Spar-Einlagen bei gegenseitiger Beerbung.

Setzen wir jetzt den Fall, der Einleger habe keine Erben oder brauche auf solche keine Rücksicht zu nehmen, dann könnte er im Erlebensfalle einen größeren Ertrag am Rückzahlungstermin erzielen, wenn er einer Gesellschaft beiträte, die unter gleichaltrigen Personen, einerseits um zu sparen, anderseits zwecks gegenseitiger Beerbung innerhalb einer abgegrenzten Zeit gebildet wird.

Nehmen wir an, es träten 200 Personen im Alter von 45 Jahren zu einer derartigen Gesellschaft zusammen, und jede legte 1000 ℳ ein. Dann würden die Einlagen im ganzen 200000 ℳ betragen. Diese würden dann 15 Jahre hindurch verzinst und ebenso auch ihre Erträge. Nach Abzug der Verwaltungskosten mag sich die Summe am Schlusse dieser Zeit auf rund 335000 ℳ belaufen, ein Resultat, das einer Nettoverzinsung von nahezu $3^1/_2$ % entspricht. Die genannte Summe wird unter die Überlebenden verteilt, wobei, falls deren noch 148 vorhanden sind, auf jeden einzelnen 2263,51 ℳ entfallen, Dieser Betrag setzt sich zusammen aus 1000 ℳ zurückgezahlter Einlage, 675,55 ℳ Zinseszinsen und 588,16 ℳ Anteil an dem seitens der Verstorbenen an die Überlebenden vererbten Kapital. Für die Überlebenden hat sich diesmal das Erträgnis gegenüber dem Ergebnis der einfachen Spar-Einlage nahezu verdoppelt.

Kapitalversicherung auf den Erlebensfall.

Die vorher geschilderte Einrichtung besitzt den großen Übelstand, daß sich dazu eine genügende Zahl gleichaltriger Personen schwerlich zusammenfindet. Sie wird deshalb auch nicht in dieser, sondern in folgender etwas anderen Form durchgeführt. Ein Unternehmer tritt auf, der, um bei obigem Beispiel zu bleiben, auf Grund gemachter Erfahrungen an 45jährige Personen das Anerbieten richtet, gegen Einlagen von 1000 ℳ nach 15 Jahren jedem Überlebenden 2263,51 ℳ zurückzuzahlen, während die Einlage derer, die vorher sterben, ihm ohne weiteres zufallen soll.

Ein derartiger Vertrag muß selbstverständlich mit möglichst vielen Personen abgeschlossen werden. An denjenigen, die vor Erreichung des

Zieles sterben, wird der Unternehmer gewinnen, an den Überlebenden wird er verlieren. Gewinn und Verlust werden sich aber ausgleichen, wenn die Zahl der Beteiligten so groß ist, daß das Absterben in der Weise stattfindet, wie es die Erfahrung erwarten läßt. Die Spekulation des Unternehmers ist auch nicht darauf gerichtet, daß von den Beteiligten eine größere als die erfahrungsmäßige Anzahl stirbt, sondern auf einen Zinsüberschuß aus den von den Beteiligten ihm übergebenen Einlagen. In dem Beispiel ist eine Verzinsung zu $3^1/_2$ % vorausgesetzt. Kann der Unternehmer einen höheren Ertrag erzielen, so ist der Überschuß sein Gewinn. Die gewerbsmäßige Spekulation auf diesen Überschuß macht den betreffenden Gewerbebetrieb zu einem Handelsgewerbe, (Vergl. H. G. B § 1. 3.) Der Unternehmer heißt Versicherer und das hier vorliegende Geschäft selbst „Kapitalversicherung auf den Erlebensfall".

