Sch. Pr. 13

Die Konstruktionsaufgabe im Gymnasialunterrichte.

Von

Oberlehrer Robert Ley.

Gdu 10 (1902)

Düsseldorf
Druck von L. Voss & Cie. Königliche Hofbuchdruckerei
1902.

Progr.-Nr. 486.

Schul. Pro.
13

S. Pr. 13

LANDES-
UND STADT-
BIBLIOTHEK
DÜSSELDORF

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK
DÜSSELDORF

14.G.483

Die Konstruktionsaufgabe im Gymnasialunterrichte.

Öffnet man den Jahresbericht irgend einer unserer höheren Lehranstalten, so findet man die planimetrische Aufgabe in den Pensen der einzelnen Klassenstufen kaum erwähnt. Dafs der Schüler Aufgaben lösen lernt, wird wohl als selbstverständlich angenommen. Das ist auch eine berechtigte Ansicht, da doch die Lehren der Mathematik überhaupt nicht ihrer selbst wegen gelehrt und gelernt werden, sondern vielmehr in ihrer Anwendung und Verwertung den hauptsächlichen Bildungswert besitzen. Richtet man aber den Blick auf die sprachlichen Unterrichtsgegenstände, so ändert sich die Sache gar sehr. Dort ist, besonders für die vorgerückten Klassen, stets genau angegeben, was im Laufe des Jahres der zur Vertiefung und Einprägung des Gelernten verarbeitete Stoff gewesen ist. Immer ist angegeben, welcher Schriftsteller und welche Werke des einzelnen Autors gelesen worden sind. Für jedes Schuljahr findet im voraus eine genaue Beratung darüber statt, was den Schülern der einzelnen Klassen im sprachlichen Unterrichte geboten werden soll. Noch mehr; die Unterrichtsbehörde hat von Zeit zu Zeit bestimmt angegeben, welche Schriftsteller in der Schule studiert werden sollen und welche nicht gelesen werden dürfen. Solche Vorschriften galten und gelten nicht für einzelne Anstalten, ja nicht einmal für eine einzelne Provinz. Im Gegenteil liest jeder Tertianer Cäsar und Ovid, jeder Sekundaner Cicero und Homer, jeder Primaner Horaz und Plato, mag er nun ein rheinisches oder ein ostpreufsisches Gymnasium besuchen. Tritt er von seiner Anstalt in eine andere über, so findet er das nämliche Lernmaterial oder vielmehr dasselbe Übungsmaterial vor. Was er zu Hause geübt hat, wird ihm in der neuen Heimat abverlangt, so dafs er ohne wesentlichen Zeitverlust in den neuen Verhältnissen zurecht kommt. Wie ganz anders verhält es sich mit dem mathematischen Übungsmateriale und zumeist mit den planimetrischen Aufgaben! Geht ein Schüler von einer Anstalt zur andern, so findet er in den seltensten Fällen gleiche Forderungen. Häufig genug werden an dem neuen Orte Aufgaben behandelt, von denen er vielleicht noch nichts gehört hat. Dann bedarf es vieler Zeit und Anstrengung, bis er seinen Mitschülern gleich steht. Zu den ersten Lücken kommen bald neue hinzu. Die Lust am Lernen geht verloren. Ein Schüler, der bis dahin in allen Unterrichtsgegenständen voll entsprach, findet auf dem ersten Zeugnisse, das ihm die neuen Lehrer ansstellen mufsten, das betrübende Mangelhaft. Ist er deshalb zu tadeln? Sicherlich nicht. Gerade so schlimm ist die zweite Möglichkeit, wo der neu eingetretene Schüler Aufgaben lösen soll, die er schon früher kennen gelernt hat. Er wird übermütig, traut sich bald zuviel zu, vernachlässigt das Unterrichtsfach und geht durch

seine eigene Schuld zurück. An einer anderen Stelle weiss er sich natürlich nicht in dem Maſse zu helfen wie seine Gefährten, ist also doppelt übel gestellt. Beispiele dieser Art hat jeder Lehrer in seiner Erfahrung schon gefunden. Es gab eine Zeit, — und zuweilen hört man es noch jetzt — wo man von einer besonderen mathematischen Begabung redete und erklärte, dieser oder jener Schüler könne einfach keine Mathematik begreifen und sei doch sonst glücklich beanlagt. Diese Zeiten sind vorüber, und Dank den Fortschritten auf dem Gebiete der Unterrichtstechnik werden die Anklagen gegen Mathematik und Mathematiklehrer immer seltener. Wer heute in den übrigen Fächern ein guter Schüler ist, leistet auch in der Mathematik wenigstens das Erforderliche und umgekehrt, wenn nur der pflichttreue Eifer vorhanden ist. Trotzdem bleiben Klagen von mancherlei Art nicht aus. Woher sie entstehen, ob sie berechtigt sind oder nicht, soll hier nicht erörtert werden.

