$$\mathfrak{B}_{45} = 300_{46} + 320_{47} + 340_{48} + \ldots \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{B}_{45} = \frac{280 \cdot S_{46} + 20\,\Sigma_{46}}{D_{45}} =$$

$$\frac{280 \cdot 176\,583{,}53 + 20 \cdot 2\,028\,614{,}14}{12\,743{,}15} = \mathbf{7063{,}85}\ \mathcal{M}$$

Versicherungsrechnung.

Versicherung auf den Todesfall.

Die Versicherungen auf den Todesfall bezwecken die Fürsorge für die Hinterbliebenen. Sie sind weit häufiger als die in der Regel nur auf das eigene Wohl Bedacht nehmenden Versicherungen auf den Erlebensfall. Oft aber sind beide Versicherungsarten miteinander verbunden. Mit Rücksicht hierauf wollen wir ein für allemal festsetzen, daß bei Versicherungen auf den Sterbefall der Index a dasjenige Lebensjahr anzeigen soll, an dessen Ende, sei es überhaupt, sei es frühestens, die Versicherungssumme ausgezahlt werden kann. Das vorhergehende, also das $(a - 1)^{te}$ Jahr, nach dessen Vollendung die Versicherung in Kraft tritt, wollen wir durch den Index v anzeigen. Ähnliches soll gelten für e und w.

Kapitalversicherung auf den in einem vorherbestimmten Jahre etwa erfolgenden Sterbefall mit Auszahlung am Schlusse des Sterbejahres.

Eine αjährige Person macht eine Einlage E, um den Erben ein Kapital von K zuzuwenden, das, wenn sie gerade in ihrem a^{ten} Lebensjahre sterben sollte, diesen am Ende dieses Jahres ausbezahlt werden müßte. Der früher oder später erfolgte Tod würde nur den Verlust der Einlage nach sich ziehen. Welche Beziehung besteht zwischen E und K?

Zur Ermittelung dieser Beziehung nehmen wir wieder an, daß die Bank mit allen Personen, die nach der benutzten Sterblichkeitstafel das Alter α erreichen, den gleichen Vertrag abschließt. Dadurch käme sie in den Besitz von $L_\alpha \cdot E_\alpha$ Mark. Diese müßte sie so lange verzinsen, bis die überlebenden Personen ihr a^{tes} Lebensjahr vollendet hätten, und dann

müßte sie die durch Zinseszins angewachsene Summe an die Erben derer, die gerade in ihrem a^{ten} Lebensjahre gestorben sind, auszahlen. Durch die Zinseszinsen wächst die Summe $L_\alpha \cdot E_\alpha$ auf $L_\alpha \cdot E_\alpha \cdot \pi^{(a-\alpha)}$ an. Im a^{ten} Lebensjahre sterben $(L_{a-1} - L_a)$ Personen. Auf jede von diesen entfällt also:

$$K_a = \frac{L_\alpha \cdot E_\alpha \cdot \pi^{a-\alpha}}{L_{a-1} - L_a} \text{ Mark.}$$

Kürzt man den Bruch durch π^{a-1}, so erhält man:

$$K_a = E_\alpha \cdot \frac{\frac{L_\alpha}{\pi^\alpha} \cdot \pi}{\frac{L_{a-1}}{\pi^{a-1}} - \frac{\pi L_a}{\pi^a}} \text{ oder } E_\alpha \cdot \frac{\pi \cdot D_\alpha}{D_{a-1} - \pi D_a}$$

oder endlich $K_a = \frac{\pi \cdot D_\alpha}{D_v - \pi D_a}$. Hieraus folgt $E_\alpha = K_a \frac{D_v - \pi D_a}{\pi D_\alpha}$

Setzt man $K = 1$, so erhält man den Tarifwert. Nennen wir ihn T^a_α, dann ist also:

$$T^a_\alpha = \frac{D_v - \pi D_a}{\pi D_\alpha}.$$

die Gegenleistung (Einlage) des Versicherten beim Alter von α Jahren für den Betrag von 1 ℳ, die, wenn er gerade innerhalb seines a^{ten} Lebensjahres stirbt, am Ende dieses Jahres seinen Erben auszuzahlen ist. Die Wirkung der Versicherung beginnt also mit dem Anfang und erlischt mit dem Ende des a^{ten} Lebensjahres. Führen wir den Tarifwert in die Formel ein, so lautet sie, $E_\alpha = K_a T^a_\alpha$.

Lebensversicherung.

Bei der Kapitalversicherung auf den Sterbefall innerhalb eines bestimmten Jahres wird die Versicherungssumme nur in dem Falle ausgezahlt, wenn der Tod des Versicherten gerade in dem betreffenden Jahre eintritt. Nun kann man aber gleichzeitig die gleiche Versicherung auch für jedes der weiteren Lebensjahre bis zum letztmöglichen Fall, das ist: bis zum $(z+1)^{ten}$ Jahre, abschließen. Eine solche Gesamtversicherung heißt dann Lebensversicherung. Diese besteht demnach aus weiter nichts,

als aus gleichzeitig abgeschlossenen Kapitalversicherungen für den Fall des Todes in dem einen oder andern der einzelnen aufeinanderfolgenden Lebensjahre des Versicherten. Die Einlage für eine Lebensversicherung besteht also auch aus den Einlagen für diese Einzelversicherungen.

Von den Kapitalbeträgen, die für die einzelnen Jahre versichert sind, kann nur ein einziger zur Auszahlung kommen, da der Versicherte nur einmal sterben kann. Zur Unterscheidung von der Rentenreihe, deren Einzelbeträge so oft gezahlt werden, als Zahltermine erlebt werden, sollen deshalb in den durch Buchstaben dargestellten Aufgaben an Stelle der + Zeichen Strichpunkte gesetzt werden. Die diskontierten Beträge müssen auch hier wieder durch + Zeichen verbunden werden, da man ja in deren Summe die Einlage für die Gesamtversicherung erhält.

