a) = -4\pi \sin a\pi.$$

Analog folgt aus:

$$\bar{\Gamma}(a) = 2i \sin a\pi\, \Gamma(a) = 2i \sin a\pi \cdot \frac{\pi}{\sin a\pi} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-a)}$$

$$\bar{\Gamma}(a) = \frac{2i\pi}{\Gamma(1-a)}.$$

Bezeichnet ferner:

$$E(a\,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du$$

das Eulersche Integral 1. Art und

$$E(a\,b) = e^{-i\pi(a+b)} \int u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du$$

dasselbe Integral im Sinne Pochhammers als Schleifintegral betrachtet, so erhält man folgende Relation:

$$E(ab) = (e^{i\pi a} - e^{-\pi i a})(e^{i\pi b} - e^{-\pi i b})\, E(ab).$$

Multipliziert man nun die bekannte Gleichung:

$$E(ab) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

mit

$$(e^{i\pi a} - e^{-\pi i a})(e^{i\pi b} - e^{-\pi i b}),$$

so folgt die Gleichung:

$$(e^{i\pi a} - e^{-\pi i a})(e^{i\pi b} - e^{-\pi i b})\, E(ab) = \frac{(e^{i\pi a} e^{-\pi i a})\,\Gamma(a)\,(e^{i\pi b} - e^{-\pi i b})\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

und so auch die Relation:

$$E(ab) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Zum Schlusse dieses Abschnittes sei noch der Abhandlung „Über die Γ-Funktion mit beliebigem Parameter“ von Bigler (Crelles Journal Bd. 102) gedacht, in welcher der Autor die von Hankel gefundene Integralform für $\frac{1}{\Gamma(a)}$ als Definition der Γ-Funktion aufstellt und daraus einige bekannte Relationen der Funktion $\Gamma(a)$ herleitet. Nach Hankel ist die Γ-Funktion definiert durch:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2i\pi}\int e^x x^{-a}\, dx,$$

wobei der Integrationsweg eine aus dem Westpunkte um den Pol Null geworfene Schlinge bildet. Ist a eine positive ganze Zahl n, so schließt sich der Weg im Westen und verwandelt sich in eine um den Pol Null geschlossene Kurve. Es ist also:

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = \frac{1}{2i\pi}\int e^x x^{-n}\, dx.$$

Ist $n = 0$, so ist $x = 0$ kein Pol mehr und:

$$\frac{1}{\Gamma(0)} = 0 \;\ldots\; \Gamma(0) = \infty.$$

Nun bringt man die geschlossene Kurve in die Nähe von Null, so daß auf derselben e^x nach steigenden Potenzen von x entwickelt werden kann:

$$e^x = \sum_0^\infty {}_\lambda \frac{x^\lambda}{\lambda!}.$$

Es ist also dann:

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = \frac{1}{2i\pi}\int \sum_0^\infty {}_\lambda \frac{x^{\lambda - n}}{\lambda!}\, dx,$$

in welcher Gleichung alle Integralglieder bis auf jenes, welches den Koeffizienten $\frac{1}{\lambda}$ enthält, verschieden. Da diesem einen Gliede $\lambda = n - 1$ entspricht und

$$\frac{1}{(n-1)!}\int \frac{dx}{x} = \frac{2i\pi}{(n-1)!},$$

so erhält man die Relation:

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \;\ldots\; \Gamma(n) = (n-1)!$$

Ist n eine negative Zahl, so kommt in der Gleichung:

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = \frac{1}{2i\pi}\int \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{x^{\lambda+n}}{\lambda!}\, dx$$

unter den Integralgliedern kein solches vor, welches $\frac{1}{x}$ enthielte. $x = 0$ ist also kein Pol, daher ist:

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0 \text{ oder } \Gamma(-n) = \infty.$$

Behufs der weiteren Untersuchung der Funktion $\Gamma(a)$ gibt man der von Hankel gewählten Definitionsgleichung mit Beibehaltung des von ihm angegebenen Integrationsweges folgende Gestalt:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{N=\infty} \frac{1}{2i\pi}\int \left(1+\frac{x}{N}\right)^N x^{-a}\, dx$$

und setzt darin $\frac{x}{N} = t$, so ist dann:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{N=\infty} \frac{1}{2i\pi}\int (1+t)^N (Nt)^{-a} N dt$$

oder:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{n=\infty} \frac{N^{-a+1}}{2i\pi}\int (1+t)^N t^{-a}\, dt,$$

während der Integrationsweg eine rechtläufige Schlinge aus dem Punkte -1 um den Pol Null bildet. Wegen der hohen Potenz von $(1+t)^N$ liegt der größte Wert des Integrals in der Nähe der Nullstelle, um welche aber $(1+t)^N$ nach steigenden Potenzen von t entwickelt werden kann:

$$(1+t)^N = \sum_{0}^{N}{}_{\lambda} \binom{N}{\lambda} t^{\lambda}.$$

Mithin wird:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{N=\infty} \frac{N^{-a+1}}{2i\pi} \sum_{0}^{N}{}_{\lambda} \binom{N}{\lambda} \int t^{\lambda-a}\, dt,$$

in welcher Relation $t^{\lambda-a} = e^{(\lambda-a)\, lg(t)}$.

Ist nun die reelle Komponente von $\lambda - a + 1$ positiv, so ist der Pol Null zugänglich.

Geht also t von -1 bis an Null heran im positiven Sinne, so wird:

$$t^{\lambda-a} = e^{(\lambda-a)\,[lg\, t - i\pi]} = e^{-(\lambda-a)\, i\pi}(-t)^{\lambda-a}$$

und geht t von 0 wieder bis -1, so ist:

$$t^{\lambda-a} = e^{(\lambda-a)\,[lg\, t + i\pi]} = e^{(\lambda-a)\, i\pi}(-t)^{\lambda-a}.$$

Mithin setzt sich das Integral $\int t^{\lambda-a}\, dt$ auf dem eben beschriebenen Wege zusammen, wie folgt:

$$\int t^{\lambda-a}\, dt = e^{-(\lambda-a)\, i\pi}\int_{-1}^{0}(-t)^{\lambda-a}\, dt + e^{(\lambda-a)\, i\pi}\int_{0}^{-1}(-t)^{\lambda-a}\, dt.$$

Daraus ergibt sich wieder die Relation:

$$\int t^{\lambda-a}\, dt = [e^{(\lambda-a)\, i\pi} - e^{-(\lambda-a)\, i\pi}]\int_{0}^{-1}(-t)^{\lambda-a}\, dt,$$

welche für $-t=t'$ übergeht in die Gleichung:

$$\int t^{\lambda-a}\,dt=[e^{\lambda i\pi}.\,e^{-ai\pi}-e^{\lambda i\pi}.\,e^{ai\pi}]\,(-1)\int_0^1 (t')^{\lambda-a}\,dt'.$$

Nun ist aber: $\quad (e^{i\pi})^{\lambda}=[\cos\pi+i\sin\pi]^{\lambda}=(-1)^{\lambda}$, also:

$$\int t^{\lambda-a}\,dt=(-1)^{\lambda}\,[e^{ai\pi}-e^{-ai\pi}]\int_0^1 (t')^{\lambda-a}\,dt' \quad \text{oder:}$$

$$\int t^{\lambda-a}\,dt=(-1)^{\lambda}\,[\cos a\pi+i\sin a\pi-\cos a\pi+i\sin a\pi]\left[\frac{t^{\lambda-a+1}}{\lambda-a+1}\right]_0^1,$$

$$\int t^{\lambda-a}\,dt=(-1)^{\lambda}.\,2\,i\sin a\pi\,\frac{1}{\lambda-a+1}.$$