Zweck der vorliegenden Besprechung ist nur ein Vorschlag zur Vereinfachung. In der letzten Zeit wurde und wird so viel uniformiert, damit auch der Massenunterricht die gewünschten Erfolge aufweise Warum soll auf dem Felde der Mathematik, und zwar in seinem schwierigsten Teile, nicht ebenfalls etwas geschehen? Gefürchtet wird sie ja ohne Zweifel, mag diese Furcht nun mit Recht oder mit Unrecht bestehen. Es ergiebt sich demnach die Frage, was zu thun ist, damit es mit der Fähigkeit unserer Schüler, geometrische Aufgaben zu lösen, besser wird. Günstiger als früher steht es bereits in diesem Punkte. Vergangen sind die traurigen Tage, wo die Schüler die Auflösungen buchstäblich errieten, wo einige helle Köpfe zum Ziele gelangten, während die meisten sich vergebens abmühten. Selten kommt es noch vor, daſs nach Ablauf der für eine Probearbeit angesetzten Frist leere Blätter abgegeben werden.

Über das Wie ist nur wenig zu bemerken. Denn kein praktischer Mathematiker stellt seine Aufgaben nach Willkür und planlos. Vielmehr gruppiert er den Übungsstoff, so daſs seine Schüler an Musterbeispielen — vielleicht an einem einzigen — die Lösung von vielen ähnlichen Aufgaben mit Hülfe der sogenannten Bestimmungsfiguren ohne erhebliche Schwierigkeit finden. Das Entwerfen und Verwerten solcher Hülfsfiguren mag an einem der ersten Beispiele gezeigt werden. Der Schüler bezeichnet das verlangte Dreieck ABC zum Beginne der Analysis mit XYZ, indem er das, was er sucht, als unbekannte Gröſse betrachtet. Soll nun das Dreieck aus anderen Stücken, und besonders aus dem Unterschiede der Seiten XY und YZ, hergestellt werden, so bildet er ihn, indem er etwa das kleinere YZ als YU auf YX abträgt und U mit Z verbindet. So entsteht ein kleines Dreieck XUZ. Wir nennen es das Bestimmungsdreieck, weil es am leichtesten aus den gegebenen Stücken hergestellt wird und das gewünschte Dreieck nach stets wiederkehrenden Regeln bestimmt. Es enthält eine Menge von Stücken, die auch im Hauptdreiecke vorkommen. Es liefert sofort zwei Punkte, X und Z, der gewünschten Figur. Aus ihm gewinnt man den fehlenden Punkt Y in bequemer Weise. Der Schüler erkennt an ihm ohne weiteres drei Eigenschaften: $XU = XY - YU = XY - YZ = c - a$, $XZ = b$ und $\sphericalangle UXZ = \sphericalangle \alpha$. Fällt er $ZW \perp XU$, so bekommt er die Höhe h_c, die dem Hülfsdreiecke und dem Hauptdreiecke gemeinschaftlich ist. Die zwei anderen Winkel lassen sich durch diejenigen des verlangten Dreiecks berechnen. $\sphericalangle XUZ$ ist Nebenwinkel von YUZ. Dieser hat als Basiswinkel von $\triangle YUZ$ mit dem $\sphericalangle Y = \sphericalangle \beta$ an der Spitze den Wert $R - \frac{\beta}{2}$. Darum ist $\sphericalangle XUZ = R + \frac{\beta}{2}$. Der letzte Winkel

