Leibrenten.

Bei der Kapitalversicherung auf den Erlebensfall erhält der Versicherte, wenn er einen festgesetzten Zeitpunkt erlebt, ein genau bestimmtes, in der Regel größeres Kapital ausgezahlt, das er entsprechend dem Zwecke, der ihn zu versichern veranlaßte, benutzen wird, um sich sein Alter möglichst behaglich zu gestalten. Nun gibt es aber auch ängstliche Naturen, denen der Besitz oder die Verwaltung einer größeren Summe viele Sorgen bereiten würde, und die es deshalb vorziehen, statt ein einziges Mal eine größere Summe, zu wiederholten Malen in regelmäßigen Zeitabschnitten kleinere, eben für die Abschnitte zum Leben reichende Beträge in Empfang zu nehmen. Das können sie leicht haben. Sie brauchen mit der Gesellschaft nur mehrere Kapitalversicherungen auf den Erlebensfall für die kleineren Beträge abzuschließen, die nacheinander in den verschiedenen Zeitabschnitten ablaufen, dann ist ihr Wunsch erfüllt. Die Gesellschaften übernehmen derartige Geschäfte jedesmal, wenn sie sich verpflichten, gegen eine einmalige Einzahlung dem Versicherten bei Lebzeiten, in der Regel jährlich, ein bestimmtes Kapital auszuzahlen. Eine solche Versicherungsform nennen sie eine Leibrentenversicherung und ihre jährliche Leistungen heißen Leibrenten. Die Leibrenten unterscheidet man zunächst nach der Höhe der jährlichen Zahlungen in gleichbleibende und arithmetisch oder geometrisch steigende oder fallende; ferner in dauernde und temporäre, je nachdem sie dem Versicherten bis zu seinem Lebensende oder nur, bis er ein bestimmtes Alter erreicht hat, ausbezahlt werden. Endlich teilt man die Leibrenten noch ein nach Lage der Zeitpunkte, in welchen die (erste) Einlage des Versicherten und die erste Rentenzahlung seitens der Bank stattfindet, und zwar unterscheidet man hier 3 Fälle:

1. die nachzahlbare Leibrente, bei der die Gegenleistung (Einlage) 1 Jahr vor der ersten Rentenzahlung stattfindet;

2. die vorauszahlbare Leibrente, bei der die Gegenleistung am Termine der ersten Rentenzahlung selbst stattfindet. Sie ist für die Praxis ohne Bedeutung und wird nur aus theoretischen Gründen behandelt;

3. Die aufgeschobene Leibrente, bei der die Gegenleistung mehrere Jahre vor der ersten Rentenzahlung stattfindet;

Diesen 3 Fällen füge ich, ebenfalls aus theoretischen Gründen, noch hinzu:

4. die Leibrente gegen Nachleistung, bei der die Gegenleistung mehrere Jahre nach der ersten Rentenzahlung stattfindet.

Wir behandeln nun folgende Aufgabe:

Gegen eine einmalige Einlage $\mathfrak{E}$ will jemand den Anspruch auf eine dauernde Leibrente $\mathfrak{R}$ gewinnen, die ihm zum erstenmale bei Vollendung seines 31. Lebensjahres ausgezahlt werden soll. Um die vorher genannten 4 Fälle zusammen behandeln zu können, nehmen wir an, daß die Einlage gemacht wird, nachdem der Versicherte 1) das 30., 2) das 31., 3) das 20. und 4) das 45. Lebensjahr gerade vollendet hat.

Bezeichnen wir nun ein für allemal das höchste Lebensalter, das jemand erreichen kann, mit z, dann kann man die 4 Aufgaben nach den in der Einleitung auseinandergesetzten Grundsätzen in Buchstaben also schreiben:

$$1)\quad \mathfrak{E}_{30} = \mathfrak{R}_{31} + \mathfrak{R}_{32} + \ldots + \mathfrak{R}_z$$

$$2)\quad \mathfrak{E}_{31} = \mathfrak{R}_{31} + \mathfrak{R}_{32} + \ldots + \mathfrak{R}_z$$

$$3)\quad \mathfrak{E}_{20} = \mathfrak{R}_{31} + \mathfrak{R}_{32} + \ldots + \mathfrak{R}_z$$

$$4)\quad \mathfrak{E}_{45} = \mathfrak{R}_{31} + \mathfrak{R}_{32} + \ldots + \mathfrak{R}_z$$

Betrachten wir nun die einzelnen Rentenzahlungen als auf den Erlebensfall versicherte Kapitalien, dann ergibt sich, daß die Gegenleistung $\mathfrak{E}$, die gemacht werden muß, um die ganze Rente zu erwerben, gleich der Summe der Gegenleistungen sein muß, die man machen muß, um die Anwartschaft auf die einzelnen Rentenzahlungen zu erhalten. Nach den unter „Kapitalversicherung auf den Erlebensfall" ermittelten Verfahren erhält man aus dem Kapital $\mathfrak{K}_a$ die im Alter α zu machende Einlage, wenn man es mit $\mathfrak{K}^a_\alpha = \frac{D_a}{D_\alpha} = D_a\, U_\alpha$ multipliziert. Durch Anwendung dieser Regel erhalten wir:

$$1)\quad \mathfrak{E}_{30} = \mathfrak{R}\frac{D_{31}}{D_{30}} + \mathfrak{R}\frac{D_{32}}{D_{30}} + \ldots + \mathfrak{R}\frac{D_z}{D_{30}}$$

$$2)\quad \mathfrak{E}_{31} = \mathfrak{R}\frac{D_{31}}{D_{31}} + \mathfrak{R}\frac{D_{32}}{D_{31}} + \ldots + \mathfrak{R}\frac{D_z}{D_{31}}$$

$$3)\quad \mathfrak{E}_{20} = \mathfrak{R}\frac{D_{31}}{D_{20}} + \mathfrak{R}\frac{D_{32}}{D_{20}} + \ldots + \mathfrak{R}\frac{D_z}{D_{20}}$$

$$4)\quad \mathfrak{E}_{45} = \mathfrak{R}\frac{D_{31}}{D_{45}} + \mathfrak{R}\frac{D_{32}}{D_{45}} + \ldots + \mathfrak{R}\frac{D_z}{D_{45}}$$

Schreibt man rechts die $\mathfrak{R}$ heraus und vereinigt die gleichbenannten Brüche, so erhält man:

$$1)\quad \mathfrak{E}_{30} = \mathfrak{R} \cdot \frac{D_{31} + D_{32} + \ldots + D_z}{D_{30}}$$

$$2)\quad \mathfrak{E}_{31} = \mathfrak{R} \cdot \frac{D_{31} + D_{32} + \ldots + D_z}{D_{31}}$$

$$3)\quad \mathfrak{E}_{20} = \mathfrak{R} \cdot \frac{D_{31} + D_{32} + \ldots + D_z}{D_{20}}$$

$$4)\quad \mathfrak{E}_{45} + \mathfrak{R} \cdot \frac{D_{31} + D_{32} + \ldots + D_z}{D_{45}}$$

In allen vier Gleichungen finden wir in dem Zähler der rechten Seiten eine Summe von diskontierten Zahlen. Solche Summen kommen in den Versicherungsrechnungen häufig vor. Deshalb hat man dafür ein einfaches Zeichen eingeführt und zwar den Buchstaben S mit dem Index, den auch die zum jüngsten Alter gehörende diskontierte Zahl trägt. Allgemein bedeutet also S_n die Summe der diskontierten Zahlen, die anfängt mit derjenigen, die zum Alter n gehört, und schließt mit derjenigen, die zum höchstmöglichen Alter gehört. Diese Summen sind für $n = 1$ bis $n = z$ berechnet und in Tabellen eingetragen worden. In unserm Falle ist für den Zähler S_{31} zu setzen. Dadurch erhalten wir:

$$1)\quad \mathfrak{E}_{30} = \mathfrak{R}\frac{S_{31}}{D_{30}} \qquad 3)\quad \mathfrak{E}_{20} = \mathfrak{R}\frac{S_{31}}{D_{20}}$$

$$2)\quad \mathfrak{E}_{31} = \mathfrak{R}\frac{S_{31}}{D_{31}} \qquad 4)\quad \mathfrak{E}_{45} = \mathfrak{R}\frac{S_{31}}{D_{45}}$$

Vergleichen wir diese 4 Formeln miteinander, so finden wir in jedem Falle als Zähler den Summenwert, der zu dem Lebensalter des Versicherten gehört, bei welchem er die Anfangsrente zu erhalten hat. Anlehnend an das Wort „Anfangsrente" wollen wir dieses Alter mit a bezeichnen, dann heißt der Zähler also S_a. In dem Nenner eines jeden Bruches steht diejenige diskontierte Zahl, die zu dem Lebensalter des Versicherten gehört, bei welchem er die Gegenleistung zu machen hat. Bezeichnen wir dieses Alter mit α, dann lautet der Nenner in allen 4 Fällen D_α.

Demzufolge haben alle 4 Gleichungen die gemeinsame Gestalt:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{R}\,\frac{S_a}{D_\alpha} \text{ oder } \mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{R}\,S_a\,U_\alpha$$

Diese Formel liefert folgende Regel:

Der Wert einer (nachzahlbaren, vorauszahlbaren, aufgeschobenen oder durch Nachleistung zahlbaren) dauernden Rente für ein bestimmtes Alter des Versicherten läßt sich in der Weise ermitteln, daß man den einfachen Rentenbetrag mit einem Bruch multipliziert, dessen Zähler der Summenwert für das Alter des Versicherten bei Empfang des ersten Rentenbetrages, und dessen Nenner die diskontierte Zahl der Lebenden ist, die zu demjenigen Alter des Versicherten gehört, für welches der Wert der Rente bestimmt werden soll. Der Quotient $\frac{S_a}{D_\alpha}$ dient also dazu, eine beim Alter a beginnende dauernde Rente in ein beim Alter α fälliges Einzelkapital zu verwandeln.

Bemerkungen: 1) Jede der 4 behandelten Rentenformen läßt sich durch Anwendung der unter Kapitalversicherung auf den Erlebensfall gefundenen Regel in die anderen überführen. Aus der Einlage $\mathfrak{E}_{30}$ läßt sich z. B. die Einlage $\mathfrak{E}_{20}$ gewinnen dadurch, daß man die erstere unter Berücksichtigung der Lebenswahrscheinlichkeit um 10 Jahre diskontiert. Dies geschieht durch Multiplikation mit $\frac{D_{30}}{D_{20}}$.