Mithin nimmt $\frac{1}{\Gamma(a)}$ die Form an:

$$\frac{1}{\Gamma(a)}=\frac{\sin a\pi}{\pi}\lim_{N=\infty}N^{-a+1}\sum_{0}^{N}{}_{\lambda}\frac{(-1)^{\lambda}\binom{N}{\lambda}}{\lambda-a+1},$$

oder da: $\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{N}\frac{(-1)^{\lambda}\binom{N}{\lambda}}{-a+\lambda+1}=\frac{N!}{(-a+1)\,(-a+2)\ldots(-a+N+1)}$

auch die Form:

$$\frac{1}{\Gamma(a)}=\frac{\sin a\pi}{\pi}\lim_{N=\infty}\frac{N^{-a+1}.\,N!}{(-a+1)\,(-a+2)\,..\,(-a+N+1}\;\ldots\ldots\;A)$$

Nun ist aber: $\quad \sin a\pi=a\pi\prod_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\left(1-\frac{a^2}{\lambda^2}\right),$

$$\frac{\sin a\pi}{\pi}=a\,(1-a^2)\left(\frac{4-a^2}{4}\right)\left(\frac{9-a^2}{9}\right)\ldots\left(\frac{N^2-a^2}{N^2}\right)\ldots.$$

$$\sin\frac{a\pi}{\pi}=\frac{a\,(1-a^2)\,(4-a^2)\,\ldots\,(N^2-a^2)}{(N!)^2},\quad \text{also:}$$

$$\frac{1}{\Gamma(a)}=\lim_{N=\infty}\frac{N^{-a+1}.\,N!}{(N!)^2}\cdot\frac{a\,(1-a^2)\,(4-a^2)\ldots[(1+N)^2-a^2]\,(N^2-a^2)}{(1-a)\,(2-a)\ldots(N+1-a)\,(N-a)},$$

$$\frac{1}{\Gamma(a)}=\lim\frac{N^{-a+1}}{N!}\cdot\frac{a\,(1+a)\,(2+a)\,\ldots\,(N+a)\,(N-a)}{N+1-a},$$

$$\frac{1}{\Gamma(a)}=\lim_{N=\infty}\frac{a\,(1+a)\,(2+a)\ldots(a+N-1)\,(a+N)}{N!\;N^a}=\lim_{N=\infty}\left(\frac{N}{N+1-a}\right)$$

und da: $\quad \displaystyle\lim_{N=\infty}\frac{N}{N+1-a}=1,$

so wird: $\quad \displaystyle\frac{1}{\Gamma(a)}=\lim_{N=\infty}\frac{a\,(a+1)\,\ldots\,(a+N-1)\,(a+N)}{N!\;N^a},$

$$\Gamma(a)=\lim_{N=\infty}\frac{N!\;N^a}{a\,(a+1)\,(a+2)\,..\,(a+N-1)\,(a+N)}.$$

Setzt man in der letzten Gleichung $a:1-a$, so erhält man die Relation:

$$\Gamma(1-a)=\lim_{N=\infty}\frac{N!\;N^a}{(-a+1)\,(-a+2)\,..\,(-a+1+N)},$$

in welcher der rechtsstehende Ausdruck mit dem zweiten Faktor rechts in Gleichung A) vollkommen identisch ist, so daß:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{\sin a\pi}{\pi}\,\Gamma(1-a)$$

oder:

$$\Gamma(a)\;\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

Mit Benützung dieser Gleichung ergibt sich zunächst, daß:

$$\Gamma(a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma(1-a)}$$

oder:

$$\Gamma(a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot\frac{1}{2\,i\,\pi}\int e^x\,x^{a-1}\,dx = \frac{1}{2\,i\sin a\pi}\int e^x\,x^{a-1}\,dx$$

und:

$$a\,\Gamma(a) = \frac{a}{2\,i\sin a\pi}\int e^x\,x^{a-1}\,dx.$$

Wendet man auf das rechtsstehende Integral die partielle Integration an, so findet man:

$$\int e^x\,x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}\Big[e^x\,x^a\Big] - \frac{1}{a}\int e^x\,x^a\,dx$$

und:

$$a\,\Gamma(a) = \frac{1}{2\,i\sin a\pi}\Big[e^x\,x^a\Big]_{\text{Anfangswert}}^{\text{Endwert}} - \frac{1}{2\,i\sin a\pi}\int e^x\,x^a\,dx$$

oder da:

$$-\sin a\pi = \sin(a+1)\pi = \sin a\pi\,\cos\pi + \cos a\pi\,\sin\pi = -\sin a\pi,$$

so erhält man:

$$a\,\Gamma(a) = \frac{1}{2\,i\sin(a+1)\pi}\int e^x\,x^a\,dx = \Gamma(1+a),$$

Setzt man in der Gleichung:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2\,i\sin a\pi}\int e^x\,x^{a-1}\,dx$$

voraus, daß die reelle Komponente von a positiv ist, so wird der Pol Null zugänglich und der Integrationsweg zieht sich, wie Pochhammer gezeigt hat, auf die Realitätsaxe von $-N$ bis Null zusammen:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2\,i\sin a\pi}\left[e^{-i\pi(a-1)}\int_{-N}^{0} e^x\,(-x)^{a-1}\,dx + e^{i\pi(a-1)}\int_{0}^{-N} e^x\,(-x)^{a-1}\,dx\right],$$

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2\,i\sin a\pi}\left[e^{i\pi(a-1)}\int_{0}^{-N} e^x\,(-x)^{a-1}\,dx - e^{-i\pi(a-1)}\int_{0}^{-N} e^x\,(-x)^{a-1}\,dx\right].$$

Diese letzte Gleichung geht durch die Substitution $-x = y$ über in die Relation:

$$\Gamma(a)\,\frac{1}{2\,i\sin a\pi}\left[e^{-i\pi(a-1)}\int_{0}^{N} e^{-y}\,y^{a-1}\,dy + e^{-i\pi(a-1)}\int_{0}^{N} e^{-y}\,y^{a-1}\,dy\right]$$

oder da:

$$e^{i\pi a}.\,e^{-i\pi} = e^{i\pi a}\left[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right] = -e^{i\pi a}$$

$$e^{-i\pi a}.\,e^{i\pi} = e^{-i\pi a}\left[\cos\pi + i\sin\pi\right] = -e^{-i\pi a}$$

nimmt sie auch die Form an:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2\,i\,sin\,a\,\pi}\left[e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}\right]\int_0^N e^{-y}\,y^{a-1}\,dy \text{ und schließlich:}$$

$$\Gamma(a) = \int_0^N e^{-y}\,y^{a-1}\,dy.$$

Behufs der weiteren Untersuchung von $\Gamma(a)$ geht Bigler von der Gleichung aus:

$$f(a) = \sum_1^\infty{}_\lambda \left\{\left(a+\lambda-\frac{1}{2}\right) lg\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right) = 1\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad B)$$

ersetzt darin einmal $a = a + \mu - 1$, das anderemal $a + \mu$ und bildet:

$$f(a+\mu-1) - f(a+\mu) = \sum_1^\infty{}_\lambda \left\{\left(a+\mu+\lambda-\frac{3}{2}\right) lg\left(\frac{a+\mu+\lambda-1}{a+\mu+\lambda-2}\right) - 1\right\} -$$

$$- \sum_1^\infty{}_\lambda \left\{\left(a+\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right) lg\left(\frac{a+\mu+\lambda}{a+\mu+\lambda-1}\right) - 1\right\}.$$