wird am einfachsten als Unterschied zwischen XZY oder γ und dem zweiten Basiswinkel UZY im Betrage von $R - \frac{\beta}{2}$ aufgefafst. So wird $\sphericalangle XZU = \gamma - (R - \frac{\beta}{2})$. Indem die sehr oft vorkommende Substitution $R = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ benutzt wird, ergiebt die Ausrechnung: $\sphericalangle XZU = \frac{\gamma - \alpha}{2}$. Der Entwurf der Bestimmungsfigur und die Winkelberechnung erlauben Umänderung, was viel Belehrendes enthält. Selbstredend bleiben die Endergebnisse dieselben. Es sind ihrer sechs, die freilich dem Gedächtnisse eingeprägt werden müssen, aber jeden Augenblick leicht neu abgeleitet werden können: $UX = c - a$, $XZ = b$, $ZW \perp XU$ und $= h_c$, $\sphericalangle UXZ = \alpha$, $\sphericalangle ZUX = R + \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle XZU = \frac{\gamma - \alpha}{2}$. Das sind ausreichende Lösungselemente für $\triangle$ XUZ. Ist es gezeichnet, so giebt es trotz der Einfachheit der Verhältnisse noch eine Menge von Möglichkeiten, nach Festlegung von X und Z den letzten Eckpunkt Y zu erhalten. Das System solcher Bestimmungsfiguren hat sich mir für die aufeinander folgenden Stufen bei einer Probe vor der Klasse bis in die Prima hinein ganz vorzüglich bewährt. Man kann die Grund legenden Figuren sogar als Anschauungsmittel benutzen. Sie werden zu diesem Zwecke in vergröfsertem Mafsstabe auf festen Tafeln, etwa von den Schülern selbst, aufgezeichnet und diese Bilder im Klassenzimmer längere Zeit ausgehängt, damit sie sich dem Schüler fest einprägen. Dafs bei Wiederholungen auf diese Weise viel Zeit erspart wird, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Endlich findet der Schüler nach gehöriger Schulung die charakteristischen Figuren und die in ihnen vorkommenden Elemente auch ohne Hülfe des Lehrers.

Noch wichtiger als die Art und Weise der Behandlung, sowie die erforderliche Anleitung erscheint der Inhalt der Aufgaben. Welcher Art Konstruktionen sollen in den einzelnen Jahrgängen vorkommen? Man halte mir hier nicht entgegen, dafs die einschlägigen Aufgaben sich von selbst ergeben. Dieser Einwurf hat nur wenig Berechtigung; denn je älter der Schüler wird, desto gröfser wird das Übungsgebiet. Das Feld der geometrischen Aufgaben ist eben unendlich grofs, und in der Auswahl des ungeheuren Stoffes giebt es wieder zahlreiche Möglichkeiten. Der Fachmann wird vielleicht bemerken, dafs allerdings kein Schüler einer höheren Klasse zur Lösung aller Aufgaben angehalten werden darf, die mit den Lehren früherer Klassen bewältigt werden können, dafs es aber gewisse Aufgaben giebt, die man unbedingt dem Schüler einer bestimmten Klasse stellen darf. Wohl kann man solche für einen besonderen Standpunkt zugeschnittene Aufgaben ausfindig machen. Von jedem reifen Obertertianer fordert man mit Recht die Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes von neuer Grundlinie oder Höhe. Vom angehenden Primaner darf man ohne Bedenken die Lösung der Aufgabe vom goldenen Schnitte verlangen. Sieht man aber von solchen Aufgaben ab, die nach Art der Lehrsätze und in ihrem Rahmen behandelt werden — ihre Anzahl ist sehr beschränkt —, so tritt auch hier wieder die Frage auf, was für Aufgaben sind es, die ohne Bedenken jedem Schüler vorgelegt werden dürfen. Sollte es denn unmöglich sein, einen gewissen Kanon aufzustellen! Aufgabensammlungen sind in hinreichender Zahl, sogar in unheimlicher Menge vorhanden, und nichts liegt mir ferner als die Absicht, eine neue Sammlung auszuarbeiten. Nein, nur sichten soll man das unermefsliche Material, und zwar nicht nur von Anstalt zu Anstalt, sondern für gröfsere Bezirke. Bleibt es so, wie es jetzt gehalten wird, so herrscht Willkür; die alten Schäden und Klagen bleiben bestehen.

Wer an einer unvollständigen Schule die Mathematik allein vertritt, macht sich nach eigenem Ermessen seinen Plan und erreicht auch mit leichter Mühe, dafs seine Schüler am Schlusse bei der Abgangsprüfung nicht versagen. Auch ist es denkbar, dafs zwei Fachlehrer derselben Anstalt sich einigen. Schwierig ist dies dagegen bei grofsen Doppelanstalten mit vielen Mathematikern; es müfste denn spätestens im Anfange eines jeden Schuljahres der Bereich der zu stellenden Übungsaufgaben ebenso genau begrenzt werden, wie es beim Lesestoff der sprachlichen Fächer schon lange Brauch ist. Und schier unmöglich ist eine Harmonie von Anstalt zu Anstalt, von Stadt zu Stadt, von Provinz zu Provinz, wenn nicht — und diesen Gedanken anzuregen, ist mein Ziel — die vorgesetzte Behörde mit allgemein bindenden Vorschriften eintritt.