Aufgabe: Jemand will im Alter von α Jahren sein Leben auf eine Summe K versichern, die seinen Erben am Schlusse des Jahres, in dem er selbst stirbt, ausbezahlt werden soll. Wie groß muß seine Einlage E sein?

$$E_\alpha = K_a \,;\, K_{a+1} \,;\, K_{a+2} \,;\, \ldots \,;\, K_z \,;\, K_{z+1}.$$

Die besondere Einlage für K_a beläuft sich auf $K\,T^a_\alpha$, diejenige für K_{a+1} auf $K \cdot T^{a+1}_\alpha$ usw. Die Indizes bei K können fehlen, weil die Erfüllungszeit schon an dem bei T stehenden Index ersichtlich ist.

Daher ist $E_\alpha = K\,T^a_\alpha + K\,T^{a+1}_\alpha + \ldots + K\,T^{z+1}_\alpha$.

Schreibt man K heraus und ersetzt die T-Symbole durch ihre Werte, so erhält man:

$$E_\alpha = K \left\{ \frac{D_{(a-1)} + \pi D_a}{\pi D_\alpha} + \frac{D_a - \pi D_{(a+1)}}{\pi D_\alpha} + \ldots + \frac{D_z - \pi D_{(z+1)}}{\pi D_\alpha} \right\}$$

oder

$$E_\alpha = \frac{K}{\pi D_\alpha} \left\{ \begin{array}{l} D_{a-1} + D_a + D_{(a+1)} + \ldots + D_z + \\ - \pi \left(D_a + D_{(a+1)} + \ldots + D_z + D_{(z+1)} \right) \end{array} \right\}$$

Die erste Reihe der D-Werte ist S_{a-1} oder S_v; die mit π multiplizierte Reihe ist S_a; denn das überschüssige Glied $D_{z+1} = o$, da am Ende des $(z+1)^{ten}$ Jahres keine Lebenden mehr vorhanden sind. Mit Anwendung dieser Vereinfachungen geht die obige Gleichung über in:

$$E_\alpha = K \frac{S_v - \pi S_a}{\pi D_\alpha}.$$

Aus ihr erhält man für $K = 1$ den Tarifwert

$$L_\alpha^a = \frac{S_v - \pi S_a}{\pi D_\alpha}.$$

Er ist die Gegenleistung, die eine αjährige Person für eine mit Beginn des a^{ten} Lebensjahres in Kraft tretende Lebensversicherung von 1 $\mathcal{M}$ macht, die am Schlusse ihres Sterbejahres den Erben ausbezahlt wird. Die Division mit πD_α kommt so häufig vor, daß es sich lohnt, sie in eine Multiplikation zu verwandeln. Setzen wir zu diesem Zwecke $\frac{1}{\pi D_\alpha} = V_\alpha$, so ist $L_\alpha^a = (S_v - \pi S_a) \cdot V_\alpha$ und

$$\mathfrak{E}_\alpha = K (S_v - \pi S_a) \cdot V_\alpha.$$

Die gefundenen Formeln sind anwendbar auf alle Arten von Lebensversicherungen auf einen gleichbleibenden Betrag, die bis zum letztmöglichen Fall auslaufen. Ein besonderer Fall liegt vor bei der dauernden Lebensversicherung, die vorhanden ist, wenn die Versicherung sofort bei Zahlung der Gegenleistung in Kraft tritt. Für diesen Fall ist $\alpha = a - 1 = v$. Bezeichnet man der Kürze wegen den zugehörigen Tarifwert L_v^a einfach mit L_v so ist

$$L_v = \frac{S_v - \pi S_a}{\pi D_v} = (S_v - \pi S_a) V_v.$$

Ersetzt man in dem letzten Ausdruck für L_v den Summenwert S_a durch $S_v - D_v$, und führt dann die Multiplikation mit π aus, so erhält man:

$$L_v = \frac{S_v - \pi S_v + \pi D_v}{\pi D_v} = \frac{\pi D_v - (\pi - 1) S_v}{\pi D_v} \text{ oder}$$

$$L_v = 1 - \frac{(\pi - 1) S_v}{\pi D_v} = 1 - (\pi - 1) S_v \cdot V_v \text{ oder auch}$$

$$L_v = 1 - \frac{\pi - 1}{\pi} \cdot \frac{S_v}{D_v} = 1 - \frac{\pi - 1}{\pi} S_v \cdot U_v.$$

Nun können die Werte von $\frac{\pi - 1}{\pi}$ ein für allemal berechnet, und, wie es in „Schlimbachs politischer Arithmetik" (S. 3) geschehen ist, tabellarisch zusammengestellt werden, so daß man einen gerade erforderlichen Wert jederzeit ablesen kann. Liegt eine solche Tabelle vor, dann können wir $\frac{\pi - 1}{\pi}$ einfach mit c bezeichnen, und dann läßt sich unsere Formel so schreiben:

$$L_v = 1 - c \cdot S_v \cdot U_v.$$

Nun ist aber $S_v \cdot U_v = \frac{S_v}{D_v} = R_v$ d. i. gleich dem Tarifwert einer vorauszahlbaren dauernden Rente von 1 ℳ; mithin ist auch

$$L_v = 1 - c \cdot R_v.$$

Beispiel: Eine 50jährige Person schließt mit einer Bank eine dauernde Lebensversicherung auf den Betrag von 10 000 ℳ ab. Wie groß muß die Einlage sein?