Selbstverständlich werden solche Kapitalversicherungen nicht blos mit 45jährigen Personen, sondern auch mit Personen jeden andern beliebigen Anfangsalters und auf beliebig lange Zeit abgeschlossen. Da nun bei den Berechnungen die Überlebensverhältnisse (Lebenswahrscheinlichkeiten) eine große Rolle spielen, so bedarf man zu ihrer Feststellung einer Sterblichkeitstafel, aus welcher ersichtlich ist, wie viele gewöhnlich von 100 000 Neugeborenen in jeder Altersstufe noch am Leben sind. Solcher Sterblichkeitstafeln gibt es mehrere. Besonders häufig benutzt werden die Tafeln der 17 englischen Gesellschaften, die Tafeln der 20 englischen Gesellschaften und die deutschen Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Gesellschaften.

In der mir gerade vorliegenden Sterblichkeitstafel finde ich beispielsweise, daß von den 100 000 Neugeborenen im Alter von 45 Jahren noch 57 179, im Alter von 60 Jahren noch 42 280 Überlebende vorhanden sind.

Hat nun eine 45jährige Person an den Unternehmer, (d. i. an eine Rentenanstalt) eine Einlage von 1000 ℳ gemacht und soll unter Anrechnung von $3^1/_2$ % Zinseszinsen ermittelt werden, welche Rückzahlung ihr bei Vollendung des 60ten Lebensjahres geleistet werden kann, so gestaltet sich die Berechnung geradeso, wie im vorigen Abschnitt. Man denkt sich den Vertrag abgeschlossen mit jeder der 57 179 Personen, die nach der Sterblichkeitstafel ein Alter von 45 Jahren erreicht haben. Ihre

Einlagen zu je 1000 ℳ ergeben eine Summe von 57 179 000 ℳ. Diese laufen bis zum 60ten Lebensjahre der Personen, also in 15 Jahren durch die Zinseszinsen auf $57\,179\,000 \cdot 1{,}035^{15}$ ℳ an. Dieses angewachsene Kapital wird nun unter die überlebenden 42280 Personen, die dann ein Alter von 60 Jahren haben, verteilt. Demnach ergibt sich als Anteil jedes Versicherten d. i. als versichertes Kapital unter Benutzung einer Zinseszinstabelle für $1{,}035^{15}$

$$K = \frac{1000 \times 57\,179 \times 1{,}035^{15}}{42\,280} = \frac{57\,179\,000 \times 1{,}675\,348\,83}{42\,280} = \underline{2\,265{,}73 \text{ ℳ}}$$

Dieses Ergebnis weicht von dem im vorigen Abschnitt ermittelten nur wenig ab.

Formel für die Kapitalversicherung auf den Erlebensfall.

Bezeichnet man das beim Alter von 60 Jahren fällige Kapital mit K_{60} und die beim Alter von 45 Jahren zu leistende Einlage mit E_{45}, ferner die Zahl der Lebenden im Alter von 45 Jahren mit L_{45} und entsprechend die im Alter von 60 Jahren Lebenden mit L_{60}, endlich den Zinsfaktor $\frac{100 + p}{100}$ mit π, so erhält man aus obiger Gleichung folgende Formel:

$$K_{60} = \frac{E_{45} \cdot L_{45} \cdot \pi^{15}}{L_{60}}$$

Die Formel paßt direkt auf eine Aufgabe, bei welcher die Einlage gegeben ist, das Versicherungskapital gesucht wird. Gewöhnlich ist aber umgekehrt das Versicherungskapital in runder Summe gegeben und die Einlage wird gesucht. Hierfür lautet die Formel:

$$E_{45} = \frac{K_{60}}{\pi^{15}} \cdot \frac{L_{60}}{L_{45}}$$

Aus dieser Formel geht folgendes hervor: Um die Einlage eines 45jährigen zu finden für ein Kapital K, das er im Erlebensfalle beim Alter von 60 Jahren ausbezahlt erhalten will, hat man das versicherte Kapital um 15 Jahren zu diskontieren und außerdem mit einem Bruche zu multiplizieren, der im Zähler die Zahl der 60jährigen, im Nenner die Zahl der 45jährigen enthält und die Wahrscheinlichkeit darstellt, daß

ein 45jähriger das Alter von 60 Jahren erreicht. Der Nenner eines solchen Bruches besteht aus der Zahl der überhaupt in Betracht kommenden Fälle, der Zähler dagegen aus der Zahl der unter ihnen zur Erreichung des Zweckes günstigen Fälle.