Man erhält aus $\mathfrak{E}_{30} = \mathfrak{R}\,\frac{S_{31}}{D_{30}}$ sofort $\mathfrak{E}_{20} = \mathfrak{E}_{30}\,\frac{D_{30}}{D_{20}} =$

$$\mathfrak{R}\,\frac{S_{31}}{D_{30}} \cdot \frac{D_{30}}{D_{20}} \text{ oder } \mathfrak{E}_{20} = \mathfrak{R}\,\frac{S_{31}}{D_{20}}.$$

Bei Ermittelung von $\mathfrak{E}_{45}$ aus $\mathfrak{E}_{30}$ muß man um 15 Jahre prolongieren

$$\mathfrak{E}_{45} = \mathfrak{E}_{30}\,\frac{D_{30}}{D_{45}} = \mathfrak{R}\,\frac{S_{31}}{D_{30}} \cdot \frac{D_{30}}{D_{45}} = \mathfrak{R}\,\frac{S_{31}}{D_{45}}.$$

2) Bei der aufgeschobenen Rente ist zu unterscheiden zwischen Rentenaufschub und Karenzzeit. Ersterer ist die Zeit, die zwischen der Gegenleistung und dem Rentenantritt liegt. Der Rentenantritt aber ist der Zeitpunkt, an welchem der Versicherte die Rente als eine nachzahlbar dauernde vor sich hat. Die Karenzzeit, d. i. die Zeit, in welcher der Versicherte den Rentengenuß entbehrt, ist um 1 Jahr größer und reicht

von der Zahlung der Einlage bis zum Empfang des ersten Rentenbetrags. In dem Beispiel $\mathfrak{E}_{20} = \mathfrak{R}_{31} + \mathfrak{R}_{32} + \ldots \mathfrak{R}_z$ beträgt der Aufschub 10, die Karenzzeit 11 Jahre.

Der Tarifwert.

Der Tarifwert ist die Einlage, die man machen muß, um sein ganzes Leben hindurch die Leibrente von 1 ℳ zu beziehen. Man erhält ihn aus der Gleichung $\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{R} \frac{S_a}{D_\alpha}$, wenn man $\mathfrak{R} = 1$ setzt. Bezeichnen wir ihn mit R^a_α, dann ist $R^a_\alpha = \frac{S_a}{D_\alpha}$ die Gegenleistung, die der Versicherte im Alter von α Jahren machen muß, um vom Alter a ab eine dauernde Leibrente von 1 ℳ zu erhalten. Mit Benutzung dieses Tarifwertes, der also auch für recht viele Fälle berechnet werden muß, erhält die allgemeine Gleichung die Form $\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{R} \cdot R^a_\alpha$.

Beispiel. Welche Einlage hat ein 40jähriger Mann zu machen, um eine um 10 Jahre aufgeschobene dauernde Leibrente von 1000 ℳ zu erwerben?

Weil der Mann den ersten Rentenbetrag erst im Alter von 51 Jahren bezieht, ist

$$\mathfrak{E}_{40} = 1000 \cdot \frac{S_{51}}{D_{40}} = 1000 \cdot S_{51} \, \underline{U}_{40} = 1000 \, R^{51}_{40}.$$

Die temporäre Leibrente.

Eine temporäre Leibrente liegt vor, wenn die Auszahlung des Rentenbetrages wieder eingestellt wird, sobald der Versicherte ein bestimmtes Alter erreicht hat. Sie wird behandelt in folgender Aufgabe:

Eine Person erwirbt sich im Alter von α Jahren durch eine einmalige Einlage $\mathfrak{E}$ den Anspruch auf eine Leibrente, die ihr, aber auch nur im Erlebensfalle, n mal nacheinander und zwar zum ersten Male, wenn sie gerade a Jahre alt geworden ist, gezahlt werden soll. Welches ist die diesbezügliche Formel?

Bezeichnen wir mit e das Alter der Person in dem Jahre, in welchem die Bank die Zahlung der Rente zum erstenmale einstellt, dann heißt die Aufgabe:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_{a+1} + \ldots + \mathfrak{R}_{e-1}$$

Fügen wir zu den Rentenbeträgen auf der rechten Seite dieser Gleichung noch diejenigen hinzu, die sie zu einer dauernden Leibrente machen, und ziehen diese dann auch wieder ab, so erhalten wir

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_{a+1} + \ldots + \mathfrak{R}_{e-1} + \mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_{e+1} + \ldots + \mathfrak{R}_z$$
$$- (\mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_{e+1} + \ldots \mathfrak{R}_z).$$

Dieses ist die Differenz zweier dauernder Leibrenten, von denen die eine zum erstenmale beim Alter a, die zweite ebenfalls zum erstenmale beim Alter e gezahlt wird. Bestimmt man ihre Werte, so ist

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{R}\,\frac{S_a}{D_\alpha} - \mathfrak{R}\,\frac{S_e}{D_\alpha} = \mathfrak{R}\,\frac{S_a - S_e}{D_\alpha} \text{ oder weil}$$

$\frac{1}{D_\alpha} = U_\alpha$ ist, $\qquad \mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{R}\,(S_a - S_e)\,U_\alpha;$

d. h. der Wert einer (nachzahlbaren, vorauszahlbaren, aufgeschobenen oder durch Nachleistung zahlbaren) temporären Leibrente läßt sich in der Weise ermitteln, daß man den einfachen Rentenbetrag multipliziert mit einem Bruche, dessen Zähler die Differenz ist zwischen dem Summenwert für das Alter des Versicherten bei Auszahlung des ersten Rentenbetrages und dem Summenwert für sein Alter beim erstmaligen Wiederausfall der Rente, und dessen Nenner die zu dem Alter gehörende diskontierte Zahl der Lebenden ist, für das der Wert der temporären Leibrente festgestellt werden soll. Auch hier kann die Division durch eine Multipiklation mit dem reciproken Werte ersetzt werden.

Der Tarifwert.

Setzen wir wiederum $\mathfrak{R} = 1$, dann erhalten wir den Tarifwert der temporären Leibrente. Wir stellen ihn dar durch $R_\alpha^{a(e} = \frac{S_a - S_e}{D_\alpha}$.

Er ist also die Gegenleistung, die der Versicherte im Alter von α Jahren machen muß für eine temporäre Leibrente von 1 ℳ, die ihm zum erstenmale ausgezahlt wird, wenn er a Jahre alt geworden ist, und die zum erstenmal wieder ausfällt, wenn er e Jahre alt geworden ist.

Führen wir den Tarifwert in die Formel ein, so heißt sie

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{R}\,R_\alpha^{a(e}.$$

Der Erwerb einer Versicherung durch jährliche Prämien.

Nicht jeder besitzt die Barsumme, die nötig ist, um sich einigermaßen einträglich zu versichern, oder wenn er sie auch besitzt, kann er sie

nicht ohne weiteres für diesen Zweck verwenden. Trotzdem kann er sich die Wohltat einer größeren Versicherung erwerben, wenn er nur im Stande ist, längere Zeit hindurch jährlich einen kleineren bestimmten Betrag zu zahlen; denn durchweg übernehmen die Gesellschaften sowohl Kapital- als auch Leibrentenversicherungen gegen jährliche Einzahlungen, die sie Prämien nennen. Auch bezüglich dieser Prämien gilt, daß sie höchstens so lange gezahlt werden, als vorher vertragsmäßig festgesetzt wurde, und daß ihre Zahlung auch schon früher sofort aufhört, wenn der Versicherte stirbt. Die Prämienzahlung unterliegt also den gleichen Bedingungen wie die Leibrentenzahlung und muß deswegen rechnerisch auch genau so behandelt werden. Um bei der Buchstabendarstellung von Aufgaben die Prämien als solche kenntlich zu machen und sie von den Leibrenten zu unterscheiden, wählen wir für diese ein für allemal das Zeichen $\mathfrak{P}$ und bezeichnen das Lebensalter, bei dessen Vollendung der Versicherte die erste Prämie zahlt, mit α, und dasjenige, bei dessen Vollendung die Prämienzahlung wieder eingestellt wird, mit ε.

Wir sind nun gerüstet, die Formeln für die verschiedenartigsten einschlägigen Aufgaben zu finden.

Das Verfahren ist folgendes: Der Übersichtlichkeit wegen stellen wir jede Aufgabe zunächst in Buchstaben dar. Zu diesem Zwecke müssen wir immer erst bestimmen, bei welchem Alter des Versicherten die einzelnen Leistungen gemacht werden, mögen sie vom Versicherten selbst oder auch von der Versicherungsgesellschaft herrühren. Nun stellen wir, wenn noch nötig, die Natur der vorkommenden Reihen fest und schreiben dann ohne weiteres, nach den früher aufgestellten Regeln, die der Aufgabe entsprechende Formel nieder. Endlich nehmen wir die noch möglichen Vereinfachungen vor.

Beispiel 1. Jemand versichert ein Kapital von $\mathfrak{K}$ $\mathcal{M}$, das ihm im Erlebensfall ausgezahlt werden soll, wenn er a Jahre alt geworden ist. Die Gegenleistung soll in jährlichen Prämien $\mathfrak{P}$ bestehen, deren erste er beim Alter α, und deren letzte er im Alter $(\varepsilon - 1)$ zahlen will. Wie groß sind diese Prämien?

Aufgabe in Buchstaben: $\mathfrak{P}_\alpha + \mathfrak{P}_{\alpha+1} + \ldots + \mathfrak{P}_{\varepsilon-1} = \mathfrak{K}_a$

Die Prämienbeträge und das versicherte Kapital können nur dann miteinander verglichen werden, wenn sie gleichartig d. h. auf denselben

Termin fällig gemacht sind. Welcher Termin das ist, ist ganz gleichgültig. Wir wählen den Zeitpunkt, in welchem der Versicherte α Jahre alt wird. Dann ist der Barwert der Prämien, die als temporäre Leibrente aufgefaßt werden können, $\mathfrak{P}\,\frac{S_\alpha - S_\varepsilon}{D_\alpha}$, und der des versicherten Kapitals $K\,\frac{D_a}{D_\alpha}$. Es besteht also die

Gleichung: $\mathfrak{P}\,\frac{S_\alpha - S_\varepsilon}{D_\alpha} = \frac{K\,D_a}{D_\alpha}$. Hieraus ergibt sich die

Formel: $\mathfrak{P} = \frac{K\,D_a}{S_\alpha - S_\varepsilon}$.

2. Jemand will gegen jährliche im ganzen nicht mehr als n mal zahlbare Prämien $\mathfrak{P}$ den Anspruch auf eine dauernde Rente $\mathfrak{R}$ gewinnen. Wie groß müssen die Prämien sein, wenn die erste bei Vollendung seines α^{ten} und die letzte bei Vollendung seines $(\varepsilon - 1)^{\text{ten}}$ Lebensjahres gezahlt werden, und er die erste Rente bei Vollendung seines a^{ten} Lebensjahres beziehen soll?

Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{P}_\alpha + \mathfrak{P}_{\alpha+1} + \ldots + \mathfrak{P}_{\varepsilon-1} = \mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_{a+1} + \ldots + \mathfrak{R}_z.$$

Auf Grund der in dem vorigen Beispiel gemachten Bemerkung folgt hieraus die

Gleichung: $\mathfrak{P}\,\frac{S_\alpha - S_\varepsilon}{D_\alpha} = \mathfrak{R}\,\frac{S_a}{D_\alpha}$ und hieraus die

Formel: $\mathfrak{P} = \mathfrak{R} \cdot \frac{S_a}{S_\alpha - S_\varepsilon}$.