Die Versicherung tritt mit Beginn des 51ten, also gleich nach Schluß des 50ten, Jahres in Kraft, und die Auszahlung der versicherten Summe kann frühestens am Schlusse des 51ten Lebensjahres statthaben. Es ist demnach $v = 50$ und $a = 51$. Wir haben also:

1) $$\mathfrak{E}_{50} = 10000 \cdot \frac{S_{50} - \pi S_{51}}{\pi D_{50}} = 4\,819{,}10 \text{ ℳ}.$$

2) $$\mathfrak{E}_{50} = 10000 \left\{1 - (\pi - 1) S_{50} \cdot V_{50}\right\}.$$

3) $$\mathfrak{E}_{50} = 10000 \left\{1 - c\, R_{50}\right\} = 10000 \cdot L_v.$$

Das häufige Vorkommen des Tarifwertes L_v läßt es zweckmäßig erscheinen, seine Werte für alle möglichen Fälle zu berechnen und systematisch zusammenzustellen. Auch läßt sich durch Einfügung dieses besonderen Wertes die allgemeine Formel kürzer gestalten. Es war

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{K} \frac{S_v - \pi S_a}{\pi D_\alpha}.$$

Ersetzt man S_a durch $S_v - D_v$ und erweitert noch durch D_v, so erhält man:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{K} \cdot \frac{S_v - \pi S_v + \pi D_v}{\pi D_\alpha} \cdot \frac{D_v}{D_v} \text{ oder}$$

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{K} \cdot \frac{\pi D_v - (\pi - 1) D_v}{\pi D_v} \cdot \frac{D_v}{D_\alpha} \text{ oder}$$

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{K} \cdot L_v K_\alpha^v.$$

Bis zum letztmöglichen Fall können auch solche Versicherungen auslaufen, die kontraktmäßig erst ein oder mehrere Jahre nach Zahlung der Einlage in Kraft treten, so daß, wenn der Tod des Versicherten in dieser Zeit eintritt, die Bank die Versicherungssumme nicht auszuzahlen braucht. Die Zeit, in der die Bank trotz des Todes des Versicherten keine Verpflichtung zur Zahlung hat, und die Erben des Versicherten kein Recht

auf die Zahlung der versicherten Summe erlangen, nennt man Karenz- oder Wartezeit, und Versicherungen, bei denen eine solche Wartezeit vereinbart ist, heißen aufgeschobene Versicherungen. Ein Beispiel soll noch besonders zeigen, daß die vorher aufgestellte Formel auch für solche Versicherungen gilt.

Eine 50jährige Person versichert ein Kapital K zahlbar am Schlusse ihres Sterbejahres aber nur, wenn ihr Tod nach Ablauf ihres 60. Lebensjahres eintritt. Wie viel muß sie einlegen?

In Buchstaben lautet die Aufgabe:

$$\mathfrak{E}_{50} = \ldots \underset{a}{K_{61}} \; ; \; \underset{a+1}{K_{62}} \; \ldots \; K_z \; ; \; K_{z+1}.$$

Die Auszahlung der Versicherungssumme erfolgt frühestens am Schlusse des 61. Lebensjahres, während die Versicherung am Schlusse des 60. Jahres in Kraft tritt. Wäre der Vertrag am letzteren Termin überhaupt erst geschlossen worden, so läge eine dauernde Lebensversicherung einer 60jährigen Person vor, für welche die Einlage $\mathfrak{E}_{60} = K\,L_{60}$ betrüge. Nun schließt die Person aber schon im Alter von 50 Jahren den Vertrag und macht auch dann schon die Einlage. Diese muß daher kleiner sein als diejenige, welche sie erst im Alter von 60 Jahren zahlen müßte, und sie wird aus letzterer erhalten, wenn man diese unter Berücksichtigung der Lebenswahrscheinlichkeit um 10 Jahre diskontiert. Das aber geschieht durch Multiplikation mit $K_{50}^{60} = \frac{D_{60}}{D_{50}}$.

Mithin lautet die Formel:

$$\mathfrak{E}_{60} \cdot \frac{D_{60}}{D_{50}} = \mathfrak{E}_{50} = K\,L_{60} \cdot K_{50}^{60} \text{ oder allgemein } \mathfrak{E}_{\alpha} = K\,L_{v} \cdot K_{\alpha}^{v}.$$

Aufgeschobene Versicherungen werden besonders bei zweifelhaftem Gesundheitszustand des Versicherten abgeschlossen. Ist nun für solche Versicherungen die Wartezeit ein für allemal auf 5 Jahre festgesetzt, dann berechnet man auch die Barwerte der Kapitalversicherung für den Erlebensfall nach 5 Jahren für jedes Alter. Die Berechnung der Einlage für die aufgeschobene Lebensversicherung erhält man dann durch einfache Multiplikation des Wertes $K\,L_{\alpha+5}$ mit $K_{\alpha}^{\alpha+5}$.

Die temporäre oder kurze Lebensversicherung.

Eine temporäre Lebensversicherung liegt vor, wenn die Versicherungsdauer auf eine bestimmte Anzahl von Jahren beschränkt ist, die Versicherung also mit Ablauf dieser Jahre wieder außer Kraft tritt. Um für die temporäre Versicherung eine Formel zu gewinnen, stellt man sie dar als Differenz zweier dauernden Versicherungen, von denen die eine nach vollendetem v^{ten}, die andere nach dem w^{ten} Lebensjahre in Kraft tritt.

Man erhält dann:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{K}\frac{S_v - \pi S_a}{\pi D_\alpha} - \mathfrak{K}\frac{S_w - \pi S_e}{\pi D_\alpha} \text{ oder}$$

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{K}\frac{S_v - S_w - \pi (S_a - S_e)}{\pi D_\alpha}.$$

Bezeichnet man den Tarifwert, den man wieder für $\mathfrak{K} = 1$ erhält, mit $L_\alpha^{a(e}$, so ist

$$L_\alpha^{a(e} = \frac{S_v - S_w - \pi (S_a - S_e)}{\pi D_\alpha}$$

die Einlage des Versicherten beim Alter von α Jahren für eine auf 1 ℳ abgeschlossene sofort beginnende oder auch aufgeschobene temporäre Lebensversicherung, welche mit dem Anfang des a^{ten} Lebensjahres in Kraft tritt und mit Beginn des e^{ten} Lebensjahres wieder erlischt.

Es ist $L_\alpha^{a(e)} = L_\alpha^a - L_\alpha^e$. Die Berechnung des Tarifwertes ist also leicht ausgeführt, wenn es einmal nötig sein sollte; denn häufig kommt die kurze Versicherung in der Praxis nicht vor.

Lebensversicherung gegen Prämien.