Setzt man nun auf der rechten Seite für λ der Reihe nach: 1, 2, 3, ... so fallen, wenn λ über alle Grenzen wächst, alle Glieder weg, bis auf das erste, so daß:

$$f(a+\mu-1) - f(a+\mu) = \left(a+\mu-\frac{1}{2}\right) lg\left(\frac{a+\mu}{a+\mu-1}\right) - 1$$

und folglich: $f(a) - f(a+1) = \left(a+\frac{1}{2}\right) lg\left(\frac{a+1}{a}\right) - 1$

ist, wenn man in der letzten Formel $\mu = 1$ setzt. Bildet man analog der Gleichung B):

$$f(a+n) = \sum_1^\infty{}_\lambda \left[\left(a+n+\lambda-\frac{1}{2}\right) lg\left(\frac{a+n+\lambda}{a+n+\lambda-1}\right) - 1\right]$$

und so dann:

$$f(a) - f(a+n) = \sum_1^\infty{}_\lambda \left[\left(a+\lambda-\frac{1}{2}\right) lg\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right) - 1\right] -$$

$$- \sum_1^\infty{}_\lambda \left[\left(a+n+\lambda-\frac{1}{2}\right) lg\left(\frac{a+n+\lambda}{a+n+\lambda-1}\right) - 1\right],$$

so kann man, während in der ersten Summe rechts λ von 1 bis ∞ läuft, um die zweite Summe rechts auf die erste zu beziehen, für einen Augenblick: $n + \lambda = \lambda'$ setzen. Durch diese Substitution setzt also die zweite Summe gegenüber der ersten erst mit dem n^{ten} Gliede ein. Während also die $(n-1)^{ten}$ Glieder der ersten Summe stehen bleiben, werden die folgenden Glieder derselben durch die der zweiten Summe getilgt. Um aber λ von Null bis $n - 1$ laufen zu lassen, wird man das Glied für $\lambda = o$ einmal auf der rechten Seite addieren und gleichzeitig subtrahieren:

$$f(a) - f(a+n) = \sum_0^{n-1}{}_\lambda \left[\left(a+\lambda-\frac{1}{2}\right) lg\left(\frac{a+1}{a+\lambda-1}\right) - 1\right] -$$

$$- \left(a+\frac{1}{2}\right) lg\,\frac{a}{a-1}.$$

Daraus erhält man schließlich die Beziehung:

$$f(a)-f(a+n)=-n-\sum_{0}^{n-1}{}_{\lambda}\Big[lg\,(a+\lambda)+\Big(a+n-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,(a+n)-$$
$$-\Big(a-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,a\Big]$$

und durch beiderseitige Subtraktion der Größe a:

$$f(a)-f(a+n)-a=-(n+a)-\sum_{0}^{n-1}{}_{\lambda}\Big\{lg\,(a+\lambda)+$$
$$+\Big(a+n-\frac{1}{2}\Big)\cdot lg\,(a+n)-\Big(a-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,a\Big\},$$

$$f(a)-f(a+n)-a=-(n+a)-lg\,[a\,(a+1)\,(a+2)\ldots(a+n-1)]+$$
$$+\Big(a+n-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,(a+n)-\Big(a-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,a.$$

Nun ist aber:

$$\Gamma(a+n)=(a+n-1)!=1.\,2.\,3.\ldots(a+n-1),$$
$$\Gamma(a)=(a-1)!=1.\,2.\,3.\ldots(a-1)$$

und
$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=a\,(a+1)\ldots.(a+n-1),$$

daher:
$$lg\,\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=log\,[a\,(a+1)\ldots(a+n-1)].$$

Es ist somit:

$$f(a)-f(a+n)-a=-(a+n)-lg\,\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}+$$
$$+\Big(a+n-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,(a+n)-\Big(a-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,a$$

und:

$$lg\,\Gamma(a)+a=f(a)-f(a+n)+lg\,\Gamma(a+n)+(a+n)-$$
$$-\Big(a+n+\frac{1}{2}\Big)\,lg\,(a+n)+\Big(a-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,a.$$

Wächst nun n über alle Grenzen, so nimmt diese Gleichung mit Berücksichtigung dessen, daß in diesem Falle:

$$\Gamma(a+n)=n^{a}\,\Gamma(n),$$
$$lg\,\Gamma(a+n)=lg\,\Gamma(n)+a\,lg\,n,$$
$$f(a+n)=0,$$
$$\Big(a+n-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,(a+n)=\Big(a+n-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,n$$

wird, die Form an:

$$lg\,\Gamma(a)+a=f(a)+n+lg\,\Gamma(n)+a\,lg\,n-\Big(a+n-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,n+$$
$$+\Big(a-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,a \qquad \text{oder:}$$

$$lg\,\Gamma(a)+a=f(a)+n+lg\,\Gamma(n)+\Big(a-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,n+\Big(a+n-\frac{1}{2}\Big)\,lg\,n.$$

Setzt man in dieser Formel $a=\frac{1}{2}$ und bedenkt, daß $\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)=\sqrt{\pi}$ ist, so erhält man:

$$\frac{1}{2}\, lg\, \pi + \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) + n + lg\, \Gamma(n) - \left(n - \frac{1}{2}\right)\, lg\, n, \ldots\ldots\ldots B)$$

in welcher Gleichung $f\left(\frac{1}{2}\right)$ eruiert werden soll:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \left[\lambda\, lg \left(\frac{\frac{1}{2} + \lambda}{\lambda - \frac{1}{2}}\right) - 1\right],$$

$$lg \left(\frac{\lambda + \frac{1}{2}}{\lambda - \frac{1}{2}}\right) = lg \left[\frac{\lambda\left(1 + \frac{1}{2\lambda}\right)}{\lambda\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)}\right] = lg \left(\frac{1 + \frac{1}{2\lambda}}{1 - \frac{1}{2\lambda}}\right) =$$

$$= 2 \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{2n+1},$$

somit erhält $f\left(\frac{1}{2}\right)$ die Gestalt:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \sum_{o}^{\infty}{}_{n} \left[\frac{2\lambda}{(2n+1)(2\lambda)^{2n+1}} - 1\right] = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{(2n+1)(2\lambda)^{2n}};$$

denn für $n = o$ wird das erste Glied der $\sum_{o}^{\infty}{}_{n}$ gleich der Einheit und hebt sich gegen (-1) weg. Nun ist bekanntlich:

$$sin\, a\pi = a\pi \prod_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \left(1 - \frac{a^2}{\lambda^2}\right),$$

daher für $a = \frac{x}{2}$: $\qquad sin\, \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi x}{2} \prod_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \left[1 - \frac{x^2}{(2\lambda)^2}\right],$

$$lg \left(\frac{2\, sin\, \frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\, lg \left[1 - \frac{x^2}{(2\lambda)^2}\right],$$

setzt man ferner in:

$$lg\,(1 - x) = -\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right)$$

für $x = \left(\frac{x}{2\lambda}\right)^2$, so folgt:

$$lg \left[1 - \left(\frac{x}{2\lambda}\right)^2\right] = -\sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2\lambda}\right)^{2n}.$$

Mithin wird:

$$lg \left[\frac{2\, sin\, \frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right] = \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \left[-\frac{1}{n} \frac{x^{2n}}{(2\lambda)^{2n}}\right] \text{ und somit:}$$

$$\int_{o}^{1} lg \left(\frac{2\, sin\, \frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right) dx = -\sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)(2\lambda)^{2n}}.$$

Da aber: $-\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n}$, so kann man der letzten Gleichung auch die Form geben:

$$\int_0^1 lg\left[\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right] dx = \sum_1^\infty{}_\lambda \sum_1^\infty{}_n \left[\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n}\right] \frac{1}{n(2\lambda)^{2n}},$$

$$\int_0^1 lg\left[\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right] dx = 2f\left(\frac{1}{2}\right) + lg\left(\frac{2}{\pi}\right);$$

denn für $x = 1$, wird:

$$lg\left[\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right] = \sum_1^\infty{}_\lambda \sum_1^\infty{}_n \left[-\frac{x^{2n}}{n(2\lambda)^{2n}}\right]:$$

$$lg\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\sum_1^\infty{}_\lambda \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n(2\lambda)^{2n}}.$$

Es ist also:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\, lg\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 lg\left(\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right) dx.$$

Setzt man nun:

$$A = \int_0^1 lg\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right) dx,$$

so ist auch:

$$A = \int_0^1 lg\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right) dx \qquad \text{und:}$$

$$2A = \int_0^1 \left[lg\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right) + lg\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right)\right] dx = \int_0^1 lg\,(2\sin\pi x)\, dx.$$