3. Eine 30jährige Person legt 2000 ℳ sofort und dann noch 19 mal nacheinander jedesmal nach Verlauf eines Jahres 150 ℳ in eine Versicherungsanstalt, um 5 Jahre später in den Genuß einer temporären Leibrente zu treten, die höchstens 10 Jahre dauern soll. Wie groß wird diese Rente sein?

Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{K}_{30} + \mathfrak{P}_{31} + \mathfrak{P}_{32} + \ldots + \mathfrak{P}_{49} = \mathfrak{R}_{54} + \mathfrak{R}_{55} + \ldots + \mathfrak{R}_{63}$$

Gleichung: $\mathfrak{K}\,\frac{D_{30}}{D_{30}} + \mathfrak{P}\,\frac{S_{31} - S_{50}}{D_{30}} = \mathfrak{R}\,\frac{S_{54} - S_{64}}{D_{30}}$

Formel: $\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{K}\,D_{30} + \mathfrak{P}\,(S_{31} - S_{50})}{S_{54} - S_{64}}$.

Bankreserve (Deckungskapital)

I. bei der nachzahlbaren, dauernden Leibrente gegen einmalige Einlage.

Aufgabe: Eine 30jährige Person hat gegen eine einmalige Einlage von 3407,92 ℳ eine nachzahlbare dauernde Leibrente von 200 ℳ erworben. Welchen Wert hat diese Versicherung unmittelbar nach der Zahlung des 3ten Rentenbetrages?

1. Bestimmung des Lebensalters des Versicherten an den maßgebenden Terminen.

Die Einlage machte der Versicherte im Alter von 30 Jahren. Die Rente hat er empfangen vom 31. bis zum 33. Jahre einschließlich. Für das Ende des 34. und der folgenden Lebensjahre stehen die Rentenzahlungen noch aus. Die Bankreserve für das vollendete 33. Lebensjahr soll ermittelt werden.

Nach den auf Seite 17 bereits gemachten Bemerkungen ist die Bankreserve für eine ajährige Person nichts anderes als die Summe, welche eben diese Person infolge der vertragsmäßig gemachten Leistungen und Gegenleistungen noch an die Bank zu fordern hat. Zur Berechnung dieser Forderung kann man in verschiedener Weise vorgehen. Will man die Deckungskapitalien für die einzelnen Altersstufen der Person feststellen, so wird man am besten tilgungsplanmäßig verfahren. Da sich aus dieser Methode alle übrigen leicht ableiten lassen, so wollen wir sie zunächst anwenden. Wir verzinsen also die von allen gleichaltrigen Versicherten eingelegte Summe auf ein Jahr, dividieren das Ergebnis durch die Anzahl der am Ende des Jahres noch Lebenden und erhalten dadurch das Guthaben, das der einzelne dann bei der Bank hat, also seine Bankreserve vor Empfang der Rente. Die Bankreserve nach Empfang der Rente ist selbstverständlich um diese kleiner. Wird nun letztere wieder um 1 Jahr prolongiert und durch die Anzahl der dann noch Lebenden dividiert, so erhält man die Bankreserve der einzelnen nach 2 Jahren noch lebenden Versicherten vor Empfang der 2ten Rente und durch Abzug der Rente von dieser Summe ergibt sich wieder die Bankreserve nach Empfang der 2. Rente usw.

Für die oben gestellte Aufgabe sieht der Plan folgendermaßen aus:

Gesamteinlage	Anzahl der Lebenden	Bankreserve	
294 076 232,64 4% = 11 763 049,30	: 86 292 =	3 407,92	Empfang der Rente.
305 839 281,94 17 113 000,— 288 726 281,94 4% = 11 549 051,28	: 85 565 =	3 574,35 vor — 200,— 3 374,35 nach	
300 275 333,22 16 966 200,— 283 309 133,22 4% = 11 332 365,33	: 84 831 =	3 539,69 vor — 200,— 3 339,69 nach	
294 641 498,55	: 84 089 =	3 502,74 vor — 200,— 3 302,74 nach	

Führen wir die bereits festgesetzten Symbole ein, dann erhält der Plan gende Form:

	$\mathfrak{E}_{30} \cdot L_{30}$	$: L_{30}$	$= \mathfrak{E}_{30}$	
	$\mathfrak{E}_{30} \cdot L_{30} \cdot \pi$ $- \mathfrak{R} \cdot L_{31}$	$: L_{31}$	$= \mathfrak{E}_{30} \frac{D_{30}}{D_{31}}$ $- \mathfrak{R}$	vor
	$\mathfrak{E}_{30} \cdot L_{30} \cdot \pi - \mathfrak{R} \cdot L_{31}$		$\mathfrak{E}_{30} \frac{D_{30}}{D_{31}} - \mathfrak{R}_{31}$	nach
2	$\mathfrak{E}_{30} \cdot L_{30} \cdot \pi^2 - \mathfrak{R} \cdot L_{31} \pi$ $- \mathfrak{R} L_{32}$	$: L_{32}$	$= \mathfrak{E}_{30} \frac{D_{30}}{D_{32}} - \mathfrak{R}_{31} \frac{D_{31}}{D_{32}}$ $- \mathfrak{R}_{32}$	vor
	$\mathfrak{E}_{30} \cdot L_{30} \cdot \pi^2 - \mathfrak{R} L_{31} \pi - \mathfrak{R} L_{32}$		$\mathfrak{E}_{30} \frac{D_{30}}{D_{32}} - \mathfrak{R}_{31} \frac{D_{31}}{D_{30}} - \mathfrak{R}_{32}$	nach
3	$\mathfrak{E}_{30} \cdot L_{30} \pi^3 - \mathfrak{R} L_{31} \pi^2 - \mathfrak{R} L_{32} \pi$	$: L_{33}$	$= \mathfrak{E}_{30} \frac{D_{30}}{D_{33}} - \mathfrak{R}_{31} \frac{D_{31}}{D_{33}} - \mathfrak{R}_{32} \frac{D_{32}}{D_{33}}$	vor
			$\mathfrak{E}_{30} \frac{D_{30}}{D_{32}} - \mathfrak{R}_{31} \frac{D_{31}}{D_{33}} - \mathfrak{R}_{32} \frac{D_{32}}{D_{33}} - \mathfrak{R}_{33}$	nach

Hiernach ist also die Bankreserve des Versicherten am Schlusse seines 33. Lebensjahres nach Empfang der Rente:

$$\mathfrak{B}_{33} = \mathfrak{E}_{30} \frac{D_{30}}{D_{33}} - \mathfrak{R} \left(\frac{D_{31}}{D_{33}} + \frac{D_{32}}{D_{33}} + \frac{D_{33}}{D_{33}} \right);$$

oder wenn wir das Symbol S einführen:

$$\mathfrak{B}_{33} = \mathfrak{E}_{30} \frac{D_{30}}{D_{30}} - \mathfrak{R} \frac{S_{31} - S_{34}}{D_{33}}.$$

Bezeichnen wir nun das Alter des Versicherten, für welches die Bankreserve berechnet werden soll, allgemein mit b und ersetzen auch die übrigen Indizes durch die passenden Buchstaben also 30 durch α, 31 durch a und 34 durch e, so haben wir folgende für Aufgaben obiger Art ganz allgemeine Formel:

$$\mathfrak{B}_b = \mathfrak{E}_\alpha \frac{D_\alpha}{D_b} - \mathfrak{R} \frac{S_a - S_e}{D_b}.$$

Diese Formel liefert folgende als retrospektive Methode bezeichnete Regel:

Um die Bankreserve für ein bestimmtes Lebensalter des Versicherten zu erhalten, stellt man zunächst die bis dahin gemachten Leistungen sowohl des Versicherten als auch der Bank fest; dann macht man beide auf das betreffende Alter fällig und subtrahiert die letzteren von den ersteren. Diese Methode gilt ganz allgemein, indessen erfordert ihre Anwendung große Sorgfalt, da man in vielen Fällen auch das bereits getragene Risiko berücksichtigen muß.

Durch die Einlage $\mathfrak{E}_\alpha$ hat der Versicherte die ganze nachzahlbare Leibrente $\mathfrak{R}$ erworben; demnach ist

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{R} \frac{S_a}{D_\alpha}.$$

Durch Benutzung dieser Beziehung geht die vorhergehende Formel über in

$$\mathfrak{B}_b = \mathfrak{R} \frac{S_a}{D_\alpha} \cdot \frac{D_\alpha}{D_b} - \mathfrak{R} \frac{S_a - S_e}{D_b} \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{B}_b = \mathfrak{R} \frac{S_a}{D_b} - \mathfrak{R} \frac{S_a - S_e}{D_b}.$$

$\mathfrak{R} \frac{S_a}{D_b}$ ist der Wert aller Leistungen, welche die Bank überhaupt zu machen verpflichtet ist, $\mathfrak{R} \frac{S_a - S_e}{D_b}$ ist der Wert der Leistungen, die die Bank

bereits gemacht hat, beide gewertet zur Zeit, für welche die Bankreserve gesucht wird. Die Formel liefert also folgende Regel:

Die Bankreserve erhält man auch dadurch, daß man für den Zeitpunkt, für welchen sie gesucht wird, 1) den Wert der Leistungen, welche die Bank überhaupt zu machen verpflichtet ist, 2) den Wert der Leistungen, die sie bereits gemacht hat, feststellt und dann aus beiden die Differenz bildet.

Löst man nun das zweite Glied der rechten Seite der Formel in seine Bestandteile auf und vereinigt dann nach Möglichkeit, so erhält man

$$\mathfrak{B}_b = \mathfrak{K}\frac{S_e}{D_b}; \text{ d. h.}$$

die Bankreserve wird in unserm Fall auch dadurch gefunden, daß man nur die noch ausstehenden Leistungen der Bank auf den Bankreservetermin diskontiert.

Anmerkung. Wären auch noch Leistungen vom Versicherten zu machen, dann müßten auch diese ebendahin fällig gemacht und dann von den Bankleistungen abgezogen werden. Diese dann für alle Fälle geltende Methode heißt die prospektive; sie ist in der Regel die einfachste.

II. bei der aufgeschobenen Leibrente

1. gegen einmalige Einlage.

Aufgabe. Eine 50jährige Person hat durch eine Einlage von 5,665 ℳ eine aufgeschobene Rente von 1 ℳ erworben, die zum erstenmale zur Auszahlung kommen soll, wenn sie 60 Jahre alt geworden ist.

$$\left(\mathfrak{E}_{50} = \frac{S_{60}}{D_{50}} = \frac{55\,414{,}904}{9\,781{,}817} = 5{,}665\right)$$

Ermittelnng der Bankreserve 1. nach 4 Jahren,

a) durch tilgungsplanmäßige Aufstellung.

Alter	Gesamtforderung	Anzahl der Lebend.	Bankreserve
50	5,665 · 69 517 = ℳ 393 813,81	: 69 517	= 5,665
	+ 4 % = „ 15 752,55		
51	„ 409 566,36	: 68 409	= 5,986
	+ 4 % = „ 16 382,65		
52	„ 425 949,01	: 67 253	= 6,333
	+ 4 % = „ 17 037,96		
53	„ 442 986,97	: 66 046	= 6,707
	+ 4 % = „ 17 719,48		
54	„ 460 706,45	: 64 785	= 7,111

b) aus der Bankreserve des vorhergehenden Jahres (hier also aus $\mathfrak{B}_{53} = 6{,}7072$).