Bis jetzt haben wir stets angenommen, daß die verschiedenen Arten der Lebensversicherung durch eine einmalige im Alter von α Jahren gemachte Einlage erworben wurden. Es verschlägt aber nichts, die einmalige Einlage durch Prämien irgend welcher Art zu ersetzen. Geschieht es, so gehört die Aufgabe zum Teil der Leibrenten- zum Teil der Lebensversicherungsrechnung an und wird dadurch gelöst, daß man die Einlage $\mathfrak{E}_\alpha$ einmal durch die Prämien d. i. Leibrentenwerte, dann durch die Versicherungswerte ausdrückt, und die beiden Ausdrücke einander gleichstellt.

Beispiel 1: Welche dauernde jährliche Prämie muß eine 35jährige Person für eine Versicherung von 10 000 ℳ zahlen, wenn 4 % gerechnet werden? Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{P}_{35} + \mathfrak{P}_{36} + \ldots + \mathfrak{P}_z = \mathfrak{K}_{36}\,;\,\mathfrak{K}_{37}\,;\,\ldots\,;\,\mathfrak{K}_z\,;\,\mathfrak{K}_{z+1}.$$

Gleichung: $\mathfrak{P}\,\frac{S_{35}}{D_{35}} = \mathfrak{K}\,\frac{S_{35} - \pi\,S_{36}}{\pi\,D_{35}}.$

Formel: $\mathfrak{P} = \mathfrak{K} \cdot \frac{S_{35} - \pi\,S_{36}}{\pi\,S_{35}}.$

Berechnung:

$$\begin{aligned} \pi\,S_{36} &= 337858{,}12 \cdot 1{,}04 \\ &\ \ 13514\,32 \\ &= 351372{,}44 \\ S_{35} &= 358785{,}42 \\ S_{35} - \pi\,S_{36} &= 7412{,}98 \\ \times\,10000 &= 741298{,}00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi \cdot S_{35} &= 358787{,}42 \cdot 1{,}04 \\ &= 15351{,}42 \\ &\ \ 373136{,}83 \end{aligned}$$

3731368 i 74129800 00 = **198,67**
36816116 0
3233800 40
248705 68
24823 58

Auch ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{K} \cdot \frac{L_{35}}{1 + R_{35}} = \frac{10\,000 \cdot 0{,}340601}{17{,}1444} = \mathbf{198{,}67}.$

Beispiel 2: Dauernde Lebensversicherung gegen Anzahlung und Prämien.

Eine 40jährige Person versichert 10 000 ℳ. Sie zahlt sofort 1 200 ℳ und dann von Jahr zu Jahr bis zu ihrem Lebensende eine gleiche Prämie. Wie groß muß diese sein?

Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{E}_{40} + \mathfrak{P}_{41} + \mathfrak{P}_{42} + \ldots + \mathfrak{P}_z = \mathfrak{K}_{41}\,;\,\mathfrak{K}_{42}\,;\,\mathfrak{K}_{43}\,\ldots\,;\,\mathfrak{K}_z\,;\,\mathfrak{K}_{z+1}$$

Gleichung: $\mathfrak{E} + \mathfrak{P} \cdot R_{40} = \mathfrak{K} \cdot L_{40}.$

Formel: $\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{K} \cdot L_v - \mathfrak{E}}{R_{40}}$

$$\mathfrak{P} = \frac{10\,000 \cdot 0{,}381042 - 1\,200}{15{,}0929} = 15{,}09 \text{ i } 2\,710{,}4200 = \mathbf{172{,}96}$$

110 1130
44 6270
14 4412
8576

Interesse dürfte folgende hierhingehörende Zusammenstellung erwecken:

Ein 25jähriger Mann versichert ein Kapital von 2000 ℳ.

1. Zahlt er die Gegenleistung sofort, dann beträgt sie 553,64 ℳ;

2. Zahlt er sie erst nach 10 Jahren, dann beträgt sie 891,005 ℳ.
3. Schlösse er den Vertrag erst im Alter von 35 Jahren und bezahlte dann sofort, dann betrüge sie 681,20 ℳ.

Die größere Leistung unter 2. ist also begründet: Stirbt der Versicherte innerhalb der ersten 10 Jahre nach dem Vertragsschluß, der im Alter von 25 Jahren stattfindet mit der Bedingung, daß die Versicherung sofort in Kraft tritt, die Einlage aber erst nach 10 Jahren gemacht wird, dann muß die Bank das versicherte Kapital auszahlen ohne überhaupt eine Gegenleistung zu erhalten.

Bankreserve bei Lebensversicherungen.

Auch die Lebensversicherungsgesellschaft wird durch die Entgegennahme der Einlage bezw. der Prämien zur Schuldnerin des Versicherten und muß dieses bei Aufstellung ihrer jährlichen Bilanz dadurch zum Ausdruck bringen, daß sie eine für die betreffende Versicherung genügende Deckung zurücklegt. Zur Ermittelung dieses Deckungskapitals, das man auch Polizenwert oder Bankreserve nennt, für einen bestimmten Zeitpunkt kann man wieder 2 Wege einschlagen. Entweder benutzt man die bis dahin gemachten oder die von da ab noch zu machenden Leistungen der beiden Parteien. In beiden Fällen muß man deren Werte für den betreffenden Termin feststellen und dann ihren Unterschied bestimmen. Einige Beispiele sollen dies näher erläutern.

I. Bankreserve für eine dauernde Lebensversicherung gegen dauernde Prämien.

Eine 34jährige Person zahlt für 1000 ℳ versichertes Kapital eine dauernde Prämie. 1. Wie groß ist diese? 2. Wie groß ist die Reserve nach 12 Jahren unmittelbar vor der Prämienzahlung?

Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{P}_{34} + \mathfrak{P}_{35} + \ldots + \mathfrak{P}_z = \mathfrak{K}_{35}\,;\,\mathfrak{K}_{36}\,;\,\ldots\,;\,\mathfrak{K}_z\,;\,\mathfrak{K}_{(z+1)}.$$

Gleichung: $\mathfrak{P}\,\frac{S_{34}}{D_{34}} = \mathfrak{K}\,\frac{S_{34} - \pi\,S_{35}}{\pi\,D_{34}}.$

Formel: $\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{K}\,(S_{34} - \pi\,S_{35})}{\pi\,S_{34}}.$

Berechnung: $\mathfrak{P} = \frac{1000 \cdot 7612{,}75}{1{,}04 \cdot 380749{,}59} = \mathbf{19{,}225}.$

Die Bankreserve

a) aus den bereits gemachten Leistungen.