Durch die Substitution $2x = y$, geht die letzte Gleichung über in die Form:

$$2A = \frac{1}{2}\int_0^2 lg\left[2\sin\frac{\pi y}{2}\right] dy = \int_0^1 lg\left(2\sin\frac{\pi y}{2}\right) dy = A;$$

daraus folgt:

$$2A - A = A = 0.$$

Es ist also:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 lg\left[\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 lg\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right) dx - \frac{1}{2}\int_0^1 lg\,(\pi x)\, dx,$$

in welcher Gleichung das erste rechts stehende Integral mit A identisch ist und verschwindet, so daß

$$\frac{1}{2}\int_0^1 lg\left[\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right] dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 lg\,(\pi x)\, dx = -\frac{1}{2}\, lg\,\pi - \frac{1}{2}\int_0^1 lg\,(x)\, dx.$$

Durch Integratio per partes ergibt sich ferner:

$$\int_0^1 lg\,(x)\, dx = -1$$

und somit:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 lg\left[\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right] dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, lg\,\pi.$$

Folglich ist: $$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} lg \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} lg\, \pi = \frac{1}{2}(1 - lg\, 2).$$

Führt man diesen Wert der Funktion $f\left(\frac{1}{2}\right)$ in der Gleichung B) ein, so erhält man die Relation:

$$\frac{1}{2} lg\, \pi + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} lg\, 2 + n + lg\, \Gamma(n) - \left(n - \frac{1}{2}\right) lg\, n,$$

$$\frac{1}{2} lg\, 2\pi = n + lg\, \Gamma(n) - \left(n - \frac{1}{2}\right) lg\, n,$$

$$n + lg\, \Gamma(n) = \frac{1}{2} lg\, 2\pi + \left(n - \frac{1}{2}\right) lg\, n.$$

Demnach ist:

$$lg\, \Gamma(a) + a = f(a) + \frac{1}{2} lg\, 2\pi + \left(a - \frac{1}{2}\right) lg\, a,$$

$$lg\, \Gamma(a) = -a + \frac{1}{2} lg\, 2\pi + \left(a - \frac{1}{2}\right) lg\, a +$$

$$+ \sum_1^\infty {}_\lambda \left[\left(a + \lambda - \frac{1}{2}\right) lg \left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right) - 1\right] \text{ und}$$

$$\Gamma(a) = e^{-a + \frac{1}{2} lg\, 2\pi + \left(a - \frac{1}{2}\right) lg\, a + \sum_1^\infty {}_\lambda \left[\left(a + \lambda - \frac{1}{2}\right) lg \left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right) - 1\right]}.$$

Nun ist aber:

$$e^{\frac{1}{2} lg\, 2\pi} = e^{lg \sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi},$$

$$e^{\left(a - \frac{1}{2}\right) lg\, a} = e^{lg\, a^{a - \frac{1}{2}}} = a^{a - \frac{1}{2}},$$

also: $$e^{\sum_1^\infty {}_\lambda \left[\left(a + \lambda - \frac{1}{2}\right) lg \left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right) - 1\right]} = e^{\sum_1^\infty {}_\lambda lg \left[\frac{\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}}}{e}\right]} =$$

$$= e^{lg \prod_1^\infty {}_\lambda \left\{\frac{1}{e}\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}}\right\}} = \prod_1^\infty {}_\lambda \left\{\frac{1}{e}\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}}\right\},$$

so daß sich als Schlußresultat der letzten Betrachtung die Relation ergibt:

$$\Gamma(a) = a^{a - \frac{1}{2}} e^{-a} \cdot \sqrt{2\pi} \prod_1^\infty {}_\lambda \left\{\frac{1}{e}\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Dabei ist nur noch zu zeigen, daß:

$$\lim_{a=\infty} \frac{\Gamma(a)}{a^{a-\frac{1}{2}} e^{-a} \sqrt{2\pi}} = 1.$$

Nach der Definition ist: $$e = \lim_{\omega=\infty} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega,$$

ferner: $$\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1} = \frac{a+\lambda-1+1}{a+\lambda-1} = 1 + \frac{1}{a+\lambda-1},$$

$$\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}}.$$

Diese letzte Gleichung wird mit $\left(1+\frac{1}{a+\lambda-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$, welcher Ausdruck für $a=\infty$ zur Grenze 1 konvergiert, multipliziert und gleichzeitig dividiert, so daß:

$$\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{a+\lambda-1}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{a+\lambda-1}\right)^{-\frac{1}{2}}} = \left(1+\frac{1}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{a+\lambda-1}\right)^{-\frac{1}{2}}} \text{ und}$$

$$\lim_{a=\infty}\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}} = \lim_{a=\infty}\left(1+\frac{1}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-1} \cdot \lim_{a=\infty}\left(1+\frac{1}{a+\lambda-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es ist also: $\lim_{a=\infty}\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}} = e$

und mithin: $\lim_{a=\infty} \prod_{1}^{\infty}{}_{\lambda}\left[\frac{1}{e}\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{e}\cdot e = 1.$

Die vierte zur Erweiterung der Γ-Funktion auf komplexes Gebiet führende Methode verdankt man M. Hermite. Derselbe zeigt im Cours litogr. vorerst den Zusammenhang der Integraldefinition der Funktion $\Gamma(u)$ mit ihrer Definition durch das Gaußsche Produkt und geht von da aus auf die Reihenentwicklungen für $lg\,\Gamma(u)$, $\frac{d\,lg\,\Gamma(u)}{d\,u}$ und $\frac{d^2\,lg\,\Gamma(u)}{d\,u^2}$ über. Die letztgenannte Reihe, die kurz mit $\chi(u)$ bezeichnet werden möge, hat die Form:

$$\chi(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(u+n)^2} + \ldots\ldots,$$

ist in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Stellen $u=0, -1, -2$, die Pole sind, regulär und wird von Hermite zum Ausgangspunkte der Theorie der Γ-Funktion empfohlen. Ferner zeigt er, daß $\chi(u)$ folgende Bedingungsgleichungen erfüllt:

$$\chi(u+1) - \chi(u) = -\frac{1}{u^2},$$

$$\chi(u) + \chi(1-u) = \left(\frac{\pi}{sin\,u\,\pi}\right)^2,$$

$$\chi(u) + \chi\left(u+\frac{1}{n}\right) + \ldots + \chi\left(u+\frac{n-1}{n}\right) = n^2\,\chi(n\,u),$$

daß man von $\chi(u)$ ausgehend zu neuen konvergenten Reihen für $\frac{d\,lg\,\Gamma(u)}{d\,u}$ und $lg\,\Gamma(u)$ gelangt und von da aus zu der Weierstraßschen Produkt-

entwicklung: $\frac{1}{\Gamma(u+1)} = e^{Cu} \prod_{1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{u}{n}\right) e^{-\frac{u}{n}}\right]$, aus welcher Beziehung, wie früher gezeigt wurde, folgt, daß $\frac{1}{\Gamma(u+1)}$ eine in der ganzen Ebene reguläre Funktion ist. Schließlich folgert Hermite aus den drei Eigenschaften der Funktion $\chi(u)$ die drei Haupteigenschaften der Funktion $\Gamma(u)$.