Auf der letzten Rheinischen Direktorenkonferenz ist eine These angenommen worden, nach der die Konstruktionsaufgabe in den Vordergrund des planimetrischen Unterrichtes treten soll. Die jüngsten Lehrpläne reden im Gegensatze zu früheren Bestimmungen ausdrücklich von den Konstruktionsaufgaben. Giebt man ihnen thatsächlich diese Bedeutung, so ist es nur noch ein Schritt, dafs man eine Ordnung für die Aufgaben der einzelnen Klassen aufstellt, wie sie für den Lehrstoff schon lange besteht. In jeder Untersekunda wird, um nur ein Beispiel herauszuheben, Ciceros Rede pro lege Manilia gelesen und ihr der Stoff für die häuslichen und die Klassenarbeiten entnommen. Sollte es da nicht angängig sein, dafs jeder Untersekundaner Konstruktionsaufgaben von einer gewissen Verwandtschaft zu lösen und anzuwenden angehalten wird? Wenn im gedachten Falle keine Einförmigkeit auf dem Gebiete des lateinischen Unterrichtes entsteht, dann giebt es im mathematischen noch weniger Langweiligkeiten, wo sich so viele Abänderungen bieten. Verschaffe man doch dem Untersekundaner, der in der Mathematik von fast allem etwas wissen und berechnen mufs, auch hier die Erleichterung, die ihm auf dem sprachlichen Felde gewährt wird. Ein lange gehegter Wunsch ist mit dem Wegfalle der Abschlufsprüfung in Erfüllung gegangen.*) Allein für die Oberprima ist mutatis mutandis dasselbe zu sagen. Denkt man an Prüfungen oder nicht, so bleibt noch immer der Übelstand der Ungleichheit und darum der Unsicherheit übrig, die bei keinem Zweige des gesamten gymnasialen Unterrichtes in solchem Mafse besteht, die so lange zum Verdrusse der Schüler und der Lehrer, des Elternhauses und der Schule den mathematischen Unterricht belastet hat.

Ohne nun in irgend einer Weise vorgreifen zu wollen, füge ich einen Vorschlag über die Verteilung der Konstruktionsaufgaben auf die einzelnen Klassen an. Dabei sei es mir gestattet, mich auf allgemeine Gesichtspunkte zu beschränken. Ein genaues Verzeichnis der einzelnen Aufgaben — der Kanon — kann ohne Schaden für die allgemeine Harmonie von Anstalt zu Anstalt überhaupt, und vielleicht auch in verschiedener Form, später aufgestellt werden.

Soll der Quartaner bereits an das Aufgabensystem herangeführt werden? Ich kann es nicht befürworten. Der jugendliche Schüler hat mit dem Begreifen und dem Aneignen des Lehrstoffes, der ihm so fremd entgegentritt, gerade genug zu thun. Dort, wo dem Quartaner thatsächlich Aufgaben vorgelegt werden, müssen sie ihm vorgemacht werden, da ihm die

*) Schon vor der Einführung der jüngsten Lehrpläne war der Entwurf der vorliegenden Abhandlung fertig. Mancherlei, was in ihr als Wunsch oder Vorschlag erscheint, ist nunmehr Vorschrift.

Lösungsmittel nicht zu Gebote stehen. Wie ein Winkel halbiert, eine Parallele gezogen wird, lernt er ähnlich, wie er früher einen Lehrsatz gelernt hat. Erst dann wird der Schüler mit Vorteil an die Aufgaben herantreten, wenn er die anschliefsenden Beweise mit den bereits bekannten und zu geistigem Eigentume verarbeiteten Lehren liefern kann. Und das ist erst möglich, wenn die Kreislehre begonnen worden ist, wenn er vom Kreise bereits mehr weifs, als dafs er das einfachste Muster einer krummen Linie mit gleichen Radien ist. Bei aller Achtung vor dem konstruktiven Vorgehen der neueren Methode, die den Unterricht sehr belebt und rege Teilnahme der Schüler weckt, bleibe ich bei dem Grundsatze, dafs der Anfangsunterricht nie sorgfältig genug vorgehen kann. Besser etwas weniger und sicher, als etwas mehr und unsicher. Je fester das Fundament, desto dauerhafter der Aufbau. Zudem ziehen die neuesten Vorschriften erst von der Untertertia ab die Konstruktionsaufgaben in den Kreis des Klassenpensums.