α) Der Versicherte hat 12 Prämien gezahlt und zwar

$$\mathfrak{P}_{34} + \mathfrak{P}_{35} + \ldots + \mathfrak{P}_{45}.$$

Diese bilden eine temporäre Leibrente; ihr Gesamtwert beim Alter des Versicherten von 46 Jahren beträgt $\mathfrak{P} \cdot \frac{S_{34} - S_{46}}{D_{46}}$ oder

$$\frac{19{,}225 \cdot 204166{,}06}{12103{,}4} = 324{,}28 \text{ ℳ}.$$

β) Die Leistung der Bank ist eine temporäre Lebensversicherung für eine 34jährige Person auf 12 Jahre also $\mathfrak{K}_{35}; \mathfrak{K}_{36}; \ldots; \mathfrak{K}_{46}$.

Ihr Endwert ist $\mathfrak{K} \cdot \frac{S_{34} - \pi S_{35}}{\pi D_{46}} - \mathfrak{K} \cdot \frac{S_{46} - S_{47}}{\pi D_{46}}$ oder

$$1000 \cdot \frac{7612{,}75 - 5524}{1{,}04 \cdot 121034} = 165{,}92 \text{ ℳ}$$

Die Bankreserve beträgt demnach

$$\mathfrak{B}_{46} = 424{,}28 - 165{,}92 = \mathbf{158{,}36} \text{ ℳ}.$$

b) aus den noch ausstehenden Leistungen.

α) Der Versicherte hat noch $\mathfrak{P}_{46} + \mathfrak{P}_{47} + \ldots + \mathfrak{P}_z$ also eine vorschüssige Leibrente für eine 46jährige Person zu zahlen.

Ihr Anfangswert ist $\mathfrak{P} \frac{S_{46}}{D_{46}} = \frac{19{,}225 \cdot 176583{,}53}{12103{,}4}$ ℳ

β) Die Gesellschaft hat noch die Verpflichtung einer Lebensversicherung gegenüber einer 46jährigen Person. Der Barwert hiervon ist:

$$\mathfrak{K} L_{46} = \mathfrak{K} \cdot \frac{S_{46} - \pi S_{47}}{\pi D_{46}} = \frac{1000 \cdot 5524{,}19}{1{,}04 \cdot 12103{,}4}$$

Demnach ist die Bankreserve:

$$\mathfrak{B}_{46} = \frac{5524190 - 1{,}04 \cdot 19{,}225 \cdot 176583{,}53}{1{,}04 \cdot 12103{,}4} = \mathbf{158{,}37}.$$

Sind die Tarifwerte L und R berechnet, dann hat man kurz:

$$\mathfrak{B}_{46} = \mathfrak{K} L_{46} - \mathfrak{P}(1 - R_{46}) \text{ oder}$$

$$\mathfrak{B}_{46} = 438{,}863 - 19{,}225 \cdot 14{,}5896 = \mathbf{158{,}38}.$$

II. Bankreserve für eine aufgeschobene Lebensversicherung gegen temporäre Prämien.

Eine 40jährige Person will sich gegen sogleich beginnende und 10 mal zu entrichtende jährliche Prämien $\mathfrak{P}$ eine Lebensversicherung von $\mathfrak{K}$ ℳ erwerben, die aber erst bei Vollendung ihres 60. Lebensjahres in Kraft treten soll. Wie groß sind die Prämien und welchen Wert hat die Polize 1. der 55jährigen, 2. der 70jährigen Person?

Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{P}_{40} + \mathfrak{P}_{41} + \ldots + \mathfrak{P}_{49} = \mathfrak{K}_{61}\,;\ \mathfrak{K}_{62}\ \ldots\,;\ \mathfrak{K}_z\,;\ \mathfrak{K}_{z+1}.$$

Gleichung: $$\mathfrak{P}\,\frac{S_{40} - S_{50}}{D_{40}} = \mathfrak{K} \cdot \frac{S_{60} - \pi\, S_{61}}{\pi\, D_{40}}.$$

Formel: $$\mathfrak{P} = \mathfrak{K} \cdot \frac{S_{60} - \pi\, S_{61}}{\pi\,(S_{40} - S_{50})}.$$

Für $\mathfrak{K} = 1000$ und $p = 4\,\%$ ergibt sich $\mathfrak{P} =$ **24,185** ℳ.

1. Polizenwert der 55jährigen Person.

a) aus den bereits gemachten Leistungen.

Weil die Zahlungspflicht der Gesellschaft erst mit dem Beginn des 61. Lebensjahres des Versicherten anfängt, so liegen beim vollendeten 55. Lebensjahre des Versicherten nur Leistungen des letzteren vor. Ihr Wert ist die Nachleistung, die der 55jährige statt der 10 gezahlten Prämien hätte machen können. Sie beträgt

$$\mathfrak{B}_{55} = \mathfrak{P} \cdot \frac{S_{40} - S_{50}}{D_{55}}.$$

Für $\mathfrak{P} = 24{,}185$ ist $\mathfrak{B}_{55} =$ **434,561**.

Anmerkung: Die Stellung der Bank gegenüber dem 55jährigen ist zwar auch eine andere als die gegenüber dem 40jährigen. Das kommt aber dadurch zum Ausdruck, daß man unter Berücksichtigung der Lebenswahrscheinlichkeit prolongiert. So ist ja:

$$\mathfrak{B}_{55} = \mathfrak{E}_{40} \cdot \frac{D_{40}}{D_{55}} = \frac{\mathfrak{P}\,(S_{40} - S_{50})}{D_{40}} \cdot \frac{D_{40}}{D_{55}} = \mathfrak{P} \cdot \frac{S_{40} - S_{50}}{D_{55}}.$$

b) aus den noch ausstehenden Leistungen.