Hermite geht bei seiner Untersuchung von dem Integrale:

$$\int_0^1 x^{u-1}\, dx$$

aus, wobei u reell und größer als Null zu denken ist. Nun ist:

$$\int_0^1 x^{u-1}\, dx = \frac{1}{u}$$

und unter derselben Voraussetzung über u, ist:

$$\int_0^1 x^{u}\, dx = \frac{1}{u+1}.$$

Bildet man also:

$$\int_0^1 (x^{u-1} - x^{u})\, dx = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)\, dx = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} = \frac{1}{u(u+1)}$$

und setzt man in dieser Gleichung $u : u+1$, so wird:

$$\int_0^1 x^{u}(1-x)\, dx = \frac{1}{(u+1)(u+2)}$$

und $$\int_0^1 [x^{u-1}(1-x) - x^{u}(1-x)]\, dx = \frac{2}{u(u+1)(u+2)}$$ oder:

$$\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^2\, dx = \frac{2}{u(u+1)(u+2)}.$$

Durch Fortsetzung dieses hier eben angedeuteten Verfahrens gelangt man schließlich zur Gleichung:

$$\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{(n-1)!}{u(u+1)\,..\,(u+n-1)},$$

welche durch die Substitution $x = 1 - x$ übergeht in die Gleichung:

$$\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{u-1}\, dx = \frac{(n-1)!}{u\,.\,.\,.\,.\,.\,(u+n-1)}.$$

Setzt man nun jetzt: $x^n = z$, so wird $x^{n-1}\, dx = \frac{dz}{n}$ und man erhält die Gleichung:

$$\frac{1}{n}\int_0^1 [1 - \sqrt[n]{z}]^{u-1}\, dz = \frac{(n-1)!}{u\,.\,.\,.\,.\,(u+n-1)}$$

oder da: $\frac{1}{n} = \frac{n^{u-1}}{n^u}$, so ist:

$$\int_0^1 n\,(1-\sqrt[n]{z})^{u-1}\,dz = \frac{n^u\,(n-1)!}{u\,\ldots\,(u+n-1)}.$$

Geht man beiderseits zur Grenze für $n=\infty$ über, so erhält man, da:

$$\lim_{n=\infty}\{n\,(1-\sqrt[n]{z})\} = -\,l\,z = l\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{u-1} dz = \lim_{n=\infty} \frac{n^u\,(n-1)!}{u\,(u+1)\,..\,(u+n-1)}.$$

Von hier aus gelangt man durch die Substitution $z = e^{-x}$ zur neuen Relation:

$$-\int_\infty^0 x^{u-1}\,e^{-x}\,dx = \lim_{n=\infty} \frac{n^u\,(n-1)!}{u\,(u+1)\,.\,(u+n-1)},$$

$$\int_0^\infty e^{-x}.\,x^{u-1}\,dx = \lim_{n=\infty} \frac{n^u\,(n-1)!}{u\,(u+1)\,..\,(u+n-1)},$$ so daß:

$$\Gamma(u) = \lim_{n=\infty} \frac{n^u}{u\left(1+\frac{u}{1}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)},$$

in welcher Gleichung rechts im Nenner der Faktor $\left(1+\frac{u}{n}\right)$, da sein Wert für $n=\infty$ so wie so der Einheit als Grenze für $n=\infty$ zustrebt, noch hinzugefügt werden kann, so daß:

$$\Gamma(u) = \lim_{n=\infty} \frac{n^u}{u\left(1+\frac{u}{1}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)\left(1+\frac{u}{n}\right)}.$$

Durch Logarithmierung dieser Gleichung folgt:

$$lg\,\Gamma(u) = \lim_{n=\infty}\left[u\,lg\,n - lg\,u - lg\left(1+\frac{u}{1}\right) - \ldots - lg\left(1+\frac{u}{n}\right)\right].$$

Nun untersucht man das Verhalten dieser Reihe für den Fall, daß u reell oder komplex ist, und entfernt die in dem Logarithmus liegende Vieldeutigkeit durch die Annahme jenes Wertes als Hauptwert des Logarithmus, der für $u=o$ verschwindet. Außerdem setzt man mit Gauß:

$$lg\,n = lg\,\frac{n!}{(n-1)!} = lg\,\frac{2}{1} + lg\,\frac{3}{2} + \ldots + lg\,\frac{n}{n-1}$$

und erhält mit Hilfe dieser Relation die Gleichung:

$$lg\,u\,\Gamma(u) = \lim_{n=\infty}\left[u\,lg\,\frac{2}{1} + u\,lg\,\frac{3}{2} + \ldots + u\,lg\,\frac{n}{n-1} - lg\left(1+\frac{u}{1}\right) - \right.$$
$$\left. - \ldots - lg\left(1-\frac{u}{n}\right)\right],$$

$$lg\,u\,\Gamma(u) = \left[u\,lg\,\frac{2}{1} - lg\left(1+\frac{u}{1}\right)\right] + \left[u\,lg\left(1+\frac{1}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - lg\left(1+\frac{u}{2}\right)\right] + \ldots + \left[u\,lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right) - lg\left(1+\frac{u}{\nu}\right)\right] + \ldots,$$

$$lg\,u\,\Gamma(u) = \sum_1^\infty{}_n \left[u\,lg\left(1+\frac{1}{n}\right) - lg\left(1+\frac{u}{n}\right)\right].$$

Daß diese Reihe für alle reellen und komplexen Werte von u mit Ausnahme der negativen, ganzzahligen Werte des u konvergiert, zeigt Hermite auf folgende Weise: Bezeichnet man allgemein

$$f(x) = u\, lg\,(1+x) - lg\,(1+ux),$$

so ergibt die einmalige Differentiation:

$$f'(x) = \frac{u}{1+x} - \frac{u}{1+ux} = \frac{x\,(u^2-u)}{(1+x)\,(1+ux)}.$$

Entwickelt man $f(x)$ nach der Formel von Maclaurin, so ist:

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1!} f'(o) + \ldots\ldots$$

und bricht man mit Benützung der Voraussetzung, daß unter Berücksichtung komplexer Werte von $u: f(o) = 0$ ist, nach dem zweiten Gliede ab, so ist:

$$f(x) = \frac{x}{1!} f'(tx), \text{ wo } o < t < 1; \text{ also ist:}$$

$$f(x) = x\int_0^1 f'(tx)\,dt = x^2 \int_0^1 \frac{u^2-u}{(1+tx)\,(1+utx)}\,dt.$$

Ist Θ ein Wert von t zwischen Null und 1, so ist:

$$f(x) = x^2 \frac{\lambda\,(u^2-u)}{(1+\Theta x)\,(1+u\Theta x)}.$$

Diese Gleichung geht durch die Substitution $x = \frac{1}{n}$ über in die Form:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\,\frac{\lambda\,(u^2-u)}{\frac{1}{n^2}(n+\Theta)\,(n+u\Theta)} = \frac{\lambda\,(u^2-u)}{(n+\Theta)\,(n+u\Theta)},$$

worin λ und Θ mit n veränderlich sind. Nun ist bekanntlich:

$$|n+u\Theta| > n - \Theta\,|u|,$$

daher muß: $|n+u\Theta| > n - |u|$, so daß von einem bestimmten n an: $n > |u|$:

$$\left|\frac{\lambda\,(u^2-u)}{(n+\Theta)\,(n+u\Theta}\right| < \frac{|u^2-u|}{n\,|n+\Theta u|} < \frac{|u^2-u|}{n\,(n-|u|)} < \frac{|u^2-u|}{n^2-n\,|u|}.$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite der Ungleichung ist aber das allgemeine Glied einer absolut konvergenten Reihe. Es ist somit gezeigt, daß von dem n ab, für welches $n > |u|$, die einzelnen Glieder unserer zu untersuchenden Reihe kleiner sind als die Glieder einer absolut konvergenten Reihe. Wenn aber von zwei Reihen, deren Glieder von einer bestimmten Stelle ab alle positiv sind, die erste konvergent ist und jedes Glied der zweiten Reihe kleiner ist als das entsprechende Glied der ersten Reihe (für alle Werte von n ab, die größer sind als eine bestimmte Zahl), so ist auch die zweite Reihe konvergent. Mithin konvergiert die Summe mit dem allgemeinen Gliede:

$$\varrho_n = \left|\frac{\lambda\,|u^2-u|}{(n+\Theta)\,(n+u\Theta)}\right|,$$

daher auch die Reihe:

$$lg\, u\,\Gamma(u) = \sum_1^\infty{}_n \left[u\, lg\left(1+\frac{1}{n}\right) - lg\left(1+\frac{u}{n}\right)\right].$$