Der gut vorgebildete Untertertianer bewältigt mit Leichtigkeit die Elementaraufgaben und die fundamentalen Dreiecksaufgaben. Beherrscht er sie, so möge er tüchtig darin geübt werden, wie man die Dreiecke aus ihren Seiten, Winkeln und Transversalen verschiedener Art herstellt. Ausdrücklich sei noch erwähnt, dafs vorab nur wirkliche Stücke des verlangten Dreieckes, also keine Summen und Unterschiede von Strecken oder Winkeln, als Konstruktionsdaten vorkommen dürfen. Aufgaben dieser Art eignen sich erst später, wo vollständig zu bearbeitende Aufgaben gelöst werden sollen. Es wird hierauf dem Schüler nicht schwer fallen, zuerst Teildreiecke zu konstruieren und aus ihnen die Hauptfigur zu gewinnen. Auch Vierecke setzt er bequem aus ihren dreieckigen Elementen zusammen. Kreiskonstruktionen werden füglich für spätere Zeit aufbewahrt. Das Pensum der Klasse ist ja in der Geometrie nicht umfangreich. Allein das angedeutete Übungsmaterial ist sehr dehnbar, und zu bedenken bleibt noch, dafs der Untertertianer auch schon Algebra lernt und dafs im ganzen nur drei Wochenstunden zur Verfügung stehen.

In der Obertertia wird die Kreislehre zum Abschlufs gebracht und die Gleichheit der Figuren behandelt. Folglich bilden Kreiskonstruktionen und Verwandlungsaufgaben das hauptsächliche Übungsmaterial. Nimmt man die Kreislehre in der vorhergehenden Klasse bis zur Betrachtung von zwei Kreisen, schliefst man also mit dem Lehrsatze vom Sehnentangentenwinkel ab, so beginnt man die Kreisaufgaben nun sehr gut mit der Herstellung eines Dreieckes aus Grundlinie, Höhe und Winkel an der Spitze. Es folgt die Konstruktion der merkwürdigen Kreise innerhalb und aufserhalb des Dreieckes. Hieran gliedern sich diejenigen Aufgaben, die von mehreren Kreisen und ihrer gegenseitigen Lage reden. Die Verwandlungen schliefst man mit derjenigen eines Vieleckes in ein Quadrat ab und findet so einen bequemen Übergang zu den mehr rechnerischen Übungen aus der Flächenlehre. Dafs in der Obertertia die gewöhnlichen Dreiecks- und Vierecksaufgaben nicht unterbrochen werden dürfen, liegt auf der Hand. Was in der Untertertia übrig geblieben ist, gelangt jetzt zur Erledigung. Was dort nur kurz bearbeitet werden konnte, findet nun seine Übung und Erweiterung, etwa durch Zusatz von Determinationen.

Wir kommen zur Untersekunda, die trotz der Vereinfachung durch die letzten Lehrpläne — Wegfall von Trigonometrie und Stereometrie — noch hinreichend Schwierigkeiten bringt. Was hier die Konstruktionsaufgaben angeht, so sei es mir vergönnt anzu-

geben, wie ich es viele Jahre hindurch gehalten habe. Der reife Untersekundaner eines Progymnasiums mufs noch heute — und warum soll derjenige eines Gymnasiums weniger leisten? — wegen der Abgangsprüfung die Fähigkeit zeigen, eine Konstruktionsaufgabe in vollständiger Weise zu bearbeiten. Darum mufs er es lernen, der Lehrer es ihm zeigen. Hier ist die Stelle, wo der Schüler erfährt, wie eine sorgfältige Analysis eingerichtet wird, mag sie selbst oder der Beweis als unerläfsliches Stück der ganzen schriftlichen Lösung betrachtet werden. Zur Erreichung des Zieles leisteten mir Dreiecksaufgaben mit gegebenen Summen und Unterschieden von Seiten und Winkeln, sowie mit gegebenem Umfange vorzügliche Dienste. Grofs ist die Fülle und Mannigfaltigkeit, zumal wenn noch Anwendungen auf das Parallelogramm einbegriffen werden. Man erschrecke nicht davor; denn alles wird im voraus an den Bestimmungsfiguren rasch und leicht entwickelt und eingeprägt. Zur Ergänzung der Übungen in Kreisaufgaben nahm ich die Konstruktionen von Kreisen, die Linien berühren, Sehnen aus ihnen ausschneiden, Kreise berühren, halbieren oder rechtwinkelig schneiden und deren Radien gegeben sind. Auch sie eigneten sich gut zur Gewöhnung an eine regelmäfsige Analysis und boten zugleich die erwünschte Abwechselung. Trotz des ausgedehnten Arbeitsfeldes haben mir die Schüler bei der entscheidenden Arbeit in Konstruktionen selten versagt.