Der Versicherte hat alle seine Verpflichtungen bereits bei seinem vollendeten 49. Lebensjahre erfüllt; es stehen also Leistungen nur noch

von seiten der Bank aus. Sie bilden eine um 5 Jahre aufgeschobene Versicherung für eine 55jährige Person und haben einen Barwert von

$$\mathfrak{B}_{55} = \mathfrak{K} \cdot \frac{S_{60} - \pi S_{61}}{\pi D_{65}} \text{ M.}$$

Auch diese Formel liefert $\mathfrak{B}_{55} = \mathbf{434{,}501}$ M.

2. Polizenwert der 70jährigen Person.

a) aus den bereits gemachten Leistungen.

α) Die Leistungen des Versicherten sind angewachsen auf:

$$\mathfrak{P} \cdot \frac{S_{40} - S_{50}}{D_{70}} = 1385{,}864 \text{ M.}$$

β) Weil die Zahlungspflicht der Bank mit dem vollendeten 60. Lebensjahre des Versicherten in Kraft getreten ist, so hat die Bank bereits 10 Jahre hindurch das Risiko getragen. Sie hat also gewissermaßen eine auf 10 Jahre temporäre Lebensversicherung einer 60jährigen Person glücklich überstanden. Der Endwert dieser temporären Versicherung ist:

$$\mathfrak{E}_{70} = \mathfrak{K} \cdot \frac{S_{60} - \pi S_{61} - (S_{70} - \pi S_{71})}{\pi D_{70}} = \mathbf{667{,}296} \text{ M.}$$

Aus beiden Berechnungen ergibt sich:

$$\mathfrak{B}_{70} = 1385{,}864 - 667{,}296 = \mathbf{718{,}57} \text{ M.}$$

b) aus den noch ausstehenden Leistungen.

Nach den unter 1b gemachten Bemerkungen hat nur die Gesellschaft noch Verpflichtungen. Sie bilden eine dauernde Lebensversicherung gegenüber einer 70jährigen Person. Ihr Barwert ist:

$$\mathfrak{B}_{70} = \mathfrak{K} \cdot \frac{S_{70} - \pi S_{71}}{\pi D_{70}} \text{ oder } \mathfrak{B}_{70} = \frac{1719886}{1{,}04 \cdot 2301{,}43} = \mathbf{718{,}568}.$$

Anmerkung: Auch hier führen wie überall die R- und L-Werte schneller zum Ziel.

Versicherungen, die unter der Bedingung abgeschlossen werden, daß die versicherte Summe unmittelbar nach dem Ableben, also am Schlusse des Sterbetages, gezahlt wird.

I. Kapitalversicherung auf den Todesfall an einem bestimmten Tage.

Unter der Voraussetzung, daß das Absterben der Versicherten innerhalb eines Jahres gleichmäßig vor sich geht, entfallen auf jeden Tag des

a^{ten} Jahres $\frac{1}{365}(L_v - L_a)$ Sterbefälle. Ist nun eine αjährige Person eine Versicherung auf K Mark eingegangen unter der Bedingung, daß diese am Schlusse des p^{ten} Tages ihres a^{ten} Lebensjahres, aber nur dann, wenn sie gerade an diesem Tage stirbt, ausbezahlt werden sollen, dann ist der auf sie entfallende Anteil gleich der prolongierten Gesamteinzahlung geteilt durch die Anzahl der gerade am p^{ten} Tages ihres a^{ten} Lebensjahres sterbenden Versicherten, also

$$A = \frac{\mathfrak{E}_\alpha \cdot L_\alpha \cdot \pi^{v-\alpha+\frac{p}{365}}}{\frac{1}{365}(L_v - L_a)} = \mathfrak{E} \cdot \frac{\frac{S_\alpha}{\pi^\alpha} \cdot \pi^{\frac{p}{365}}}{\frac{1}{365}\left(\frac{L_v}{\pi^v} - \frac{\pi L_a}{\pi^a}\right)} \text{ oder}$$

$$A = \mathfrak{E}_\alpha \cdot \frac{\pi^{\frac{p}{365}} \cdot D_\alpha}{\frac{1}{365}(D_v - \pi D_a)} \text{ folglich:}$$

$$\mathfrak{E}_\alpha = A \cdot \frac{(D_v - \pi D_a)\pi}{365 \cdot \pi^{\frac{p}{365}} D_\alpha \pi} = \frac{A \cdot \pi}{365 \cdot \pi^{\frac{p}{365}}} \cdot T_\alpha^a.$$

II. Kapitalversicherung für den Todesfall in einem bestimmten (dem a^{ten}) Jahre mit Auszahlung der versicherten Summe am Schlusse des Sterbetages.

Die Versicherung setzt sich zusammen aus den Einzelversicherungen, die für jeden der aufeinanderfolgenden Tage des a^{ten} Jahres abgeschlossen werden. Die Einlage dafür ist also gleich der Summe der Einlagen für die Einzelversicherungen. Es ist somit:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \frac{A \cdot \pi \cdot T_\alpha^a}{365} \cdot \left\{ \frac{1}{\pi^{1/365}} + \frac{1}{\pi^{2/365}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\pi^{365/365}} \right\}$$

Erweitert man die Klammer durch $\pi^{\frac{1}{365}} - 1$, so erhält man:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \frac{A \cdot \pi}{365} \cdot T_\alpha^a \cdot \frac{\pi - 1}{\pi(\pi^{1/365} - 1)} \text{ oder } \mathfrak{E}_\alpha = \frac{A \cdot (\pi - 1)}{365(\pi^{1/365} - 1)} \cdot T_\alpha^a.$$

$A \cdot T_\alpha^a$ ist der Wert einer Kapitalversicherung von A Mark für eine αjährige Person, die nur dann und zwar am Schlusse des Jahres ausgezahlt werden, wenn die Person gerade innerhalb des a^{ten} Jahres

stirbt. Dieser Betrag ist also mit $\frac{\pi - 1}{365\left(\pi^{1/365} - 1\right)}$ zu multiplizieren, um daraus die Summe zu erhalten, die man einzahlen muß, wenn das versicherte Kapital am Schlusse des Sterbetages gezahlt werden soll.