Kehrt man nun wieder zur Relation:

$$lg\,\Gamma(u) = \lim_{n=\infty}\left[u\,lg\,(n) - lg\,(u) - lg\left(1+\frac{u}{1}\right) - \ldots - lg\left(1+\frac{u}{n}\right)\right]$$

zurück, so erhält man daraus durch Differentiation:

$$\psi(u) = \frac{d\,g\,\Gamma(u)}{du} = \lim_{n=\infty}\left[lg\,n - \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \ldots - \frac{1}{u+n}\right],$$

$$\chi(u) = \frac{d^2\,lg\,\Gamma(u)}{du^2} = \lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(u+n)^2}\right].$$

Im Anschlusse an die Funktion $\chi(u)$ nun, die nach einem bekannten Satze für alle reellen und komplexen Werte des u mit Ausnahme der Werte $u = 0, -1, -2, \ldots -n$, welche für $\chi(u)$ Pole sind, konvergiert, zeigt Hermite, daß alle Eigenschaften der Funktion $\Gamma(u)$ daraus folgen. Vorerst aber soll gezeigt werden, daß $\frac{1}{\Gamma(u)}$ in der ganzen Ebene holomorph ist. Multipliziert man $\chi(u)$ mit du und integriert man hernach zwischen den Grenzen 1 und u, so erhält man:

$$\psi(u) = \left[\frac{d\,lg\,\Gamma(u)}{du}\right]_1^u = \left(1-\frac{1}{u}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{u+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+n}\right) + \ldots.$$

Nun ist aber:

$$\left[\frac{d\,lg\,\Gamma(u)}{du}\right]_1^u = \psi(u) - \lim_{n=\infty}\left[lg\,n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n+1}\right] = \psi(u) + C,$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet. Es ist also:

$$\psi(u) = -C + \left(1-\frac{1}{u}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{u+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{u+n}\right) + \ldots,$$

welche Reihe ebenfalls, da:

$$\lim_{n=\infty}\left\{n\left[1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right]\right\} > 1,$$

wenn man $u_n = \frac{1}{(n+1)(u+|u|)}$ setzt, für alle reellen und komplexen u mit Ausnahme der Stellen $u = 0, -1, -2, \ldots$ konvergiert. Ersetzt man in der Gleichung:

$$\frac{d\,lg\,\Gamma(u)}{du} = -C + \left(1-\frac{1}{u}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{u+n-1}\right) + \ldots.$$

u durch $u+1$, so folgt:

$$\frac{d\,lg\,\Gamma(u+1)}{du} = -C + \left(1-\frac{1}{u+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{u+n}\right) + \ldots.$$

und durch beiderseitige Multiplikation mit du und nachfolgender Integration zwischen den Grenzen 1 und u:

$$lg\,\Gamma(u+1) = -Cu + [u - lg\,(1+u)] + \ldots + \left[\frac{u}{n} - lg\,(u+n)\right] + \ldots + \ldots + C - (1 - lg\,2) - \left(\frac{1}{2} - lg\,3\right) - \left[\frac{1}{n} - lg\,(1+n)\right],$$

$$lg\,\Gamma(u+1) = -Cu + [u - lg\,(1+u)] + \left[\frac{u}{2} - lg\left(1+\frac{u}{2}\right)\right] + \cdots$$
$$\cdots + \left[\frac{u}{n} - lg\left(1+\frac{u}{n}\right)\right] + \cdots\cdots$$

und da: $$\frac{1}{lg\,\Gamma(u+1)} = -lg\,\Gamma(u+1):$$

$$-\frac{1}{lg\,\Gamma(u+1)} = Cu + [lg\,(1+u) - u] + \cdots + \left[lg\left(1+\frac{u}{n}\right) - \frac{u}{n}\right] + \cdots$$

oder: $$\frac{1}{\Gamma(u+1)} = e^{Cu} \prod_{1}^{\infty}{}_{n} \left(1+\frac{u}{n}\right) e^{-\frac{u}{n}},$$

aus welcher Produktentwicklung nach Weierstraß hervorgeht, daß $\frac{1}{\Gamma(u+1)}$ eine in der ganzen Ebene reguläre Funktion ist. Dieselbe Relation läßt sich auch so schreiben:

$$lg\,\Gamma(u+1) = -Cu + \left[\frac{u}{1} - lg\left(1+\frac{u}{1}\right)\right] + \cdots$$
$$\cdots + \left[\frac{u}{n} - lg\left(1+\frac{u}{n}\right)\right] + \cdots\cdots,$$

so daß man die Entwicklung von $lg\,\Gamma(u+1)$ nach steigenden Potenzen von u erhält.

Wenn man voraussetzt: $|u| < n^2$ und unter:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots\cdots$$

versteht, erhält man nach der Formel von Maclaurin $lg\,\Gamma(u+1)$ in der Form:

$$lg\,\Gamma(u+1) = -Cu + \frac{s_2}{2}u - \frac{s_3}{2}u^3 + \frac{s_4}{4}u^5 - \cdots\cdots$$

Kehren wir nun wieder zur Funktion $\chi(u)$ zurück, so war dieselbe definiert durch:

$$\chi(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u+1)^2} + \cdots = \frac{d^2\,lg\,\Gamma(u)}{du^2} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(u+n)^2} \quad \text{und:}$$

$$\chi(u+1) = \sum_{o}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{(u+n+1)^2}.$$

Demnach ist: $$\chi(u+1) - \chi(u) = -\frac{1}{u^2}.$$

Ferner ist: $$\chi(1-u) = \sum_{o}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{(n+1-u)^2} \quad \text{und daher:}$$

$$\chi(1-u) + \chi(u) = \sum \frac{1}{(u+n)^2},$$

welche Summe sich über alle positiven und negativen Werte von n erstreckt, mit Einschluß des Wertes $n = o$. Die Summe selbst läßt sich nun mit Hilfe des Weierstraßschen Produktes und der Mittag-Lefflerschen Funktion durch $\left(\frac{\pi}{sin\,u\,\pi}\right)^2$ ersetzen und überdies läßt sich mit Hilfe der letzteren Funktion nachweisen, daß $\chi(1-u) + \chi(u)$ eine Funktion von u mit der Periode 1 ist. Das Weierstraßsche Produkt lautet:

$$G(u) = u^{\alpha} \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left\{ \left(1 - \frac{u}{a_\nu}\right) e^{Q_\nu\left(\frac{u}{a_\nu}\right)} \right\}^{d_\nu}$$

und hat nur die Stelle a_ν zur Nullstelle. Wollen wir nun die Weierstraßsche Funktion für die Stellen $\left\{ \begin{matrix} 0, 1, 2, \ldots \infty \\ -1, -2, \ldots -\infty \end{matrix} \right\}$ mit den Ordnungszahlen d_ν vom ersten Grade, so sind alle $Q_\nu\left(\frac{u}{a_\nu}\right) = \frac{u}{a_\nu}$ vom ersten Grade. Für diesen Fall lautet das Weierstraßsche Produkt:

$$s(u) = u \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left\{ \left(1 - \frac{u}{a_\nu}\right) e^{\frac{u}{a_\nu}} \right\},$$

wo die Anordnung der Stellen $a_1 = +1$, $a_2 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -2 \ldots$ so erfolgen muß, daß $|a_n| \leqq |a_{n+1}|$. Es geht somit $s(u)$ über in:

$$s(u) = u \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{u^2}{\nu^2}\right)$$

oder:

$$s(u) = u \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu}{}' \left(1 - \frac{u}{\nu}\right),$$

in welcher Gleichung der dem Zeichen Π beigesetzte Strich darauf hindeuten soll, daß der Wert $\nu = o$ wegzulassen ist. Daraus folgt:

$$lg\, s(u) = lg\, u + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' lg \left(1 - \frac{u}{\nu}\right)$$

und durch Differentiation:

$$\frac{s'(u)}{s(u)} = \frac{1}{u} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\frac{1}{\nu}}{1 - \frac{u}{\nu}} = \frac{1}{u} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{u - \nu}\right) = \lambda(u).$$