Nimmt man das versicherte Kapital $K_{60} = 100$ an und setzt auch für die übrigen Symbole die Zahlenwerte ein, so ergibt sich:

$$E_{45} = \frac{100}{1{,}035^{15}} \times \frac{42\,280}{57\,179} = 100\ II^{15}_{3^1/_2} \times \frac{42\,280}{57\,179} = 44{,}136.$$

Das Beispiel ist der Stuttgarter Allg. Rentenanstalt für Kapitalversicherung entnommen. Der Tarif F^{Ib} weist das gleiche Resultat 44,14 auf.

Eine wesentliche Verbesserung der oben gewonnenen Formel läßt sich dadurch erzielen, daß man die rechte Seite mit π^{45} erweitert und dann anders gruppiert:

$$E_{45} = \frac{K_{60} \cdot L_{60} \cdot \pi^{45}}{\pi^{15} \cdot L_{45} \cdot \pi^{45}} = K_{60} \times \frac{L_{60} \cdot \pi^{45}}{\pi^{60} \cdot L_{45}} = K_{60} \cdot \frac{\frac{L_{60}}{\pi^{60}}}{\frac{L_{45}}{\pi^{45}}}$$

Die Brüche $\frac{L_{60}}{\pi^{60}}$ und $\frac{L_{45}}{\pi^{45}}$ haben die Eigentümlichkeit, daß bei jedem der Index im Zähler mit dem Potenzexponenten im Nenner übereinstimmt. Es sind gleichsam die Zahlen der in den einzelnen Altersstufen noch Lebenden auf das nullte Jahr (d. i. die Zeit der Geburt) diskontiert. Man nennt sie deshalb die diskontierten Zahlen der Lebenden und bezeichnet sie demgemäß mit D_{60} und D_{45} und setzt allgemein $\frac{L_n}{\pi^n} = Dn$

Unter Anwendung dieser D-Werte erhält die Formel folgende einfache Gestalt:

$$E_{45} = K_{60} \frac{D_{60}}{D_{45}}.$$

Hieraus ergibt sich die Regel:

Um bei der Kapitalversicherung auf den Erlebensfall die Einlage zu ermitteln, hat man das versicherte Kapital zu multiplizieren mit dem D-Wert für das Alter des Versicherten zu der Zeit, wann das Kapital an ihn im Erlebensfall ausgezahlt werden soll, hierauf zu dividieren mit dem D-Wert für das Alter des Versicherten, bei dem er seine Gegenleistung zu machen hat.

Bezeichnet man mit **a** das Alter des Versicherten zur Zeit der **Auszahlung** des versicherten Kapitals, ferner mit α sein Alter zur Zeit, da er die Gegenleistung macht, dann erhält die Formel folgende ganz allgemeine Gestalt:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{K}_a \cdot \frac{D_a}{D_\alpha}.$$

Für die Benutzung der Formel ist es zweckmäßig, die D-Werte im voraus für sämtliche Altersstufen zu berechnen. Um Logarithmen zu ververmeiden, kann man sich dabei wieder der Diskontierungsfaktoren bedienen.

Beispielsweise ist

$$D_{45} = \frac{L_{45}}{\pi^{45}} = L_{45} \cdot \Pi^{45}_{3^1/_2} = 57\,179 \times 0{,}212\,659 = 12\,159{,}643 \text{ und}$$

$$D_{60} = \frac{L_{60}}{\pi^{60}} = L_{60}\ \Pi^{60}_{3^1/_2} = 42\,280 \times 0{,}12693431 = 5\,366{,}783.$$

Setzt man die D-Werte in die Formel ein, so erhält man für ein Kapital von 1000 ℳ, zahlbar beim vollendeten 60ten Lebensjahr des Versicherten, als Einlage des 45 jährigen:

$$\mathfrak{E}_{45} = 100 \times \frac{5\,366{,}783}{12\,159{,}643} = 44{,}136.$$