Berechnung dieses Faktors für 3 %.

$$\log.\ 1{,}03 = 0{,}0128372$$
$$^1/_{365} \cdot \log.\ 1{,}03 = 0{,}0000351704$$
$$1{,}03^{1/365} = 1{,}0000810378$$
$$365 \cdot \left(1{,}03^{1/365} - 1\right) = 0{,}02957880$$
$$0{,}0295788 \text{ i } 0{,}03 = \mathbf{1{,}01424}.$$

Der Umwandlungsfaktor bei 3 % beträgt also 1,01424 und entspricht einem Zuschlag von 1,414 %.

III. Dauernde Lebensversicherung mit Auszahlung am Schlusse des Sterbetages.

Versichert die Person nicht nur für das a^{te} Jahr, sondern auch für die sämtlichen folgenden Lebensjahre, dann schließt sie eine dauernde Lebensversicherung ab. Die einmalige Einlage hierfür erhält man wieder durch Zusammenzählen der Einzeleinlagen, die für die nur für die einzelnen Jahre geltenden Versicherungen gemacht werden müssen. Schreibt man den gemeinschaftlichen Faktor heraus, so erhält man als Gesamteinlage:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \frac{A\,(\pi - 1)}{365\left(\pi^{1/365} - 1\right)} \left\{ T_\alpha^a + T_\alpha^{a+1} + \ldots\ T_\alpha^{z+1} \right\} \text{ oder}$$

$$\mathfrak{E}_\alpha = \frac{A\,(\pi - 1)}{365\left(\pi^{1/365}\ 1\right)} L_\alpha^a.$$

Auch bei der dauernden Lebensversicherung erhält man die Einlage, die gemacht werden muß, damit die versicherte Summe am Schlusse des Sterbetages ausgezahlt wird, aus derjenigen, die zu zahlen ist, wenn die versicherte Summe erst am Ende des Sterbejahres fällig sein soll, dadurch, daß man letztere mit $\frac{\pi - 1}{365\left(\pi^{1/365} - 1\right)}$, bei 3prozentiger Verzinsung also mit 1,01424, multipliziert.

Lebensversicherung auf arithmetisch steigende Beträge.

Ein αjähriger Mann will mit einer Lebensversicherung folgenden Vertrag abschließen: Die Bank soll seinen Erben am Schlusse seines

Sterbejahres den Betrag $\mathfrak{B}$ auszahlen, wenn er in seinem a^{ten}, den Betrag $2\mathfrak{B}$, wenn er in seinem $(a+1)^{ten}$ Lebensjahre sterben sollte usw., sodaß also die Versicherungssumme mit jedem Jahre, das er noch erlebt, um den Anfangsbetrag größer wird. Welche einmalige Einzahlung wird er machen müssen, wenn die Gesellschaft ohne weiteres auf seinen Wunsch eingeht?

Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{B}_a\,;\, 2\,\mathfrak{B}_{a+1}\,;\, 3\,\mathfrak{B}_{a+2}\,;\, \ldots\ldots [z-(a-2)]\,\mathfrak{B}_{(z+1)}$$

oder auch:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{B}_a\,;\, \mathfrak{B}_{a+1}\,;\, \mathfrak{B}_{a+2}\,;\, \ldots\ldots\,;\, \mathfrak{B}_{z+1}\\ \mathfrak{B}_{a+1}\,;\, \mathfrak{B}_{a+2}\,;\, \ldots\ldots\,;\, \mathfrak{B}_{z+1}\\ \mathfrak{B}_{a+2}\,;\, \ldots\ldots\,;\, \mathfrak{B}_{z+1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\,;\, \mathfrak{B}_{z+1}\end{aligned}$$

Jede von den obigen Horizontalreihen bildet eine dauernde Lebensversicherung auf den gleichbleibenden Betrag $\mathfrak{B}$. Sie können der Reihe nach erworben werden durch Barzahlung von der Größe:

$$\mathfrak{B}\,\frac{S_{a-1} - \pi\, S_a}{\pi\, D_\alpha},\quad \mathfrak{B}\,\frac{S_a - \pi\, S_{a+1}}{\pi\, D_\alpha},\quad \mathfrak{B}\,\frac{S_{a+1} - \pi\, S_{a+2}}{\pi\, D_\alpha}\ \text{2c.}$$

Die Summe dieser Barzahlungen ist die gesuchte einmalige Einlage. Sie beträgt also:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \frac{\mathfrak{B}}{\pi\, D_\alpha}\left\{\begin{aligned}&S_{a-1} + S_a + S_{a+1} + \ldots + S_z\\ &-\pi\,(S_a + S_{a+1} + \ldots\ldots + S_z + S_{z+1})\end{aligned}\right\}$$

oder $\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{B}\,\dfrac{\Sigma_{a-1} - \pi\,\Sigma_a}{\pi\, D_a}$.

Für $\mathfrak{B} = 1$ erhalten wir den Tarifwert. Er ist:

$$\Lambda_\alpha^a = \frac{\Sigma_{a-1} - \pi\,\Sigma_a}{\pi\, D_\alpha}.$$

Dieser Tarifwert ist die Einlage oder Gegenleistung des Versicherten beim Alter von α Jahren für eine dauernde Lebensversicherung auf steigende Beträge, die mit dem a^{ten} Lebensjahre des Versicherten in Kraft tritt und zwar auf 1 ℳ und dann jedes Jahr bis zum letztmöglichen Termin um 1 ℳ zunimmt.

Führen wir diesen Tarifwert in die Formel ein, so heißt sie einfach

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{B}\,\Lambda^a.$$

Wenn der erste Versicherungsbetrag von dem jährlichen Zuwachs verschieden ist, wenn also die Aufgabe in Buchstaben etwa lautet:

$$\mathfrak{E}_\alpha = M_a\,;\,(M + \mathfrak{B})_{a+1}\,;\,(M + 2\,\mathfrak{B})_{a+2}\,;\,\ldots\ldots,$$

dann läßt sich $M = N + \mathfrak{B}$ setzen, und die rechte Seite kann dann auf folgende Weise in 2 Reihen zerlegt werden:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \begin{cases} N_a\,;\quad N_{a+1}\,;\quad N_{a+2}\,;\,\ldots \\ +\,\mathfrak{B}_a\,;\,2\,\mathfrak{B}_{a+1}\,;\,3\,\mathfrak{B}_{a+2}\,;\,\ldots \end{cases}$$

Die erste dieser Reihen ist eine Versicherung auf den gleichleibenden Betrag N und hat den Wert:

$$N\,\frac{S_{a-1} - \pi\,S_a}{\pi\,D_\alpha}.$$

Die zweite hat den Wert:

$$\mathfrak{B}\,\frac{\Sigma_{a-1} - \pi\,\Sigma_a}{\pi\,D_\alpha}.$$

Durch Addition erhält man:

$$\mathfrak{E}_\alpha + \frac{N\,(S_{a-1} - \pi\,S_a) + \mathfrak{B}\,(\Sigma_{a-1} - \pi\,\Sigma_a)}{\pi\,D_\alpha}.$$

Temporäre Versicherung auf arithmetisch steigende Beträge.