Mit Recht wird die Lehraufgabe der Obersekunda eine Erweiterung von derjenigen der Untersekunda genannt. Hält man daran fest, so ergiebt sich mit Leichtigkeit, welche Konstruktionen dem Obersekundaner vorgelegt werden sollen. Beherrscht er die Resultate der früheren Klasse, so wird er Aufgaben über Summen und Unterschiede von Dreieckshöhen nach Entwurf der Bestimmungsfiguren bald zu lösen vermögen. Ihm kann schon zugemutet werden, die in ihnen auftretenden wichtigen Konstruktionsstücke allein zu suchen. Sind doch Wiederholungen alter Ergebnisse zahlreich zu entdecken. An zweiter Stelle kommen Kreisaufgaben, bei denen der Radius nicht gegeben ist. Sie bilden ja eine erwünschte Fortsetzung der früheren Aufgaben ähnlicher Art. Bei ausreichender Zeit empfiehlt es sich, eine Gruppe solcher Aufgaben hinzuzunehmen, bei denen Summen und Unterschiede von Dreiecksseiten mit Projektionsunterschieden in der nämlichen Bestimmungsfigur erscheinen, so dafs wiederum frühere, leichtere Übungen wiederholt und abgerundet werden. Vielleicht erscheint der Vorschlag für die Obersekunda etwas beschränkt. Es darf aber nicht aufser acht gelassen werden, dafs in dieser Klasse die Ähnlichkeitslehre nicht nur wiederholt, sondern auch zu Ende geführt, also an Beispielen eingeübt werden soll, und dafs Aufgaben mit algebraischer Analysis ausdrücklich in den neuesten Vorschlägen genannt worden sind. Bekanntlich wird die Planimetrie in der Obersekunda zum Abschlusse gebracht. Das hat aber nicht zur Folge, dafs das Gebiet für die Konstruktionsaufgaben in der Prima keine Ausdehnung mehr erfährt. Solange auch noch für diese Klasse die Übungen in planimetrischen Aufgaben vorgeschrieben bleiben und der Abiturient eine solche vollständig schriftlich bearbeiten mufs, wird man auch in der Prima entsprechende Übungen unterrichtsmäfsig fortsetzen und ihren Bereich vergröfsern.

Zweierlei möchte ich für die Unterprima zur Regel erheben. Zuerst sind es Aufgaben, bei denen die Radien der merkwürdigen Dreieckskreise als Datum vorkommen. Hier vereinigen sich Dreiecks- und Kreiskonstruktionen zu einem harmonischen Abschlusse. Wiederum entwirft der Schüler unter der Überwachung des Lehrers die Bestimmungsfiguren

für die einzelnen Radien hintereinander und dann für Radien verschiedener Art. Ob nur auf den ein- und den umbeschriebenen Kreis oder auch auf die angeschriebenen Kreise Bezug genommen werden soll, möge dahingestellt bleiben. Sodann ist die Unterprima wohl die passende Klasse, in der die Ähnlichkeitslehre für umfangreichere Konstruktionen ihre Verwendung findet. Ich denke besonders an die Fälle, wo zuerst eine Figur gezeichnet wird, die der verlangten ähnlich ist, und das letzte Datum für die Herstellung der endgültig verlangten Figur aufgespart wird. Für die Unterprima kann das Gebiet der Konstruktionsaufgaben nur in bescheidenen Grenzen gehalten werden. Denn die Trigonometrie tritt so stark in den Vordergrund, dafs sie von den für Geometrie überhaupt vorgesehenen Stunden den bedeutenderen Teil wegnimmt. Dazu kommt noch, dafs die Stereometrie mindestens bis zur Betrachtung eckiger Körper in Lehre und Aufgabe behandelt werden mufs. Auf der Unterprima endlich möchte ich das Gebiet für die Konstruktionsaufgaben geradezu abgeschlossen wissen. Im Laufe der letzten Unterrichtsjahre sind ja so mancherlei Felder aufgeschlossen worden, dafs für Abänderung und Abwechselung hinreichend gesorgt ist. Die Oberprima mit der Reifeprüfung, deren schriftlicher Teil kurz nach Beginn des neuen Kalenderjahres erledigt zu werden pflegt, erlaubt daher kaum eine weitere Ausdehnung des planimetrischen Übungsgebietes. Sie ist in dieser Beziehung viel eher die Klasse des Abschlusses und der Wiederholung. Darum genügt es wohl, alte Aufgaben in Erinnerung zu bringen und Bestimmungsfiguren von neuem zu entwerfen. Das durchgearbeitete Material ist zu umfangreich, als dafs aus den gelegentlichen Nachbesprechungen ein Erraten der zu erwartenden Schlufsaufgabe möglich ist. Aufserdem wird auf der anderen Seite beim Festhalten des Planes im gesamten Aufgabensysteme der Prüfling selten von einer Aufgabe überrascht werden, weil sie niemals aus gänzlich unbekanntem Gebiete gewählt worden ist.