Auch die in allen Formeln vorkommende lästige Division kann stets durch eine bequemere Multiplikation ersetzt werden, wenn man zu sämtlichen D-Werten ihre **umgekehrten** (reciproken) Werte ermittelt. Im weiteren seien diese durch den Buchstaben U bezeichnet. Beispielsweise ist

$$U_{45} = \frac{1}{D_{45}} = \frac{\pi^{45}}{L_{45}} = \frac{I^{45}_{3^1/_2}}{57179} = 0{,}00008224.$$

Die allgemeine Formel ist dann zu schreiben:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{K}_a \cdot D_a \cdot U_\alpha$$

Hier bedeutet $\mathfrak{E}_\alpha$ die Summe, welche der Versicherte im Alter von α Jahren zu zahlen hat und $\mathfrak{K}_a$ die Summe, welche er im Alter von a Jahren von der Gesellschaft erhalten würde. Letztere braucht man also nur mit $\frac{D_a}{D_\alpha} = D_a\ U_\alpha$ zu multiplizieren, um die erstere zu bestimmen.

Tarifwert.

Nimmt man als versichertes Kapital die Einheit an, so erhält man als Einlage den Tarifwert. Man kann ihn bezeichnen K^a_α. Es ist

die Gegenleistung (Einlage) des Versicherten beim Alter von α Jahren für ein auf den Erlebensfall versichertes Kapital von 1 ℳ, die seitens der Bank beim Alter des Versicherten von a Jahren gezahlt werden muß. Mithin ist $K_\alpha^a = \frac{D_a}{D_\alpha} = D_a \cdot U_\alpha$.

Mit Benutzung des Tarifwertes läßt sich die allgemeine Formel nun auch schreiben:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{K}_a \cdot K_\alpha^a.$$

In den Tarifen selbst pflegt man die Einlage für 100 ℳ anzugeben; sie entspricht demnach dem Ausdruck $100\ K_\alpha^a$. Auch der Tarifwert $K_\alpha^a = \frac{D_a}{D_\alpha} = D_a\ U_\alpha$ wird zweckmäßig für viele Fälle ausgerechnet und zwar nicht nur für diejenigen, bei welchen α gegenüber a das frühere Alter bedeutet, sondern in Rücksicht auf das folgende auch da, wo das umgekehrte stattfindet.

Aufg. Das Kapital einer Sparkassentontine, die vor 10 Jahren durch gleiche Einlagen der Mitglieder gebildet worden ist, beträgt zur Zeit der Ausschüttung s ℳ und ist unter 3 überlebende Mitglieder zu verteilen. Wie groß ist jeder Anteil, wenn das Alter der betreffenden Personen zur Zeit der Bildung bezw. α, β, γ betrug? Setzen wir $\alpha + 10 = a$, $\beta + 10 = b$ und $\gamma + 10 = c$, und nennen wir die Anteile der 3 Personen A_a, A_b, A_c so ist zunächst $A_a + A_b + A_c = s$.

Ferner besteht zwischen der Einlage $\mathfrak{E}$ und dem Anteil A die Beziehung $\mathfrak{E}_\alpha = A_a\ K_\alpha^a$. Weil die Einlagen der Personen in unserm Falle gleich sind, so ist also $\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{E}_\beta = \mathfrak{E}_\gamma$ und demnach auch

$$A_a\ K_\alpha^a = A_b\ K_\beta^b = A_c\ K_\gamma^c.$$

Hieraus folgt: $A_b = \frac{A_a\ K_\alpha^a}{K_\beta^b}$ und $A_c = \frac{A_a\ K_\alpha^a}{K_\gamma^c}$.

Setzt man diese Werte von A_b und A_c in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$A_a \left(1 + \frac{K_\alpha^a}{K_\beta^b} + \frac{K_\alpha^a}{K_\gamma^c}\right) = s \text{ oder}$$

$$A_a \frac{K_\beta^b \cdot K_\gamma^c + K_\gamma^c \cdot K_\alpha^a + K_\alpha^a K_\beta^b}{K_\beta^b \cdot K_\gamma^c} = s.$$

Hiermit ergibt sich

$$A_a = s \cdot \frac{K_\beta^b \cdot K_\gamma^c}{K_\beta^b \cdot K_\gamma^c + K_\gamma^c \cdot K_\alpha^a + K_\alpha^a \cdot K_\beta^b}$$

Die Werte für A_b und A_c haben ähnliche Form.