Die Formel ergibt sich aus der Reihenfolge der Operationen in der tilgungsplanmäßigen Aufstellung. Es ist:

$$\mathfrak{B}_{54} = \frac{\mathfrak{B}_{53} \cdot L_{53} \cdot 1{,}04}{L_{54}} = \frac{\mathfrak{B}_{53} \dfrac{L_{53}}{1{,}04^{53}}}{\dfrac{L_{54}}{1{,}04^{54}}} = \mathfrak{B}_{53} \frac{D_{53}}{D_{53}} = \mathfrak{B}_{53} \cdot K_{54}^{53}$$

$$\mathfrak{B}_{54} = 6{,}7072 \cdot \frac{8\,261{,}892}{7\,792{,}453} = 7{,}111.$$

c) aus der Einlage des Versicherten, der eine von Seiten der Bank erfolgte Leistung noch nicht gegenübersteht.

$$\mathfrak{B}_{54} = \mathfrak{E}_{50} \frac{D_{50}}{D_{54}} = 5{,}665 \cdot \frac{9\,781{,}917}{7\,792{,}453} = 7{,}111$$

d) aus den Leistungen der Bank, die alle noch ausstehn.

$$\mathfrak{B}_{54} = \frac{S_{60}}{D_{54}} = \frac{55\,414{,}904}{7\,792{,}453} = 7{,}111$$

2. nach 9 Jahren.

a) aus der Einlage des Versicherten.

Die beim Alter von 50 Jahren gemachte Einlage des Versicherten ist lediglich unter Berücksichtigung der Lebenswahrscheinlichkeit bis zum Alter von 59 Jahren zu prolongieren.

$$\mathfrak{B}_{59} = \mathfrak{E}_{50}\, K_{59}^{50} = \mathfrak{E}_{50} \frac{D_{50}}{D_{59}} = 5{,}665\, \frac{9\,781{,}917}{5\,694{,}499} = 9{,}7313$$

b) aus den noch ausstehenden Leistungen der Bank.

Die noch ausstehenden Leistungen der Bank bilden eine nachzahlbare dauernde Rente von 1 ℳ für einen Versicherten von 59 Jahren. Sie haben einen Barwert von

$$\mathfrak{B}_{59} = 1.\, R_{50}^{59} = 1.\, \frac{S_{60}}{D_{59}} = \frac{55\,414{,}904}{5\,694{,}499} = 9{,}7313.$$

3. nach 14 Jahren.

a) aus der Bankreserve beim Alter von 59 Jahren vermittelst der tilgungsmäßigen Aufstellung.

Durch diese Aufstellung erhält man in der letzten Rubrik die Tarifwerte abwechselnd für vorauszahlbare und nachzahlbare dauernde Renten.

Alter		Gesamtschuld	Anzahl der Lebenden	Bankreserve pro Person
59	$\mathfrak{E}_{59} \cdot L_{59} = 9{,}7313 \cdot 57\,600 =$ ℳ	560 522,88	: 57 600 =	ℳ 9,731
	+ 4 % = „	22 420,92		
60	Reserve vor der 1. Rentenzahlung	582 943,80	: 55 973 =	„ 10,413
	ab 1. „	55 973,00		
	„ nach der 1. „	526 970,80	: 55 973 =	„ 9,413
	+ 4 % = ℳ	21 078,83		
61	„ vor der 2. Rentenzahlung	548 049,63	: 54 275 =	„ 10,098
	ab 2. „	54 275,00		
	„ nach der 2. „	493 774,63	: 54 275 =	„ 9,098
	+ 4 % = ℳ	19 750,98		
62	„ vor der 3. Rentenzahlung	513 525,61	: 52 505 =	„ 9,781
	ab 3. „	52 505,00		
	„ nach der 3. „	461 020,61	: 52 505 =	„ 8,781
	+ 4 % = ℳ	18 440,82		
63	„ vor der 4. Rentenzahlung	479 461,43	: 50 661 =	„ 9,464
	ab 4. „	50 661,00		
	„ nach der 4. „	428 800,43	: 50 661 =	„ 8,464
	+ 4 % = ℳ	17 152,02		
64	„ vor der 5. Rentenzahlung	445 952,45	: 48 744 =	„ 9,149
	ab 5. „	48 744,00		
	„ nach der 5. „	397 208,45	: 48 744 =	„ 8,149
	usw.			

b) aus der Einlage und den bereits gezahlten Renten.

Beiderlei Leistungen sind für das vollendete 64. Lebensjahr zu berechnen, und dann ist ihr Unterschied festzustellen. Die Einlage ergibt:

$$\mathfrak{E}_{50} \cdot K_{64}^{50} = \mathfrak{E}_{50} \cdot \frac{D_{50}}{D_{64}} = \frac{9\,781{,}917}{3\,960{,}842} \cdot 5{,}665 = 13{,}991$$

die für das 60. bis 64. Lebensjahr bereits bezahlten Renten belaufen sich auf $1 \cdot R_{64}^{60(65} = \frac{S_{60} - S_{65}}{D_{64}} = \frac{55\,414{,}904 - 32\,276{,}409}{3\,960{,}842} = 5{,}842$,

demnach ist $\mathfrak{B}_{64} = 13{,}991 - 5{,}842 = \mathbf{8{,}149}$.

c) aus den noch ausstehenden Renten.

Die erste dieser Renten wird bezahlt, wenn der Versicherte das 65. Lebensjahr erreicht hat; der Barwert der ganzen Rentenreihe beim Alter von 64 Jahren ist demnach $\mathfrak{B}_{64} = \frac{S_{65}}{D_{64}} = \frac{32\,276{,}409}{3\,960{,}842} = \mathbf{8{,}149}$.

III. bei der aufgeschobenen Rente gegen temporäre Prämien.

Da die Beziehung zwischen Prämien und Leibrenten (S. 27:2) bereits allgemein behandelt wurde, wollen wir jetzt folgenden besonderen Fall nehmen.

Eine 25jährige Person will sich gegen sofort beginnende und bis zu ihrem 44. Lebensjahr einschließlich jährlich zahlbare Prämien $\mathfrak{P}$ eine dauernde Leibrente $\mathfrak{R}$ erwerben, deren Auszahlung zum erstenmal stattfinden soll, wenn sie ein Alter von 60 Jahren erreicht hat. Wie groß ist die Bankreserve

1. nach 10 Jahren unmittelbar vor der Prämienzahlung?

Die Aufgabe lautet in Buchstaben:

$$\mathfrak{P}_{25} + \mathfrak{P}_{26} + \ldots + \mathfrak{P}_{44} = \mathfrak{R}_{60} + \mathfrak{R}_{61} + \ldots + \mathfrak{R}_{z}$$

und es ist $\mathfrak{P} = \dfrac{\mathfrak{R}\, S_{60}}{S_{25} - S_{45}}$ oder $\mathfrak{R} = \dfrac{\mathfrak{P}\,(S_{25} - S_{45})}{S_{60}}$.

Zehn Jahre nach Abschluß des Vertrages hat eine Leistung der Bank noch nicht stattgefunden, dagegen sind an Prämien bereits gezahlt: $\mathfrak{P}_{25} + \mathfrak{P}_{26} + \ldots + \mathfrak{P}_{34}$. Der Wert dieser Reihe beim Alter des Versicherten von 35 Jahren ist das Deckungskapital.

Es beträgt $\mathfrak{B}_{35} = \mathfrak{P}\,\dfrac{S_{25} - S_{35}}{D_{35}}$.

Die Bankreserve nach 10 Jahren nach der Prämienzahlung ist um $\mathfrak{P}$ größer.

2. 30 Jahre nach Vertragsabschluß?

Ermittelung aus den bereits geleisteten Prämien, denen eine Leistung der Bank noch nicht gegenübersteht. Der Versicherte ist dann 55 Jahre alt.

Die gezahlten Prämien sind $\mathfrak{P}_{25} + \mathfrak{P}_{26} + \ldots + \mathfrak{P}_{44}$.

Also ist $\mathfrak{B}_{55} = \mathfrak{P} \cdot \dfrac{S_{25} - S_{45}}{D_{55}}$.

Wenn man $\mathfrak{P}$ durch seinen Wert $\mathfrak{R}\,\dfrac{S_{60}}{S_{55} - S_{45}}$ ersetzt, erhält man

$$\mathfrak{B}_{55} = \mathfrak{R}\,\frac{S_{60}}{S_{25} - S_{45}} \cdot \frac{S_{25} - S_{45}}{D_{25}} = \mathfrak{R}\,\frac{S_{60}}{D_{55}}.$$

Ermittelt man die Reserve $\mathfrak{B}_{55}$ aus den noch ausstehenden Leistungen der Bank, denen keine noch ausstehende Leistungen des

Versicherten gegenüberstehen, also aus $\mathfrak{R}_{60} + \mathfrak{R}_{61} + \ldots + \mathfrak{R}_z$, so erhält man ebenfalls $\mathfrak{B}_{55} = \mathfrak{R} \frac{S_{60}}{D_{55}}$.

Ersetzt man in dieser Formel $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{P} \frac{S_{25} - S_{45}}{S_{60}}$, so erhält man:

$$\mathfrak{B}_{55} = \frac{\mathfrak{P}(S_{25} - S_{45})}{S_{60}} \cdot \frac{S_{60}}{D_{55}} = \mathfrak{P} \frac{S_{25} - S_{45}}{D_{55}},$$

also den Ausdruck wieder, den wir vorher schon auf anderm Wege abgeleitet hatten.

3. Bankreserve 40 Jahre nach Vertragsabschluß?

Diese Bankreserve, die also für das vollendete 65. Lebensjahr des Versicherten zurückgelegt werden muß, berechnet sich am bequemsten aus den noch ausstehenden Leistungen der Bank. Sie beträgt:

$$\mathfrak{B}_{65} = \mathfrak{R} \frac{S_{66}}{D_{65}}.$$

Zur Übung diene noch folgende Aufgabe:

Eine 40jährige Person erwirbt den Anspruch auf eine um 11 Jahre aufgeschobene und im ganzen höchstens 15mal zahlbare Leibrente von 600 ℳ gegen sofort beginnende und im ganzen 5mal zahlbare Prämien. Wie groß sind letztere?

Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{P}_{40} + \mathfrak{P}_{41} + \ldots + \mathfrak{P}_{44} = \mathfrak{R}_{52} + \ldots + \mathfrak{R}_{66}.$$

Gleichung: $\mathfrak{P} \frac{S_{40} - S_{45}}{D_{40}} = \mathfrak{R} \frac{S_{52} - S_{67}}{D_{40}}$.

Formeln: $\mathfrak{P} = \mathfrak{R} \frac{S_{52} - S_{67}}{S_{40} - S_{45}}$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{P} \frac{S_{40} - S_{45}}{S_{52} - S_{67}}$.