Aus seiner Zusammensetzung aus $s'(u)$ und $s(u)$ folgt für $\lambda(u)$, daß es eine ungerade Funktion ist, also:

$$\lambda(-u) = -\lambda(u) \quad \text{ist.}$$

Da: $$\lambda(u) = \frac{1}{u} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left[\frac{1}{u + \nu} + \frac{1}{u - \nu}\right],$$ so ist:

$$\lambda'(u) = -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(u + \nu)^2}$$

und es läßt sich zeigen, daß:

$$\lambda(u + 1) = \lambda(u) \quad \text{ist.}$$

Es sei:

$$\lambda_n(u) = \frac{1}{u - n} + \frac{1}{u - (n - 1)} + \ldots + \frac{1}{u - 1} + \frac{1}{u} + \frac{1}{u + 1} + \ldots + \frac{1}{u + n},$$

$$\lambda_n(u + 1) = \frac{1}{u - (n - 1)} + \frac{1}{u - (n - 2)} + \ldots + \frac{1}{u} + \frac{1}{u + 1} + \ldots + \frac{1}{u + n + 1},$$

so ist: $\lambda_n(u) - \lambda_n(u + 1) = \frac{1}{u - n} - \frac{1}{u + n + 1}$ und beim Übergang zur Grenze für $n = \infty$, folgt:

$$\lambda(u) - \lambda(u+1) = 0 \quad \text{oder:}$$
$$\lambda(u+1) = \lambda(u).$$

Daraus folgt unmittelbar weiter:

$$\lambda'(u+1) = \lambda'(u).$$

Da aber $\lambda'(u)$ die Periode 1 hat, so hat auch $\chi(1-u) + \chi(u) = = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u+n)^2}$ die Periode 1, also auch $\chi(u)$. Setzt man in:

$$\lambda(u+1) = \lambda(u)$$

für $u = -\frac{1}{2}$, so folgt: $\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda\left(-\frac{1}{2}\right) = -\lambda\left(\frac{1}{2}\right)$

oder: $$\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Da nun die Funktion $sin(\pi u)$ ganz dieselben Nullstellen besitzt wie $s(u)$, so läßt sich nach einem bekannten funktionentheoretischen Satze $sin(\pi u)$ in folgender Form darstellen:

$$sin(\pi u) = e^{g(u)} s(u)$$

und $$lg\, sin(\pi u) = g(u) + lg\, s(u),$$

aus welcher Gleichung sich durch zweimalige Differentiation die folgenden herleiten lassen:

$$\pi\, cotg(\pi u) = g'(u) + \frac{s'(u)}{s(u)} = g'(u) + \lambda(u),$$

$$-\frac{\pi^2}{sin^2(\pi u)} = g''(u) + \lambda'(u) = g''(u) - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{1}{(u+n)^2}.$$

Daß nun $g''(u)$ eine Konstante ist, läßt sich auf folgende Weise zeigen:

$$sin(\pi u) = \frac{\pi u}{1} - \frac{(\pi u)^3}{3!} + \ldots.$$

$$sin^2(\pi u) = u^2 \pi^2 \left[1 - \frac{u^2 \pi^2}{3!} + \ldots\right]^2 \quad \text{oder:}$$

$$\frac{\pi^2}{sin^2(\pi u)} = \frac{1}{u^2\left[1 - \frac{\pi^2 u^2}{3!} + \ldots\right]^2} = \frac{1}{u^2} P_1(u).$$

Da $P_1(o) = 1$ ist, so wird:

$$\frac{\pi^2}{sin^2(\pi u)} = \frac{1}{u^2} + Q(u),$$

und da ferner: $$\lambda'(u) = -\frac{1}{u^2} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_n \frac{1}{(u-n)^2}$$

ist, so können wir $P(u)$, da Σ' an der Stelle Null holomorph ist, in eine Potenzreihe entwickeln und erhalten:

$$\lambda'(u) = -\frac{1}{u^2} + P(u).$$

Es ist also, da: $-\frac{\pi^2}{sin^2(\pi u)} = g''(u) + \lambda'(u)$ ist;

$$-\frac{1}{u^2} - Q(u) = g''(u) - \frac{1}{u^2} + P(u),$$

$$g''(u) = -P(u) - Q(u),$$

das heißt, es läßt sich $g''(u)$ in eine Potenzreihe entwickeln, die in der ganzen Ebene im Endlichen und Unendlichen endlich ist, somit muß $g''(u)$ eine Konstante sein:

$$g''(u) = C.$$

Daraus folgt weiter:

$$g'(u) = Cu + C'.$$

Setzt man in der Gleichung:

$$\pi \, cotg\,(\pi u) = g'(u) + \lambda(u)$$

einmal $u = +u$, das zweitemal $u = -u$ und berücksichtigt man den eben gefundenen Wert von $g'(u)$, so erhält man:

$$\pi \, cotg\,(\pi u) = Cu + C' + \lambda(u),$$

$$-\pi \, cotg\,(\pi u) = -Cu + C' - \lambda(u)$$

und durch Addition: $\quad 2C' = o \; . \; . \; . \; . \; C' = o.$

Um C zu bestimmen, setzt man in:

$$\pi \, cotg\,(\pi u) = g'(u) + \lambda(u)$$

für $u = \frac{1}{2}$, so ist: $\quad o = \frac{C}{2} + \lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{C}{2},$

woraus $\quad C = o$

folgt. Infolge dessen ist: $\quad g(u) = C''$

und: $\quad sin\,(\pi u) = e^{C''} s(u) = C_1 s(u),$

woraus C_1 bestimmt wird, wenn man $u = \frac{1}{2}$ setzt und berücksichtigt, daß $s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$ ist. Es stellt sich auf diese Weise $C_1 = \pi$ heraus und

$$sin\,(\pi u) = \pi s(u) = \pi u \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(1 - \frac{u^2}{\nu^2}\right).$$

Differenziert man nun ferner die Gleichung:

$$\pi \, cotg\,(\pi u) = g'(u) + \lambda(u),$$

in welcher man, wie gezeigt, $g'(u) = o$ und $\lambda(u) = \frac{1}{u} + \sum_{1}^{\infty}{}_{n}\left(\frac{1}{u-n} + \frac{1}{u+n}\right)$ gesetzt hat, so nimmt sie die Gestalt an:

$$-\frac{\pi^2}{sin^2(\pi u)} = -\frac{1}{u^2} - \sum_{1}^{\infty}{}_{n}\left\{\frac{1}{(u-n)^2} + \frac{1}{(u+n)^2}\right\} \text{ oder:}$$

$$-\frac{\pi^2}{sin^2(\pi u)} = -\frac{1}{u^2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(u+n)^2} = -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n}\frac{1}{(u+n)^2}.$$

Es ist also: $\quad \frac{\pi^2}{sin^2(\pi u)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n}\frac{1}{(u+n)^2},$

also auch: $\quad \chi(1-u) + \chi(u) = \frac{\pi^2}{sin^2(\pi u)}.$

Zur Ableitung der dritten Eigenschaft der Funktion $\chi(u)$ verfährt man endlich so:

Bezeichnet man $S = \chi(u) + \chi\left(u + \frac{1}{n}\right) + \ldots\ldots + \chi\left(u + \frac{n-1}{n}\right)$,

so kann man dafür schreiben:

$$S = \sum_{k=o}^{n-1} \chi\left(u + \frac{k}{n}\right) \quad \text{oder noch besser:}$$

$$S = \sum \frac{1}{\left(u + \frac{k}{n} + \nu\right)^2} = \sum \frac{n^2}{(n\,u + k + \nu\,n)^2}$$

wo k von o bis $n-1$ und ν die ganzen Zahlen von o bis ∞ durchläuft.