Kapitalversicherung auf den Erlebensfall mit Nachleistung des Versicherten.

Die bisherigen Erörterungen bezogen sich nur auf die gewöhnlichen Fälle, bei denen der Versicherte die Einlage als Vorleistung macht, während seitens der Bank die Auszahlung der Versicherungssumme an den noch Lebenden später erfolgt. Denkbar indessen ist auch der Fall, daß die Bank gleich bei Vertragsabschluß das Kapital an den Versicherten auszahlt und sich von ihm die Gegenleistung im Erlebensfalle erst später, mithin als eine Nachleistung, machen läßt. Als selbständige Versicherungsform kommt dies nicht vor, findet aber Anwendung bei Ermittelung von Bankreserven.

Aufg. Eine 45jährige Person erhält von einer Bank das Kapital $\mathfrak{K}_{45}$ ausbezahlt, braucht aber die Gegenleistung im Erlebensfall erst beim Alter von 60 Jahren zu machen. Wie groß muß diese Gegenleistung $\mathfrak{E}_{60}$ sein?

Nehmen wir wieder an, der Vertrag werde nach der Sterblichkeitstafel mit sämtlichen 45jährigen Personen abgeschlossen, so hätte die Bank sofort zu zahlen: $\mathfrak{K}_{45} \cdot L_{45}$ ℳ. Diese Summe müßten die Versicherten der Bank 15 Jahre lang etwa zu 4 % verzinsen. Bei Berechnung von Zinseszinsen würde sie anwachsen auf $\mathfrak{K}_{45} \cdot L_{45} \cdot \pi^{15}$ und wäre von L_{60} Überlebenden aufzubringen. Auf jeden Einzelnen käme also

$$\mathfrak{E}_{60} = \frac{\mathfrak{K}_{45} \cdot L_{45} \cdot \pi^{15}}{L_{60}}$$

Erweitert man die rechte Seite der Gleichung mit π^{45} so ergibt sich:

$$\mathfrak{E}_{60} = \frac{\mathfrak{K}_{45} \cdot L_{45} \cdot \pi^{60}}{L_{60} \cdot \pi^{45}} = \mathfrak{K}_{45} \frac{\frac{L_{45}}{\pi^{45}}}{\frac{L_{60}}{\pi^{60}}} = \mathfrak{K}_{45} \frac{D_{45}}{D_{60}}.$$

Bezeichnet man wieder das Alter des Versicherten, bei welchem die Bank ihre Auszahlung macht, mit a und das Alter, bei welchem die Gegenleistung des Versicherten erfolgt mit α, dann lautet die Formel allgemein

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{K}_a \frac{D_a}{D_\alpha} = \mathfrak{K}_a \, D_a \, U_\alpha = \mathfrak{K}_a \, K_\alpha^a$$

Diese Formel für die Nachleistung des Versicherten unterscheidet sich gar nicht von der früher gefundenen für die Vorleistung. In beiden Fällen ist das versicherte Kapital zu multiplizieren mit dem D-Werte für das Alter des Versicherten, bei welchem die Auszahlung des Kapitals durch die Bank erfolgt und hierauf zu dividieren mit dem D-Wert für das Alter, bei welchem der Versicherte selbst seine Gegenleistung macht. Statt der Division kann auch eine Multiplikation mit dem reciproken Werte stattfinden, oder es kann der Tarifwert benutzt werden.

Versichertes Kapital.

Ist die Einlage gegeben und die Größe des Kapitals zu suchen, so muß man die Grundformel $\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{K}_a \frac{D_a}{D_\alpha}$ nach $\mathfrak{K}_a$ hin auflösen.