Berechnung:

S_{40}	= 263 643,60	S_{52}	= 112 727,92
$-\ S_{45}$	= 189 362,68	S_{67}	= 25 265,71
	74 316,92		87 462,21 · 600
			i 524 7733 = **706,13.**
			4 5549
			959
			216

Die Bankreserve nach 3 Jahren unmittelbar vor der Prämienzahlung beträgt $\mathfrak{B}_{43} = \mathfrak{P} \frac{S_{40} - S_{43}}{D_{43}}$.

Unmittelbar nach der Prämienzahlung ist sie

$$\mathfrak{B}_{43} = \mathfrak{P} \frac{S_{40} - S_{44}}{D_{43}}.$$

Die Bankreserve unmittelbar nach der letzten Prämienzahlung beträgt:

$$\mathfrak{B}_{44} = \mathfrak{P} \frac{S_{40} - S_{45}}{D_{44}} \text{ oder}$$

$$\mathfrak{B}_{44} = \mathfrak{R} \frac{S_{52} - S_{67}}{S_{40} - S_{45}} \cdot \frac{S_{40} - S_{45}}{D_{44}} = \mathfrak{R} \frac{S_{52} - S_{67}}{D_{44}}.$$

Die Bankreserve unmittelbar vor der 9. Rentenzahlung ist:

$$\mathfrak{B}_{60} = \mathfrak{R} \frac{S_{60} - S_{67}}{D_{60}}.$$

Die Formeln für die Bankreserve sind am kürzesten und lassen sich am bequemsten aufstellen, solange nur Leistungen vom Versicherten gemacht worden sind, oder sobald solche lediglich seitens der Bank noch ausstehen. Im ersteren Falle berechnet man die Bankreserve am bequemsten aus den erfolgten Einlagen des Versicherten, im letzteren Falle aus den noch ausstehenden Leistungen der Bank.

Die Bankreserve bei Versicherungsverträgen entspricht genau dem Schuldrest bei Anleiheverträgen und wird auch wie dieser ermittelt, entweder zwecks Einstellung in die Bilanz oder zwecks Rückzahlung bei vorzeitiger Auflösung des Vertrags.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu zeigen, stelle ich folgende 2 Aufgaben einander gegenüber:

1. Ursprünglicher Vertrag.

Ein Kapitalist hat durch Herleihung von 100 000 ℳ den Anspruch auf eine 4 % Annuität erworben, die in den nächsten 24 Jahren stets am Schlusse des Anleihejahres zur Auszahlung kommen soll.	Ein 40jähriger Mann hat bei einer Versicherungsbank durch eine Einlage von 100 000 ℳ den Anspruch auf eine nachzahlbare dauernde Leibrente erworben (Haberl pag. 220). Der den Tarifwerten zu Grunde liegende Zinsfuß ist 4 %.

2. Ermittelung der Annuität bezw. des Rentenbetrages.

a) Aufgaben in Buchstaben.

$K_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{24}$;	$\mathfrak{E}_{40} = \mathfrak{R}_{41} + \mathfrak{R}_{42} + \ldots \mathfrak{R}_z$

b) Formeln mit Berechnung.

$K_o = A\, IV_4^{24}$

$A = K\, V_p^{24}$

$A = 100\,000 \cdot 0{,}0655\,8683 =$

6 558,683.

$\mathfrak{E}_{40} = \mathfrak{R} \frac{S_{41}}{D_{40}}$ also

$\mathfrak{R} = \mathfrak{E}_{40} \cdot \frac{D_{40}}{S_{41}}$

$\mathfrak{R} = 100\,000 \frac{16\,382{,}56}{247\,261{,}04} =$

6 625,614.

3. Schuldrest nach der 10. Annuität bezw. Bankreserve nach der 10. Rentenzahlung.

a) aus den noch ausstehenden Leistungen.

Nach Zahlung der 10. Annuität müssen von Seiten des Schuldners noch 14 Annuitäten gezahlt werden, die an diesem Zeitpunkte zu bezeichnen sind mit

$A_1 + A_2 + \ldots + A_{14}$.

Ihr Barwert ist $S = A\, IV_4^{14}$

$S = 6\,558{,}683 \cdot 10{,}56312293 =$

69 280,17 ℳ.

Da Gegenleistungen seitens des Gläubigers nicht ausständig sind, so ist obige Summe sofort der Schuldrest.

Da die Bankreserve unmittelbar nach der 10. Rentenzahlung ermittelt werden soll, sind die noch ausstehenden Leistungen der Bank folgende Renten:

$\mathfrak{R}_{51} + \mathfrak{R}_{52} + \mathfrak{R}_{53} + \ldots + \mathfrak{R}_z$.

Für eine nunmehr 50jährige Person bedeutet vorstehende Reihe eine nachzahlbare dauernde Leibrente von $\mathfrak{R}$ ℳ mit einem Barwerte von

$\mathfrak{R} \frac{S_{51}}{D_{50}} = 6\,625{,}614 \frac{121\,983{,}697}{9\,781{,}917}$

$= \mathbf{82\,623{,}54}$.

b) aus den bereits erfolgten Leistungen.

Es sind beiderseits Leistungen erfolgt. Die Leistung des Gläubigers, die ursprünglich 100 000 ℳ betrug, ist bis zu dem in Frage stehenden Termin durch Zinseszins auf $100\,000\, I_4^{10} = 148\,024{,}42$ ℳ angewachsen.

Die Leistungen des Schuldners

Auch hier liegen zweierlei Leistungen vor. Diejenige des Versicherten, die ursprünglich 100000 ℳ betrug, ist bis zu dem in Frage stehenden Zeitpunkt auf

$100000 \cdot \frac{D_{40}}{D_{50}} = \frac{1\,638\,256\,000 \text{ ℳ}}{9\,781{,}917}$

angewachsen.

bestehen aus 10 Annuitätenzahlungen, deren Wert zur selben Zeit ist $A\,(III_4^9 + 1) =$

$$\begin{array}{r} 6\,558{,}683 \cdot 12{,}006\,107\,123 \\ \hline 72\,036{,}643 \\ 6\,003\,054 \\ 600\,305 \\ 96\,049 \\ 7\,204 \\ 960 \\ 36 \\ \hline 78\,744\,251 \end{array}$$

Die Differenz der beiderseitigen Leistungen ist der gesuchte Schuldrest:

$$\begin{array}{r} 148\,024{,}42 \\ 78\,744{,}25 \\ \hline S_{10} = \mathbf{69\,280{,}17} \end{array}$$

Die Leistungen der Bank bestehen aus 10 Rentenzahlungen, deren Wert zur selben Zeit beträgt:

$$6\,625{,}614\ \frac{S_{41} - S_{51}}{D_{50}}$$

$$\begin{array}{rl} S_{41} = & 247\,261{,}04 \\ S_{51} = & 121\,983{,}097 \\ \hline & 125\,277\,343 \times 6\,625{,}614 \\ \hline & 751\,664\,058\,000 \\ & 75\,166\,405\,800 \\ & 2\,505\,546\,860 \\ & 626\,386\,715 \\ & 75\,166\,406 \\ & 1\,252\,773 \\ & 501\,109 \\ \hline & 830\,039\,317{,}663 \\ \hline & 9\,781{,}917\ \mathcal{M} \end{array}$$

Die Differenz beider Leistungen ist die gesuchte Bankreserve:

$$\begin{array}{rl} & 1\,638\,256\,000 \\ & 830\,039\,317{,}663 \\ \hline 978191\ i & 808\,216\,682\,337 = \mathbf{82623} \\ & 25\,663\,322 \\ & 6\,099\,488\,3 \\ & 230\,338\,13 \\ & 34\,699\,797 \\ & 5\,354\,046 \\ & 463\,087 \end{array}$$

Kapitalversicherung für eine 30jährige Person.

1. auf $10^1/_4$ Jahr.

Die Anzahl der 30jährigen Personen, welche den Vertrag abschließen, beläuft sich auf L_{30}. Es ist nun festzustellen, wie viele von diesen Personen nach $10^1/_4$ Jahren erfahrungsgemäß noch am Leben sein werden. Ihre Anzahl bezeichnen wir mit $L_{40^1/_4}$. Unter der Annahme, daß das Absterben innerhalb eines Jahres gleichmäßig vor sich geht, läßt sich $L_{40^1/_4}$ folgendermaßen bestimmen. Von den Versicherten werden L_{40} Personen 40, und L_{41} Personen 41 Jahre alt. Mithin sterben zwischen dem vollendeten 40sten und dem vollendeten 41sten Lebensjahr $(L_{40} - L_{41})$

Versicherte, in jedem Vierteljahr also $^1/_4\,(L_{40} - L_{41})$. Zieht man diesen Betrag von der Anzahl der 40jährigen ab, so bleibt die Anzahl der $40^1/_4$jährigen mit $L_{40} - {}^1/_4\,(L_{40} - L_{41}) = {}^1/_4\,(3\,L_{40} + L_{41})$ übrig. Nach dieser Feststellung der $40^1/_4$jährigen Personen, die von den vertragschließenden 30jährigen übrig bleiben, läßt sich für die Kapitalversicherung nach der früher schon auseinandergesetzten Methode zur Ermittelung des Anteils des Versicherten bezw. der Versicherungssumme folgende Gleichung bilden:

$$A = \frac{\mathfrak{E}_{30}\,L_{30}\,\pi^{10^1/_4}}{^1/_4\,(3\,L_{40} + L_{41})} = \frac{\text{Versicherungsfond}}{\text{Anzahl der Ueberlebenden.}}$$

Hieraus folgt: $\mathfrak{E} = \dfrac{A\,(3\,L_{40} + L_{41})}{4\,L_{30} \cdot \pi^{10} \cdot \pi^{^1/_4}} = \dfrac{A}{4\,\pi^{^1/_4}}\left\{\dfrac{3\,L_{40}}{L_{30}\,\pi^{10}} + \dfrac{1\,L_{41}}{L_{30}\,\pi^{10}}\right\}$

Kürzt man die letzten Brüche mit π^{40} bezw. π^{41} so erhält man

$$\mathfrak{E} = \frac{A}{4\,\pi^{^1/_4}}\left\{\frac{\dfrac{3\,L_{40}}{\pi^{40}}}{\dfrac{L_{30}}{\pi^{30}}} + \frac{\pi\,\dfrac{L_{41}}{\pi^{41}}}{\dfrac{L_{30}}{\pi^{30}}}\right\} = \frac{A}{4\,\pi^{^1/_4}}\left\{\frac{3\,D_{40}}{D_{30}} + \frac{\pi\,D_{41}}{D_{30}}\right\}$$

$$\text{oder } \mathfrak{E} = \frac{A}{4\,\pi^{^1/_4}\,D_{30}} \cdot \left\{3\,D_{40} + 1\,\pi\,D_{41}\right\}$$

2. auf $10^1/_2$ Jahre.