Soll die Versicherung nicht bis zum letztmöglichen Fall auslaufen, sondern mit Beginn des e^{ten} Lebensjahres eingestellt werden, dann heißt die Aufgabe in Buchstaben:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{B}_a\,;\,2\,\mathfrak{B}_{a+1}\,;\,\ldots\,(e-a)\,\mathfrak{B}_{e-1}.$$

Vervollständigen wir die rechte Seite so, daß die Versicherung bis zum letztmöglichen Fall ausläuft, und nehmen dann den zugefügten Teil wieder weg, so erhalten wir:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{B}\,;\,2\,\mathfrak{B}_{a+1}\,;\,\ldots\,(e-a)\,\mathfrak{B}_{e-1}\,;\,(e-a+)\,\mathfrak{B}_e\,\ldots\ldots$$
$$-\,\{(e-a+1)\,\mathfrak{B}_e\,;\,(e-a+2)\,\mathfrak{B}_{e+1}\,\ldots\}$$

Der erste Teil der rechten Seite hat den Wert:

$$\mathfrak{B}\,\frac{\Sigma_{a-1} - \pi\,\Sigma_a}{\pi\,D_\alpha}.$$

Die abgezogene Klammer läßt sich auch also schreiben:

$$(e-a)\,\mathfrak{B}_e\,;\,(e-a)\,\mathfrak{B}_{e+1}\,;\,(e-a)\,\mathfrak{B}_{e+2}\,;\,\ldots$$
$$\mathfrak{B}_e\,;\,2\,\mathfrak{B}_{e+1}\,;\,3\,\mathfrak{B}_{e+2}\,;\,\ldots$$

Sie besteht also aus einer Versicherung auf gleichbleibende und einer Versicherung auf arithmetisch steigende Beträge, die beide mit Beginn des e^{ten} Lebensjahres in Kraft treten. Der Wert dieser Versicherungen in dem Zeitpunkte, in dem die Einlage gemacht wird, ist:

$$(e-a)\,\mathfrak{B}\,\frac{S_{e-1}-\pi\,\Sigma_e}{\pi\,D_\alpha} \text{ und}$$

$$\mathfrak{B}\,\frac{\Sigma_{e-1}-\pi\,\Sigma_e}{\pi\,D_\alpha}.$$

Somit erhalten wir als Barwert der temporären Versicherung:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{B}\,\frac{\Sigma_{a-1}-\pi\,\Sigma_a-\left\{(e-a)\,(S_{e-1}-\pi\,S_e)+\frac{\Sigma_{e-1}-\pi\,\Sigma_e}{\pi\,D_\alpha}\right\}}{\pi\,D_\alpha} \text{ oder}$$

$$\mathfrak{E}_\alpha = \mathfrak{B}\,\frac{\Sigma_{a-1}\,\Sigma_{e-1}-\pi\,(\Sigma_a-\Sigma_e)-(e-a)\,(S_{e-1}-\pi\,S_e)}{\pi\,D_\alpha}.$$

Wenn bei der temporären Versicherung auf arithmetisch steigende Beträge der erste Versicherungswert von dem jährlichen Zuwachs verschieden ist, dann lautet die Aufgabe in Buchstaben etwa so:

$$\mathfrak{E}_\alpha = M_a\,;\,(M+1\,\mathfrak{B})_{a+1}\,;\,\ldots\,(M+(e-a-1)\,\mathfrak{B})_{e-1}.$$

Ersetzen wir M wieder durch $N+\mathfrak{B}$, so wird daraus:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \begin{Bmatrix} N_a\,; & N_{a+1}\,; & \ldots & N_{e-1} \\ \mathfrak{B}_a\,; & 2\,\mathfrak{B}_{a+1}\,; & & (e-a)\,\mathfrak{B}_{e-1} \end{Bmatrix}$$

Die erste Horizontalreihe bildet eine temporäre Lebensversicherung auf gleichmäßige Beträge. Beim Alter α des Versicherten hat sie den Barwert:

$$N\cdot\frac{S_{a-1}-S_{e-1}-\pi\,(S_a-S_e)}{\pi\,D_\alpha}.$$

Die zweite Horizontalreihe ist eine temporäre Lebensversicherung auf arithmetisch steigende Beträge von der Beschaffenheit, daß der erste Versicherungsbetrag mit dem jährlichen Zuwachs übereinstimmt. Ihr Barwert beim Alter α des Versicherten ist:

$$\mathfrak{B}\cdot\frac{\Sigma_{a-1}-\Sigma_{e-1}-\pi\,(\Sigma_a-\Sigma_e)-(e-a)\,(S_{e-1}-\pi\,S_e)}{\pi\,D_\alpha}.$$

Die Einlage für die vorliegende Versicherung erhalten wir durch Addition dieser beiden Beträge. Es ist also:

$$\mathfrak{E}_{\bar{\alpha}} = \frac{N\left\{S_{a-1} - S_{e-1} - \pi\left(S_a - S_e\right)\right\} +}{\pi D_\alpha}$$

$$\frac{\mathfrak{B}\left\{\Sigma_{a-1} - \Sigma_{e-1} - \pi_{\bar{a}}^{v}\left(\Sigma_a - \Sigma_e\right) - (e-a)\left(S_{e-1} - \pi S_e\right)\right\}}{\pi D_\alpha}.$$