Es ist $\mathfrak{K}_a = \mathfrak{E}_\alpha \cdot \frac{D_\alpha}{D_a} = \mathfrak{E}_\alpha \cdot D_\alpha \cdot U_a = \mathfrak{E}_\alpha K_a^\alpha$.

Nun ist $\mathfrak{K}_a$ ein beim Alter a des Versicherten fälliges Kapital; dasselbe muß auch $\mathfrak{E}_\alpha \frac{D_\alpha}{D_a}$ oder $\mathfrak{E}_\alpha K_a^\alpha$ sein. $\mathfrak{E}_\alpha$ allein ist aber beim Alter α fällig, folglich wird durch Multiplikation $K_a^\alpha = \frac{D_\alpha}{D_a} = D_\alpha U_a$ ein beim Alter α fälliges in ein beim Alter a fälliges umgerechnet. Ist α das frühere und a das höhere Alter, dann ist $K_a^\alpha = \frac{D_\alpha}{D_a}$ ein Diskontierungsfaktor und der reciproke Wert K_α^a ein Prolongationsfaktor, der die Lebenswahrscheinlichkeit des Versicherten berücksichtigt.

Beispiel. Eine 45jährige Person macht eine Einlage von 1000 ℳ; auf welches Kapital hat sie im Erlebensfall nach 15 Jahren, also bei Vollendung ihres 60ten Lebensjahres, Anspruch?

$$\mathfrak{K}_{60} = \mathfrak{E}_{45}\, K_{60}^{45} = \mathfrak{E}_{45} \cdot D_{45} \cdot U_{60} \cdot 1000 \cdot 12159{,}643 \cdot 0{,}00018633 = \underline{2265{,}71\ ℳ.}$$

Bankreserve.

(Prämienreserve, Deckungskapital.)

Durch Entgegennahme der Einlage, die ein Versicherter bei der Bank gemacht hat, wird letztere zur Schuldnerin des ersteren. Bei der Jahresbilanz muß sie dieses Verhältnis dadurch zum Ausdruck bringen, daß sie den Versicherten in die Reihe der Gläubiger einsetzt. Der Geldbetrag, mit dem dies zu geschehen hat, heißt Bankreserve, Prämienreserve oder auch Deckungskapital. Er bildet auch die Grundlage zur Ausmessung der Summe, zu welcher der Versicherungsschein (Police) seitens der Bank beliehen oder gänzlich zurückgekauft werden kann. Die Höhe des Deckungskapitales wechselt von Jahr zu Jahr. Die Berechnung kann auf mehrfache Weise erfolgen.

Aufgabe. Eine 45jährige Person hat bei einer Rentenbank den Betrag von 100 ℳ versichert, zahlbar bei Vollendung ihres 50ten Lebensjahres. Welches Deckungskapital hat die Bank für diese Versicherung von Jahr zu Jahr in Reserve zu stellen?

a) Ermittelung durch tilgungsplanmäßige Aufstellung.

Zur Ermittelung der bezüglichen Beträge geht man auch von der Annahme aus, daß die gleiche Versicherung mit sämtlichen 57 179 Personen, die nach der Sterbetafel das 45te Lebensjahr erreicht haben, abgeschlossen sei. Ihre Gesamteinlage müßte sich auf genau 4 453 953,86 ℳ belaufen und würde jedes Jahr um die Zinsen zu $3\frac{1}{2}\%$ zunehmen. Um bei jeder Altersstufe das Deckungskapital für den einzelnen Versicherten zu finden, muß man das jeweiliche Gesamtkapital durch die diesbezügliche Zahl der Überlebenden dividieren.

Die Berechnung gestaltet sich wie folgt:

Alter x	Gesamtreserve G_x	Zahl der Überlebenden L_x	Bankreserve pro Person B_x
45	ℳ 4 453 953,56 + 3½% 155 888,38	57 179	ℳ 77,89
46	4 609 842,24 " 161 344,48	56 361	81,79
47	4 771 186,72 " 166 991,53	55 526	85,93
48	4 938 178,25 " 172 836,24	54 672	90,32
49	5 111 014,49 " 178 885,51	53 797	95,01
50	5 289 900,—	52 899	100,—

b) Ermittelung aus der Bankreserve des vorhergehenden Jahres.