Die Anzahl der überlebenden $40^1/_2$jährigen beträgt:

$$L_{40^1/_2} = L_{40} - \tfrac{2}{4}\,(L_{40} - L_{41}) = \tfrac{1}{4}\,(2\,L_{40} + 2\,L_{41})$$

Die ganz wie oben hergeleitete Formel für die Kapitalversicherung lautet:

$$\mathfrak{E} = \frac{A}{4\,\pi^{^2/_4}\,D_{30}} \cdot \left\{2\,D_{40} + 2\,\pi\,D_{41}\right\}$$

3. auf $10^3/_4$ Jahre.

Die Anzahl der Überlebenden $40^3/_4$jährigen beträgt:

$$L_{40\,\frac{3}{4}} = L_{40} - \tfrac{3}{4}\,(L_{40} - L_{41}) = \tfrac{1}{4}\,(1\,L_{40} + 3\,L_{41}),$$

und die zugehörige Formel ist:

$$\mathfrak{E}_{30} = \frac{A}{4\,\pi^{^3/_4}\,D_{30}} \cdot \left\{1\,D_{40} + 3\,\pi\,D_{41}\right\}$$

Vorauszahlbare vierteljährliche Leibrenten für eine 30jährige Person auf Lebenszeit.

Bezeichnen wir die Einlage mit E und die vierteljährlichen Renten mit V, so heißt die Aufgabe in Buchstaben:

$$E_{30} = V_{30} + V_{30^1/_4} + V_{30^2/_4} + V_{30^3/_4} + V_{31} + V_{31^1/_4} + \ldots + V_z$$

oder in anderer Gruppierung:

$$1)\quad E_{30} = \left\{\begin{array}{llll} V_{30} & + V_{31} & + V_{32} & + \ldots + \\ V_{30^1/_4} & + V_{31^1/_4} & + V_{32^1/_4} & + \ldots + \\ V_{30^2/_4} & + V_{31^2/_4} & + V_{32^2/_4} & + \ldots + \\ V_{30^3/_4} & + V_{31^3/_4} & + V_{32^3/_4} & + \ldots \end{array}\right\}$$

Ersetzt man nun auf Grund der vorher abgeleiteten Formeln für die Kapitalversicherung die Renten durch ihre Einkaufswerte, so erhält man:

$$2)\quad E_{30} = \left\{\begin{array}{ll} V\dfrac{D_{30}}{D_{30}} & + V\dfrac{D_{31}}{D_{30}} + \ldots + \\ \dfrac{V}{4\pi^{1/4}D_{30}}\left\{3D_{30} + 1\pi D_{31}\right\} & + \dfrac{V}{4\pi^{1/4}D_{30}}\left\{3D_{31} + 1\pi D_{32}\right\} + \ldots + \\ \dfrac{V}{4\pi^{2/4}D_{30}}\left\{2D_{30} + 2\pi D_{31}\right\} & + \dfrac{V}{4\pi^{2/4}D_{30}}\left\{2D_{31} + 2\pi D_{32}\right\} + \ldots + \\ \dfrac{V}{4\pi^{3/4}D_{30}}\left\{1D_{30} + 3\pi D_{31}\right\} & + \dfrac{V}{4\pi^{3/4}D_{30}}\left\{1D_{31} + 3\pi D_{32}\right\} + \ldots \end{array}\right\}$$

Erweitert man nun die einzelnen Horizontalreihen und zwar die erste mit 4π, die zweite mit $\pi^{3/4}$, die dritte mit $\pi^{1/2}$ und die vierte mit $\pi^{1/4}$ und schreibt die dadurch gleich gewordenen Brüche heraus, so erhält man:

$$3)\quad E_{30} = \frac{V}{4\pi D_{30}} \left\{\begin{array}{l} 4\pi\, D_{30} + 4\pi\, D_{31} + \ldots + \\ 3\pi^{3/4}D_{30} + \pi^{1\,3/4}D_{31} + 3\pi^{3/4}D_{31} + \pi^{1\,3/4}D_{32} + \ldots + \\ 2\pi^{1/2}D_{30} + 2\pi^{1\,1/2}D_{31} + 2\pi^{1/2}D_{31} + 2\pi^{1\,1/2}D_{32} + \ldots + \\ 1\pi^{1/4}D_{30} + 3\pi^{1\,1/4}D_{31} + 1\pi^{1/4}D_{31} + 3\pi^{1\,1/3}D_{32} + \ldots \end{array}\right\}$$

Durch leicht erkennbare Zusammenfassung erhält man hieraus:

4)
$$E_{30} = \frac{V}{4\,\pi\,D_{30}} \left\{ \begin{array}{l} 4\,\pi\,S_{30} \quad + \\ 3\,\pi^{3/4}\,S_{30} + \pi^{1\,3/4}\,S_{31} \\ 2\,\pi^{1/2}\,S_{30} + 2\,\pi^{1\,1/2}\,S_{31} \\ 1\,\pi^{1/4}\,S_{30} + 3\,\pi^{1\,1/4}\,S_{31} \end{array} \right\}$$ und hieraus wieder:

5)
$$E_{30} = \frac{V}{4} \left\{ \frac{4\,\pi + 3\,\pi^{3/4} + 2\,\pi^{1/2} + 1\,\pi^{1/4}}{\pi} \cdot \frac{S_{30}}{D_{30}} + \frac{\pi^{1\,3/4} + 2\,\pi^{1\,1/2} + 3\,\pi^{1\,1/4}}{\pi} \cdot \frac{S_{31}}{D_{30}} \right\}$$

Nun ist $\frac{S_{30}}{D_{30}} = \frac{D_{30}}{D_{30}} + \frac{S_{31}}{D_{30}} = 1 + R_{30}^{31}$.

Benutzen wir dieses und führen gleichzeitig die angezeigten Divisionen aus, so erhalten wir:

6)
$$E_{30} = \frac{V}{4} \left\{ \left(4 + 3 \cdot \frac{1}{\pi^{1/4}} + 2 \cdot \frac{1}{\pi^{1/2}} + \frac{1}{\pi^{3/4}}\right)\left(1 + R_{30}^{31}\right) + \left(\pi^{3/4} + 2\,\pi^{1/2} + 3\,\pi^{1/4}\right) R_{30}^{31} \right\}$$ oder

7)
$$E_{30} = \frac{V}{4} \left\{ 4 + 3 \cdot \frac{1}{\pi^{1/4}} + 2 \cdot \frac{1}{\pi^{1/2}} + \frac{1}{\pi^{3/4}} + R_{30}^{31} \left(4 + 3\left(\pi^{1/4} + \frac{1}{\pi^{1/4}}\right) + 2\left(\pi^{1/2} + \frac{1}{\pi^{1/2}}\right) + \left(\pi^{3/4} + \frac{1}{\pi^{3/4}}\right)\right) \right\}.$$

Mit Benutzung der von Schlimbach (Politische Arithm.) für Achteleinteilung und der von mir für Zehnteleinteilung der Prozente hergestellten Tabellen geht die Formel endlich über in

8)
$$E_{30} = \frac{V}{4} \left\{ 4 + 3\,II_p^{1/4} + 2\,II_p^{1/2} + 1\,II_p^{3/4} + R_{30}^{31}\left(4 + 3\left(I_p^{1/4} + II_p^{1/4}\right) + 2\left(I_p^{2/4} + II_p^{2/4}\right) + I_p^{3/4} + II_p^{3/4}\right) \right\}.$$

Nachzahlbare vierteljährige Leibrente für eine 30jährige Person.

Die nachzahlbare Leibrente unterscheidet sich von der vorauszahlbaren nur dadurch, daß die erste Rentenzahlung V_{30} bei ihr unterbleibt. Bezeichnet man den Wert der nachzahlbaren Leibrente mit $\mathfrak{E}$, dann ist also $E - V = \mathfrak{E} = E - \frac{4\,V}{4}$.

Auf Grund dessen erhält man aus der Formel für vorauszahlbare vierteljährige Leibrenten diejenige für nachzahlbare in

$$\mathfrak{E}_{30} = \frac{V}{4}\Big\{3\,\mathrm{II}_p^{1/4} + 2\,\mathrm{II}_p^{1/2} + \mathrm{II}_p^{3/4} + R_{30}^{31}\Big[4 + 3\Big(\mathrm{I}_p^{1/4} + \mathrm{II}_p^{1/4}\Big) + 2\Big(\mathrm{I}_p^{1/2} + \mathrm{II}_p^{1/2}\Big) + \Big(\mathrm{I}_p^{3/4} + \mathrm{II}_p^{3/4}\Big)\Big]\Big\}.$$

Die beiden Formeln unterscheiden sich also nur um die Ziffer 4, die sich bei den vorauszahlbaren in der ersten Klammer findet, bei der nachzahlbaren nicht.

Das Verhältnis des Wertes einer vorauszahlbaren vierteljährlichen Leibrente von $^1/_4$ ℳ zu demjenigen einer vorauszahlbaren ganzjährlichen von 1 ℳ.

Um dieses Verhältnis wenigstens annähernd festzustellen, drücken wir den Wert E_{30} durch R_{30}^{30} aus. Dies geschieht, wenn wir R_{30}^{31} durch $R_{30}^{30} - 1$ ersetzen. Dadurch erhalten wir aus 6 (Seite 41):

$$E_{30} = \frac{V}{4}\Big\{\Big(4 + 3\cdot\frac{1}{\pi^{1/4}} + 2\cdot\frac{1}{\pi^{1/2}} + \frac{1}{\pi^{3/4}}\Big)R_{30}^{30} + \Big(\pi^{3/4} + 2\,\pi^{1/2} + 3\,\pi^{1/4}\Big)\Big(R_{30}^{30} + 1\Big)\Big\} \text{ oder}$$

$$E_{30} = \frac{V}{4}\Big\{\Big[4 + 3\Big(\mathrm{I}_p^{1/4} + \mathrm{II}_p^{1/4}\Big) + 2\Big(\mathrm{I}_p^{1/2} + \mathrm{II}_p^{1/2}\Big) + \Big(\mathrm{I}_p^{3/4} + \mathrm{II}_p^{3/4}\Big)\Big]\cdot R_{30}^{30} - \Big(\mathrm{I}_p^{3/4} + 2\,\mathrm{I}_p^{1/2} + 3\,\mathrm{I}_p^{1/4}\Big)\Big\}.$$

Nun ist		für 4 %	für 3 %
$\mathrm{I}_p^{1/4}$	=	1,0098534065	1,0074170718
$\mathrm{I}_p^{1/2}$	=	1,0198039027	1,0148891568
$\mathrm{I}_p^{3/4}$	=	1,0366064203	1,0224166622
demnach			
$2\,\mathrm{I}_p^{1/2}$	=	2,0396078054	2,0297783136
$3\,\mathrm{I}_p^{1/2}$	=	3,0275602195	3,0222512154
$\mathrm{I}_p^{3/4} + 2\,\mathrm{I}_p^{1/2} + 3\,\mathrm{I}_p^{1/4}$	=	6,1037744352	6,0744461912

ferner	für 4 %	für 3 %
$I_p^{1/4} + II_p^{1/4}$	= 2,0000961422	2,0000546079
$I_p^{1/2} + II_p^{1/2}$	= 2,0003845784	2,0002184293
$I_p^{3/4} + II_p^{3/4}$	= 2,0012927086	2,0004914892

Setzen wir nun $V = 1/4$ und vernachlässigen bei den Tabellenwerten die Dezimalstellen, dann ergibt sich:

$$E_{30} = \frac{1}{16}\left\{16\, R_{30}^{30} - 6\right\} \text{ oder } E_{30} = R_{30}^{30} - \frac{3}{8}$$

d. h. der Barwert einer vierteljährlich vorauszahlbaren Leibrente von $1/4$ ℳ ist um ein klein wenig mehr als 0,375 ℳ geringer als der Barwert einer jährlich vorauszahlbaren dauernden Leibrente von 1 ℳ.