Zum Schlusse mögen noch zwei praktische Fragen ihre Besprechung finden. Zu welchen Zeiten und in welchem Umfange sollen die Konstruktionsübungen angestellt werden? Wenn die Beschlüsse der letzten Rheinischen Direktorenkonferenz, die dem Können der Schüler das gröfste Gewicht beilegen, Vorschrift werden, so darf das Auflösen von Aufgaben nie aufhören oder unterbrochen werden. Damit dies erreicht wird, empfiehlt sich die folgende Einrichtung. In den mittleren Klassen wird im Beginn eines jeden Tertials oder sonst dreimal zu bestimmten Zeiten der gesamte Mathematikunterricht für die Betrachtung geometrischer Örter, für die Entwickelung der Bestimmungsfiguren, sowie die Anlernung der aus ihnen abzuleitenden Ergebnisse verwendet. Der gedachte Zeitraum braucht nicht immer grofs zu sein. Später wird in üblicher Weise zwischen Algebra und Geometrie abgewechselt, die Geometriestunde aber noch einige Wochen zu Übungen benutzt. Kehren diese auf solche Weise regelmäfsig und dreimal auf jeder Klassenstufe wieder, so wird dem leidigen Vergessen ordentlich vorgebeugt. In den oberen Klassen, etwa vom letzten Drittel des Obersekundajahres ab, möchte ich das Ansetzen einer eigenen Konstruktionsstunde vorschlagen, die alle acht oder noch später alle vierzehn Tage wiederkommt. Die erwachsenen Schüler ertragen ganz leicht die Verschiedenheit des Unterrichtsstoffes. Sehr gut ist es zudem, wenn in dem Lehrpensum recht viele Sätze in die Form von Aufgaben gebracht werden. Die betreffenden Lehren prägen sich dann besser und leichter ein als die trockenen Sätze mit ihren umständlichen Beweisen. Gelegenheiten zu diesem Verfahren giebt es auf jeder Klassenstufe in

grofser Zahl. Ein einziges Beispiel möge herausgegriffen werden. Wenn der Untersekundaner an die Flächenberechnung herangeführt wird, löst er mit seinen bescheidenen Kenntnissen von der Proportionslehre die Aufgabe, wie der Inhalt eines Rechteckes gefunden wird, ohne viel Mühe. Er zeichnet das Quadrat der Längeneinheit und vergleicht dann zwei Rechtecke von verschiedenen Grundlinien und verschiedenen Höhen in Bezug auf den Inhalt. Die Schlufsproportion bietet einen vorzüglichen Beitrag für die Lehre vom Messen überhaupt und läfst Flächenmafs und Mafszahl zu gleicher Zeit erkennen.