Aufgabe. Die Bankreserve beim Alter von 47 Jahren (B_{47}) beläuft sich auf ℳ 85,93. Wie hoch stellt sich hiernach die Bankreserve beim Alter von 48 Jahren (B_{48})?

Bei der tilgungsplanmäßigen Aufstellung ist B_{48} aus der Gesamtreserve des vorausgegangenen Jahres in der Weise entstanden, daß diese um die Zinsen auf 1 Jahr vermehrt und hierauf die erhaltene Summe durch die Zahl der überlebenden 48jährigen dividiert worden ist. Nun ist die Gesamtreserve der 47jährigen gleich dem Produkt $L_{47} \cdot B_{47}$. Die Zunahme um 3½% Zinsen auf 1 Jahr wird bewirkt durch Multiplikation mit dem Zinsfaktor $\pi = 1{,}035$. Darauf folgt noch die Division mit L_{48}. Mithin ist

$$B_{48} = \frac{B_{47} \cdot L_{47} \cdot \pi}{L_{48}}$$

Nach Erweiterung des Bruches mit π^{47} ergibt sich:

$$B_{48} = B_{47} \frac{L_{47}}{\pi^{47}} \cdot \frac{\pi^{48}}{L_{48}} = B_{47} \frac{\frac{L_{47}}{\pi^{47}}}{\frac{L_{48}}{\pi^{48}}} = B_{47} \frac{D_{47}}{D_{48}}$$

oder auch $\mathfrak{B}_{48} = \mathfrak{B}_{47} \cdot D_{47}\ U_{48} = \mathfrak{B}_{47}\ K_{48}^{47}$,
d. h. man erhält die Bankreserve für einen 48 jährigen aus der Bankreserve für einen 47 jährigen, indem man diese unter Berücksichtigung der Lebenswahrscheinkeit um 1 Jahr prolongiert. Umgekehrt erhält man die Bankreserve für einen 47 jährigen aus der eines 48 jährigen, indem man letztere unter Berücksichtigung der Lebenswahrscheinlichkeit um 1 Jahr diskontiert. Durch wiederholte Anwendung dieser Verfahren kann man jede spätere Bankreserve aus irgend einer früheren und umgekehrt jede frühere aus irgend einer späteren berechnen. Dabei läßt sich aber eine n malige Prolongation auf 1 Jahr durch eine einmalige Prolongation auf n Jahre ersetzen, da ein Produkt von der Form

$$\frac{D_a}{D_{a+1}} \cdot \frac{D_{a+1}}{D_{a+2}} \cdot \frac{\quad}{\quad} \cdot \frac{\quad}{\quad} \cdot \frac{D_{a+n-1}}{D_{a+n}}$$ durch Kürzen

die einfache Form $\frac{D_a}{D_{a+n}}$ annimmt.

Das Gleiche gilt für das Diskontieren.

Hiernach erhält man

c) das Deckungskapital für ein beliebiges Jahr aus der ursprünglichen Einlage,

indem man diese auf das betreffende Jahr prolongiert.

Z. B. $\mathfrak{B}_{48} = \mathfrak{B}_{45}\ D_{45}\ U_{48} = 77{,}89 \,.\, 12\,159{,}643 \,.\, 0{,}00009536 = \mathbf{90{,}32}$

und endlich

d) die Bankreserve für ein beliebiges Jahr aus dem versicherten Kapital,

indem man dieses auf das betreffende Jahr diskontiert, selbstverständlich unter Berücksichtigung der Lebenswahrscheinlichkeit. Z. B.

$$\mathfrak{B}_{48} = \mathfrak{B}_{50}\ K_{48}^{50} = K_{50} \cdot D_{50} \cdot U_{48} \text{ also}$$

$$\mathfrak{B}_{48} = 100 \cdot 0{,}00009536 \cdot 9\,471{,}744 = \mathbf{90{,}32}.$$