Vorauszahlbare halbjährliche Leibrente für eine 30jährige Person.

Die Formel für die Kapitalversicherung auf $10^1/_2$ Jahr lautete:

$$\mathfrak{E}_{30} = \frac{A}{4\,\pi^{1/2}\, D_{30}} \left\{2\, D_{40} + 2\,\pi\, D_{41}\right\}.$$

Kürzen wir durch 2, bringen $\pi^{1/2}$ in die Klammer und führen Tabellenwerte ein, so wird:

$$\mathfrak{E}_{30} = \frac{A}{2\, D_{30}}\left\{II_p^{1/2}\, D_{40} + I_p^{1/2}\, D_{41}\right\}.$$

Bezeichnen wir nun die halbjährliche Leibrente mit H, dann heißt, wenn wir gleich bequem gruppieren, die Aufgabe in Buchstaben:

$$E_{30} = \left\{\begin{matrix} H_{30} & + H_{31} & + H_{32} & + \ldots + \\ H_{30\,1/2} & + H_{31\,1/2} & + H_{32\,1/2} & + \ldots + H_z \end{matrix}\right\}.$$

Dies liefert durch Benutzung der obigen Formel:

$$E_{30} = \left\{\begin{matrix} H\,\dfrac{2\,D_{30}}{2\,D_{30}} & + H\,\dfrac{2\,D_{31}}{2\,D_{30}} & + \ldots \\ \dfrac{H}{2\,D_{30}}\left\{II_p^{1/2}\, D_{30} + I_p^{1/2} D_{31}\right\} & + \dfrac{H}{2\,D_{30}}\left\{II_p^{1/2} D_{31} + I_p^{1/2} D_{32}\right\} & + \ldots \end{matrix}\right\}$$

oder

$$E_{30} = \frac{H}{2\,D_{30}}\left\{\begin{matrix} \left(2 + II_p^{1/2}\right) D_{30} & + \left(2 + II_p^{1/2}\right) D_{31} & + \ldots + \\ I_p^{1/2}\, D_{31} & + I_p^{1/2}\, D_{32} & + \ldots + \end{matrix}\right\}$$

oder

$$E_{30} = \frac{H}{2}\left\{\left(2 + \Pi_p^{1/2}\right)\frac{S_{30}}{D_{30}} + I_p^{1/2}\frac{S_{31}}{D_{30}}\right\}.$$

Je nachdem wir R_{30}^{31} oder R_{30}^{30} einführen, erhalten wir hieraus:

a) $E_{30} = \frac{H}{2}\left\{\left(2 + \Pi_p^{1/2}\right) + R_{30}^{31}\left(2 + I_p^{1/2} + \Pi_p^{1/2}\right)\right\}$ oder

b) $E_{30} = \frac{H}{2}\left\{\left(2 + I_p^{1/2} + \Pi_p^{1/2}\right) R_{30}^{30} - I_p^{1/2}\right\}.$

Aus a) ergibt sich die Formel für die nachzahlbare halbj. Leibrente:

$$\mathfrak{E}_{30} = \frac{H}{2}\left\{\Pi_p^{1/2} + R_{30}^{31}\left(2 + I_p^{1/2} + \Pi_p^{1/2}\right)\right\}$$

und aus b) erhält man (für $H = 1/2$): E_{30} = nahe $R_{30} - 1/4$ d. h. der Barwert einer halbjährlichen vorschüssigen Leibrente von $1/2$ ℳ ist um 0,25 ℳ geringer als der Barwert einer jährlich zahlbaren vorschüssigen Leibrente von 1 ℳ.

Barwert der halbjährlichen Rente von $1/2$ ℳ	=	15,84
„ „ ganzjährlichen „ „ 1 „	=	16,09
Differenz . .		0,25

Haberl stellt folgende Aufgabe:

Eine 40jährige Person hat Anspruch auf eine sofort zahlbare Rente von 600 fl. Welche Rente kann sie bei halbjährigem, vorschußweisem Rentenbezuge beanspruchen unter Berechnung von 4 %?

Die Barwerte der beiden Leibrenten müssen gleich sein. Also

$$600\left(1 + R_{40}^{41}\right) = \frac{x}{2}\left(2 + \Pi_4^{1/2}\right) + 2 + \Pi_4^{1/2} + I_4^{1/2}\Big) R_{40}^{41} \text{ oder}$$

$$600 \cdot 16{,}092043 = \frac{x}{2}\left\{2{,}980581 + 4{,}000384 \times 15{,}092943\right\}$$

15,092943 · 4,000384	
60,371772	
4528	31,679 i 9655,765800 = **304,799**
1207	152 043600
60	25 327304
60,377567	3 141952
+ 2,980581	290836
63,358148 : 2	bei Haberl 305,03, also 0,23 fl Differenz.
31,679074 = Barwert der halbjährigen Rente von 1 ℳ.	

Übungsaufgabe: Eine 30jährige Person will sich den Anspruch auf eine halbjährlich zahlbare Leibrente H erwerben, deren Auszahlung zum

erstenmale stattfinden soll, wenn er gerade das 60. Lebensjahr vollendet hat. Als Gegenleistung will er sofort beginnende und bis zu seinem 50. Lebensjahr dauernde ganzjährliche Prämien zahlen. Wie groß werden diese sein?

Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{P}_{30} + \mathfrak{P}_{31} + \ldots \mathfrak{P}_{50} = H_{60} + H_{60^{1/2}} + H_{61} + H_{61^{1/2}} + \ldots$$

Wir müssen die beiderseitigen Leistungen auf denselben Termin fällig machen; wir wählen als solchen das vollendete 60. Lebensjahr des Versicherten. Hierfür ist:

$$\mathfrak{P}\,\frac{S_{30} - S_{51}}{D_{60}} = \frac{H}{2}\left\{2 + II_p^{1/2} + R_{60}^{61}\left(2 + I_p^{1/2} + II_p^{1/2}\right)\right\}$$

Also Formel $\mathfrak{P} = \dfrac{H\left\{2 + II_p^{1/2} + R_{60}^{61}\left(2 + I_p^{1/2} + II_p^{1/2}\right)\right\} D_{60}}{S_{30} - S_{51}}$

Bemerkung: Um den Barwert der halbjährlichen Rente für ein beliebiges Alter des Versicherten festzustellen, kapitalisiert man sie zunächst auf das vollendete 60. Lebensjahr durch obige Formel und prolongiert oder diskontiert dieses Kapital dann durch Multiplikation mit $\frac{D_a}{D_\alpha}$ auf das gewählte Alter.

Arithmetisch steigende Leibrenten.

Aufgabe: Wie groß ist die Einlage, welche eine αjährige Person machen muß, um sich eine dauernde Leibrente zu erwerben, deren erster bei Vollendung ihres a^{ten} Lebensjahres auszuzahlender Betrag A ist, und deren weitere Beträge sich jedesmal um den Anfangsbetrag vergrößern?

Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{E}_\alpha = 1A_a + 2A_{a+1} + \ldots + (z - (a - 1)\,A_z.$$

Zu dem Coeffizienten des letzten Gliedes kommt man durch folgende Überlegung:

Die Differenz zwischen dem Altersindex und dem Coeffizienten der einzelnen Glieder ist $a - 1$. Das muß also auch beim letzten Gliede der Fall sein, d. h. wenn der Altersindex z ist, muß der Coeffizient $z - (a - 1)$ sein.

Zerlegen wir die einzelnen Glieder der A-Reihe in Summanden von der Größe A und schreiben diese vertikal untereinander, so erhalten wir:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \begin{cases} A_a + A_{a+1} + A_{a+2} + \ldots + A_z \\ \quad + A_{a+1} + A_{a+2} + \ldots + A_z \\ \qquad\qquad + A_{a+2} + \ldots + A_z \\ \qquad\qquad\qquad + \ldots + A_z \\ \qquad\qquad\qquad + \ldots + A_z \end{cases}$$

Die Horizontalreihen dieser Gruppe bilden sich gleichbleibende dauernde Leibrenten, deren Auszahlung jedesmal um 1 Jahr später beginnt. Setzen wir dafür die Barwerte, die sie beim Vertragsabschluß haben, so kommt:

$$\mathfrak{E}_\alpha = A\,\frac{S_a}{D_\alpha} + A\,\frac{S_{(a+1)}}{D_\alpha} + A\,\frac{S_{(a+2)}}{D_\alpha} + \ldots + A\,\frac{S_{(z)}}{D_\alpha}$$

$$\text{oder } \mathfrak{E}_\alpha = \frac{A}{D_\alpha}\left\{ S_a + S_{(a+1)} + S_{(a+2)} + \ldots + S_{(z)} \right\}$$

In der gleichen Weise, wie man Reihen diskontierter Zahlen der Lebenden zu obigen Summenwerten zusammengefaßt hat, hat man auch die Summen dieser Summenwerte gebildet und in einer Tabelle zusammengestellt. Wir bezeichnen sie mit Σ (Sigma) und nennen sie kurz Sigmawerte. Es ist hiernach also z. B.

$$\Sigma_{36} = S_{36} + S_{37} + \ldots S_z\,.$$
$$\Sigma_{37} = \qquad S_{37} + S_{38} + \ldots S_z,$$

woraus noch folgt $\Sigma_{36} = S_{36} + \Sigma_{37}$ oder allgemein

$$\Sigma_x = S_x + \Sigma_{(x+1)}\,.$$

Wenden wir diese Bezeichnung an, so erhalten wir:

$$\mathfrak{E}_\alpha = A \cdot \frac{\Sigma_a}{D_\alpha}\,.$$

In dieser Formel bedeutet, wie auch früher, a das Alter des Versicherten, bei dessen Vollendung er den ersten Rentenbetrag erhält, und α dasjenige Alter, bei dessen Vollendung der Versicherte die Gegenleistung macht. Da bezüglich dieser beiden Größen keine anderen Voraussetzungen gemacht sind, so liefert obige Formel folgende Regel:

Der Wert einer vorauszahlbaren, nachzahlbaren, aufgeschobenen oder gegen Nachleistung zahlbaren arithmetisch steigenden Normalrente, d. h. einer solchen, bei der jeder folgende Betrag um die Anfangsrente

größer ist als der vorhergehende, läßt sich in der Weise ermitteln, daß man den ersten Rentenbetrag mit einem Bruche multipliziert, dessen Zähler der Sigmawert für das Alter des Versicherten bei Empfang des ersten Rentenbetrages, und dessen Nenner die diskontierte Zahl der Lebenden ist, die zu dem Alter des Versicherten gehört, für welches der Wert der Rente bestimmt werden soll.