Der Umfang, in dem eine Konstruktionsaufgabe, besonders schriftlich, bearbeitet werden mufs, richtet sich offenbar nach dem Standpunkte des Schülers. In der ersten Zeit, — vielleicht bis an die Untersekunda — wird nur konstruiert und bewiesen. In wenigen Fällen kann eine Determination hinzutreten, z. Bsp. bei häufig anzuwendenden Fundamentalaufgaben. Der Lehrer wirft im Unterrichte die Frage auf, ob eine ausgeführte Konstruktion auch unter allen Umständen gerät, und erhält meistens eine befriedigende Antwort oder die Angabe der entscheidenden Momente. Vom Sekundaner und Primaner darf entschieden verlangt werden, dafs er klar analysiert, knapp konstruiert und vollständig beweist. Dafs bei einer schriftlichen Arbeit alle Teile genau durchgeführt werden sollen, möchte ich abgeschafft wissen. Wozu so viel Schreibwerk? Es genügt Analysis mit Konstruktion oder Konstruktion mit Beweis, da ja in der Analysis die nämlichen Ueberlegungen zu machen sind wie im Beweis, wenn es auch nicht genau in derselben Weise geschieht. Die Determination wird nach einer These der erwähnten Direktorenkonferenz nur in mäfsiger Weise gefordert, und dies mit gutem Rechte. Eine vollständige Determination in allen Fällen zu fordern, ist nicht angängig. Man würde geradezu Unmögliches verlangen. Denn oft genug wird die Determination zur Hauptsache. Aufgaben mit Winkeldaten kann streng genommen erst der Obersekundaner determinieren, wenn er ausreichende Kenntnisse in der Trigonometrie besitzt. Aber auch er leistet das Nötige, wenn er weifs, worauf es bei einer guten Determination ankommt. Hat er sie an einem Musterbeispiele, an der einfachen Dreiecksaufgabe „$\triangle$: a, h_a, α“ gründlich kennen gelernt, so wird er in andern Fällen schon den richtigen Weg finden. Es wird so viel von Überbürdung der Schüler zu Unrecht geklagt. Aber hier ist wirklich eine Erleichterung angebracht. Möge daher zur Verminderung des Schreibwerkes die Determination entweder ganz oder wenigstens bei Klassenarbeiten, und erst recht bei Prüfungsarbeiten, in Wegfall kommen!

Ein Vorschlag ist gemacht. Erscheint er zu beschränkt, so kann der Uebungsstoff mühelos auf weitere Gebiete ausdehnt werden. Allein ich beharre bei der Ansicht, dafs man in diesem Bestreben gar leicht zu weit greift, und dafs für allgemeine Schulzwecke das Einfachste immer auch das Beste ist. Möge mein Wort aus der Praxis wenigstens den Erfolg haben, dafs die angerechte Frage in Flufs kommt und zur Beseitigung der besprochenen Übelstände ein Anfang gemacht wird. Die Willkür mufs weichen und allgemeine Ordnung an ihre Stelle treten zur Erleichterung für die Schüler, zur bequemeren Orientierung der Lehrer, zur Hebung des Einvernehmens zwischen Schule und Haus.

grofser Zahl. Ein einziges Wenn der Untersekundaner
an die Flächenberechnung en bescheidenen Kenntnissen
von der Proportionslehre hteckes gefunden wird, ohne
viel Mühe. Er zeichnet d gleicht dann zwei Rechtecke
von verschiedenen Grund Bezug auf den Inhalt. Die
Schlufsproportion bietet ei vom Messen überhaupt und
läfst Flächenmafs und Ma

Der Umfang, in nders schriftlich, bearbeitet
werden mufs, richtet sich Schülers. In der ersten Zeit,
— vielleicht bis an die U und bewiesen. In wenigen
Fällen kann eine Determin nzuwendenden Fundamental-
aufgaben. Der Lehrer wi ine ausgeführte Konstruktion
auch unter allen Umständ friedigende Antwort oder die
Angabe der entscheidende Primaner darf entschieden
verlangt werden, dafs er d vollständig beweist. Dafs
bei einer schriftlichen Arb den sollen, möchte ich abge-
schafft wissen. Wozu sc ysis mit Konstruktion oder
Konstruktion mit Beweis, n Ueberlegungen zu machen
sind wie im Beweis, wenn Veise geschieht. Die Deter-
mination wird nach einer renz nur in mäfsiger Weise
gefordert, und dies mit gu mination in allen Fällen zu
fordern, ist nicht angängig verlangen. Denn oft genug
wird die Determination zu aten kann streng genommen
erst der Obersekundaner Kenntnisse in der Trigono-
metrie besitzt. Aber auch , worauf es bei einer guten
Determination ankommt. an der einfachen Dreiecks-
aufgabe „△: a, h_a, α" in andern Fällen schon den
richtigen Weg finden. Es Schüler zu Unrecht geklagt.
Aber hier ist wirklich ei laher zur Verminderung des
Schreibwerkes die Determ s bei Klassenarbeiten, und
erst recht bei Prüfungsarb

Ein Vorschlag ist , so kann der Uebungsstoff
mühelos auf weitere Gebie e bei der Ansicht, dafs man
in diesem Bestreben gar allgemeine Schulzwecke das
Einfachste immer auch d der Praxis wenigstens den
Erfolg haben, dafs die ange Beseitigung der besprochenen
Übelstände ein Anfang ge hen und allgemeine Ordnung
an ihre Stelle treten zur bequemeren Orientierung der
Lehrer, zur Hebung des E us.