Es nimmt unter diesen Umständen $k + \nu\,n$ jeden beliebigen ganzzahligen Wert und zwar jeden nur einmal an und es empfiehlt sich daher einen neuen laufenden Buchstaben μ einzuführen für $k + \nu\,n$, wo μ alle ganzzahligen Werte der Reihe nach annimmt von o bis ∞, so daß:

$$S = \sum_{\mu=o}^{\infty} \frac{n^2}{(n\,u + \mu)^2} = n^2\,\chi(n\,u).$$

Man hat auf diese Weise die dritte Eigenschaft von $\chi(u)$ gefunden:

$$\chi(u) + \chi\left(u + \frac{1}{n}\right) + \ldots + \chi\left(u + \frac{n-1}{n}\right) = n^2\,\chi(n\,u).$$

Zur Untersuchung der Funktion $\Gamma(u)$ nun auf ihre, den Eigenschaften der Funktion $\chi(u)$ korrespondierenden ziehen wir zunächst die Gleichung heran:

$$\chi(u+1) - \chi(u) = -\frac{1}{u^2}.$$

Daraus ergibt sich durch zweimalige Integration nach u:

$$lg\,\Gamma(u+1) - lg\,\Gamma(u) = lg\,u + C\,u + C',$$

$$lg\,\frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u)} = C\,u + C' + lg\,u$$

und da für jedes ganzzahlige u die Gleichung besteht:

$$\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u),$$

so verschwinden die Integrationskonstanten C und C' und man erhält für jeden beliebigen Wert von u die Relation:

$$\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.)}$$

Integriert man ferner die Gleichung:

$$\chi(u) + \chi(1-u) = \frac{\pi^2}{sin^2(\pi\,u)}$$

zweimal nach u, so folgt daraus die Gleichung:

$$lg\,\Gamma(u) + lg\,\Gamma(1-u) = lg\left(\frac{\pi}{sin\,u\,\pi}\right) + C\,u + C'$$

oder:

$$\Gamma(u)\,\Gamma(1-u) = \frac{\pi}{sin\,u\,\pi}\,e^{C\,u + C'}.$$

Zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten C und C' multipliziert man die letzte Gleichung mit u und verbindet sie dann mit der Relation I.)

$$\Gamma(u+1)\,\Gamma(1-u) = \frac{u\,\pi}{sin\,(u\,\pi)}\,e^{C\,u + C'}.$$

Da aber $\Gamma(1+u)\Gamma(1-u)$ ebenso wie $\frac{u\pi}{sin\,(u\pi)}$ eine gerade Funktion von u ist, so muß auch $e^{Cu+C'}$ eine ganze Funktion von u sein, welche Bedingung nur durch den Wert $C=o$ erfüllt ist. Da nun ferner für $u=o$:

$$\Gamma(u+1)\Gamma(1-u)=1$$

und auch $\frac{u\pi}{sin\,(\pi u)}=1$ wird, so muß $e^{C'}=1$, also auch $C'=o$ sein.

Es drückt sich also die zweite Eigenschaft der $\Gamma(u)$ in der Form aus:

$$\Gamma(u)\Gamma(1-u)=\frac{\pi}{sin\,(\pi u)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.)}$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{\Gamma(1-u)}=\frac{\Gamma(u)\,sin\,(\pi u)}{\pi}.$$

Nach Prym ist aber $\Gamma(u)=P(u)+Q(u)$, wo $Q(u)$ in der ganzen Ebene, $P(u)$ nur mit Ausnahme der Stellen $u=0,-1,-2,\ldots$ holomorph ist. Dadurch aber, daß $P(u)$ mit $\frac{sin\,(\pi u)}{\pi}$ multipliziert wird, ergibt sich ferner, daß dieses Produkt keinen Pol mehr besitzt und wie auch Bourguet bemerkt, $\frac{1}{\Gamma(1-u)}$ eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion darstellt.

Setzt man weiter:

$$N=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

$$N=\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

so folgt durch Multiplikation beider Gleichungen:

$$N^2=\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\ldots\left[\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

und mit Benützung der Formel II.):

$$N^2=\frac{\pi^{n-1}}{sin\,\frac{\pi}{n}\ldots\ldots sin\,\frac{(n-1)\pi}{n}}=\frac{\pi^{n-1}.2^{n-1}}{n},$$

$$N=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.n^{-\frac{1}{2}}.$$

Um nun endlich die dritte Eigenschaft der Funktion $\Gamma(u)$ abzuleiten, bedient man sich der Gleichung:

$$\sum_{o}^{n-1}{}^{k}\,\chi\left(u+\frac{k}{n}\right)=n^2\,\chi(n\,u),$$

aus welcher durch zweimalige Integration nach u folgt:

$$\sum_{k=o}^{n-1}lg\,\Gamma\left(u+\frac{k}{n}\right)=lg\,\Gamma(n\,u)+Cu+C' \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha)$$

Setzt man in der Gleichung behufs Bestimmung von C':

$$\sum_{k=1}^{n-1}lg\,\Gamma\left(u+\frac{k}{n}\right)=lg\,\frac{\Gamma(n\,u)}{\Gamma(u)}+Cu+C'$$

$u=o$, so erhält man:

$$\sum_{1}^{n-1}{}^{k}\, lg\, \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = lg\, N = lg\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-\frac{1}{2}}\right]$$

und dafür $u = o$: $\quad \dfrac{\Gamma(n\,u)}{\Gamma(u)} = \dfrac{1}{n}$ ist, so folgt:

$$C' = lg\, n + lg\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-\frac{1}{2}}\right] = lg\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}\right].$$

Zur Berechnung von C setzt man für $u : u + 1$ in der Gleichung α), so daß:

$$\sum lg\, \Gamma\left(u + 1 + \frac{k}{n}\right) = lg\, \Gamma(n\,u + n) + C(u + 1) + C',$$

$$\sum\left[lg\, \Gamma\left(u + \frac{k}{n} + 1\right) - lg\, \Gamma\left(u + \frac{k}{n}\right)\right] = lg\, \Gamma(n\,u + n) - $$
$$- lg\, \Gamma(n\,u) + C.$$

Nun ist aber:

$$\Gamma\left(u + \frac{k}{n} + 1\right) = \left(u + \frac{k}{n}\right)\Gamma\left(u + \frac{k}{n}\right),$$

$$lg\, \Gamma\left(u + \frac{k}{n} + 1\right) - lg\, \Gamma\left(u + \frac{k}{n}\right) = lg\left(u + \frac{k}{n}\right),$$

ferner ist:

$$\Gamma(u\,n + n) = u\,n\,(u\,n + 1) \ldots . (u\,n + n - 1)\,\Gamma(u\,n),$$

$$lg\, \Gamma(u\,n + n) = lg\, \Gamma(u\,n) = lg\,[u\,n\,(u\,n + 1) \ldots (u\,n + n - 1)].$$

Es bestimmt sich also C aus der Bedingungsgleichung:

$$\sum_{k=o}^{n-1} lg\left(u + \frac{k}{n}\right) = lg\,[u\,n\,(u\,n + 1) \ldots . (u\,n + n - 1)] + C,$$

woraus folgt: $\quad C = -n\, lg\, n;$

setzt man nun für C und C' in der Gleichung α) ihre eben gefundenen Werte, so ergibt sich die Relation:

$$\sum_{o}^{n-1}{}^{k}\, lg\, \Gamma\left(u + \frac{k}{n}\right) = lg\, \Gamma(n\,u) - u\,n\, lg\, n + lg\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}\right]$$

und daraus folgt die dritte Eigenschaft der Funktion $\Gamma(u)$ durch den Übergang vom Logarithmus zur Zahl:

$$\Gamma(u)\,\Gamma\left(u + \frac{1}{n}\right) \ldots . \Gamma\left(u + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2} - u\,n}\, \Gamma(n\,u).$$

Dr. Georg Burggraf,

k. k. Professor.