Nimmt man als ersten Rentenbetrag die Einheit, dann erhält man als Einlage den Tarifwert. Wir wollen ihn in Anlehnung an das Wort Differenz mit Δ bezeichnen; dann ist also $\Delta_{\alpha}^{a} = \frac{\Sigma_a}{D_{\alpha}}$ die Einlage des Versicherten beim Alter von α Jahren für eine dauernde Rente, die bei seinem Alter von a Jahren mit 1 ℳ beginnt und bis zum letztmöglichen Termin jährlich um 1 ℳ steigt.

Ist der jährliche Zuwachs von dem ersten Rentenbetrag verschieden, lautet also die Aufgabe in Buchstaben etwa so:

$$\mathfrak{E}_{\alpha} = A_a + (A + Z)_{a+1} + A + 2\,Z)_{a+1} + \ldots\ldots ,$$

dann läßt sich die Leistung der Bank etwa auf folgende Weise in eine sich gleichbleibende Leibrente und eine arithmetisch steigende Normalrente zerlegen:

$$\mathfrak{E}_{\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} (A - Z)_a + (A - Z)_{a+1} + \ldots\ldots + (A - Z)_z + \\ \quad Z_a + \quad 2\,Z_{a+1} + \ldots\ldots (z - (a - z)\,Z_z \end{array} \right.$$

Setzt man für diese Reihen die Barwerte, so ist:

$$1.\quad \mathfrak{E}_{\alpha} = \frac{(A - Z)\,S_a + Z\,\Sigma_a}{D_{\alpha}}.$$

Löst man im Zähler des Bruches die Klammer auf und schreibt dann aus den 2 Gliedern, in denen Z vorkommt, dieses heraus, so erhält man:

$$2.\quad \mathfrak{E}_{\alpha} = \frac{A\,S_a + Z\,(\Sigma_a - S_a)}{D_{\alpha}} = \frac{A\,S_a + Z \cdot \Sigma_{(a+1)}}{D_{\alpha}}.$$

Die letzte Formel hätte man auch durch folgende Zerlegung der ursprünglichen Reihe erhalten können:

$$\mathfrak{E}_{\alpha} = A_a + A_{a+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_z$$
$$+ Z_{a+1} + 2\,Z_{a+1} + \ldots + (z - a)\,A_z.$$

Beide Formeln gehen für Z = A über in:

$$\mathfrak{E}_{\alpha} = A \cdot \frac{\Sigma_a}{D_{\alpha}}.$$

Beispiel: Welche einmalige Zahlung muß eine 35jährige Person machen, damit sie von ihrem 36. Lebensjahre ab eine dauernde jährlich um 20 ℳ steigende Leibrente beziehen kann, deren erster Betrag 100 ℳ ist?

Aufgabe in Ziffern: $\mathfrak{E}_{35} = 100_{36} + 120_{37} + 140_{38} + \ldots$

Die erste Art der Zerlegung liefert:

$$\mathfrak{E}_{35} = \begin{cases} 80_{36} + 80_{37} + \ldots + \\ 20_{36} + 2 \cdot 20_{37} + \ldots + \end{cases}$$

oder nach Formel 1. $\mathfrak{E}_{35} = \dfrac{80\, S_{36} + 20\, \Sigma_{36}}{D_{35}}$ oder

$$\mathfrak{E}_{35} = \frac{80 \cdot 337858{,}12 + 20 \cdot 4615667{,}15}{20927{,}30} =$$

$$\frac{119341992{,}6}{20927{,}30} = \mathbf{5702{,}695}.$$

Die zweite Zerlegung ist:

$$\mathfrak{E}_{35} = 100_{36} + 100_{37} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 100_z$$
$$+ \quad 20_{37} + 2 \cdot 20_{38} + \ldots + (z - 36)\, 20_z$$

und liefert $\mathfrak{E}_{35} = \dfrac{100\, S_{36} + 20\, \Sigma_{37}}{D_{35}}$ oder

$$\mathfrak{E}_{35} = \frac{33785812 + 20 \cdot 4277809{,}03}{20927{,}30} = \mathbf{5702{,}695}.$$

Die temporäre arithmetisch steigende Leibrente.

Aufgabe: Welche einmalige Einlage muß eine αjährige Person machen, um von ihrem vollendeten a^{ten} bis zum ihrem vollendeten $(e - 1^{ten})$ Lebensjahre einschließlich eine mit A Mark beginnende und jährlich um A Mark wachsende Leibrente genießen zu können?

Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{E}_\alpha = A_a + 2\, A_{a+1} + \ldots (e - a)\, A_{e-1}.$$

Den Faktor $(e - a)$ des letzten Gliedes bestimmt man also: Bei jedem Gliede ist der Unterschied zwischen Index und Coeffizient $= a - 1$, also auch bei demjenigen, welches den Index $(e - 1)$ trägt. Bezeichnen wir nun den gesuchten Faktor vorläufig mit x, dann ist also $e - 1 - x = a - 1$ oder $x = e - a$.

Um bereits hergeleitete Formeln anwenden zu können, ergänzen wir die temporäre Leibrente zu einer dauernden und ziehen dann die zu diesem Zwecke zugefügten Werte wieder ab.

Dies liefert:

$$\mathfrak{E}_\alpha = A_a + 2A_{a+1} + \ldots + (e-a)A_{e-1} + [e-(a-1)A_e \left\{+\ldots z-(a-1)\right\} A_z]$$
$$- [(e-(a-1)A_e + \ldots z-(a-1)A_z]$$

Der Wert der vervollständigten Rente ist zur Zeit des Vertragsabschlusses $A\frac{\Sigma_a}{D_\alpha}$.

Der zugefügte und wieder in Abzug gebrachte Teil ist eine aufgeschobene arithmetisch steigende und dauernde Leibrente. Sie läßt sich zerlegen in eine sich gleichbleibende dauernde Leibrente von der Größe $(e-a)A$, die beim Alter e des Versicherten beginnt, und in eine ebenfalls beim Alter e mit A beginnende und jährlich um A steigende Leibrente, deren Werte also $(e-a)A\frac{S_e}{D_\alpha}$ und $A\frac{\Sigma_e}{D_\alpha}$ sind.

Es ist also:

$$\mathfrak{E}_\alpha = A\frac{\Sigma_a}{D_\alpha} - \left\{(e-a)A\frac{S_e}{D_\alpha} + A\frac{\Sigma_e}{D_\alpha}\right\} \text{ oder}$$

$$\mathfrak{E}_\alpha = A\cdot\frac{\Sigma_a - \Sigma_e - (e-a)S_e}{D_\alpha}.$$

Setzt man $A = 1$, so erhält man wieder den Tarifwert

$$\Delta_\alpha^{a(e} = \frac{\Sigma_a - \Sigma_e - (e-a)S_e}{D_\alpha}.$$

Es ist die Einlage, die eine αjährige Person machen muß, um von ihrem vollendeten a^{ten} bis zum vollendeten $(e-1^{ten})$ Jahre eine Leibrente zu beziehen, die mit 1 ℳ beginnt und jährlich um 1 ℳ steigt.

Ist der jährliche Zuwachs von dem ersten Rentenbetrag wieder verschieden, lautet also die Aufgabe etwa:

$$\mathfrak{E}_\alpha = A_a + (A+Z)_{a+1} + \ldots + (A+[e-(a-1)]Z_{e-1}),$$

dann zerlegt man die Bankleistungen wieder in der vorher schon besprochenen Weise und erhält:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \left\{\begin{array}{l}(A-Z)_a + (A-Z)_{a+1} + \ldots\ldots + (A-Z)_{e-1} \\ \quad + Z_a + \quad 2Z_{a-1} + \ldots\ldots\ldots (e-a)Z_{e-1}\end{array}\right.$$

und hieraus auf Grund früher hergeleiteter Formel:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \frac{(A-Z)(S_a - S_e)}{D_\alpha} + Z\cdot\frac{\Sigma_a - \Sigma_e - (e-a)S_e}{D_\alpha}, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{E}_\alpha = \frac{(A - Z)(S_a - S_e) + Z\left[\Sigma_a - \Sigma_e - (e - a)\, S_e\right]}{D_\alpha}$$

Beispiel: $\mathfrak{E}_{35} = 100_{40} + 120_{41} + \ldots + 300_{50}$.

Auflösung:

$$\mathfrak{E}_{35} = \frac{80\,(S_{40} - S_{51}) + 20\left[\Sigma_{40} - \Sigma_{51} - 11\, S_{51}\right]}{D_{35}}$$

$$\begin{array}{rl} S_{40} = & 263\,643{,}60 \\ S_{51} = & 121\,993{,}68 \\ \hline S_{40} - S_{51} = & 141\,659{,}92 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \Sigma_{40} = & 3\,380\,094{,}91 \\ \Sigma_{51} = & 1\,260\,698{,}82 \\ \hline \Sigma_{40} - \Sigma_{51} + = & 2\,119\,396{,}09 \\ 11\, S_{51} = & 1\,341\,820{,}48 \end{array}$$

$$\mathfrak{E}_{35} = \frac{80 \cdot 141\,659{,}92 + 20 \cdot 777\,576{,}61}{20\,927{,}30} = \mathbf{1284{,}65}.$$

Die Bankreserve.

Weil wir nunmehr jede Art von Leibrenten mit Hülfe der entsprechenden Tarifwerte in Einzelkapitalien verwandeln und diese dann durch Multiplikation mit K_α^a = wann es fällig ist / wann es fällig werden soll auf einen beliebigen Termin fällig machen können, weil ferner die Bankreserve für ein beliebiges Alter des Versicherten aus einer Vereinigung von solchen Leibrenten besteht, die auf das betreffende Alter fällig gemacht sind, so bietet die Behandlung der Bankreserve nichts Neues mehr. Wir beschränken uns daher auf die Lösung folgender Aufgabe:

Jemand hat im Alter von 35 Jahren bei einer Lebensversicherungsgesellschaft 5752,70 ℳ bar eingezahlt. Dafür hat die Gesellschaft die Verpflichtung übernommen, ihm von seinem vollendeten 36. Jahre ab eine dauernde, mit 100 ℳ beginnende und jährlich um 20 ℳ steigende Leibrente zu zahlen. Wie viel Mark muß die Gesellschaft für diese Person nach 10 Jahren unmittelbar nach Zahlung der Rente in Reserve haben?

Nach 10 Jahren hat nur die Gesellschaft noch Verpflichtungen. Sie entsprechen einer arithmetisch um 20 ℳ steigenden Leibrente für eine nunmehr 45jährige Person, deren ersten Betrag ℳ 300 sie bei Vollendung des 46. Lebensjahres empfangen soll. Nennen wir den Barwert dieser Verpflichtungen $\mathfrak{B}_{45}$, so ist also: