Bestimmung der Koeffizienten in den Potenzreihen, die durch Umkehrung gegebener Potenzreihen entstehen.

(Erster Teil).

Im folgenden beginne ich mit der Veröffentlichung einer Reihe von Untersuchungen über die Reihenumkehrung und ihre Anwendungen. Man hat das Problem, die Koeffizienten der durch Inversion entstehenden Potenzreihen zu bestimmen, auf mehrfache Weise zu lösen gesucht; und zwar lassen sich die gesamten Methoden in zwei Gruppen einteilen: In der einen Gruppe werden Rekkursionsformeln für die Koeffizienten der inversen Reihen abgeleitet, während in der andern independente Darstellungen der Koeffizienten gegeben werden. In die letztere Gruppe gehören auch die Methoden, deren Theorie und Anwendungen mich in diesen Untersuchungen beschäftigen werden.

Die allgemeinen Formeln, welche im ersten Abschnitte der folgenden Arbeit für die Koeffizienten der inversen Reihen abgeleitet werden, sind nicht neu. Sie stammen meines Wissens von Rothe, also aus dem Anfange dieses, vielleicht schon dem Schlusse des vorigen Jahrhunderts. Sie dürften aber kaum die Beachtung gefunden haben, die ihnen gebührt. Wenigstens scheinen sie in die neueren Lehrbücher der Analysis überhaupt nicht mehr übergegangen zu sein. Die einfache Ableitung dieser Formeln, die im folgenden durch geschlossene Integrale geschieht, habe ich nirgends gefunden.

In den weiteren Abschnitten wird als Anwendung der Theorie die Lösung der trinomischen Gleichungen behandelt. Der Gedanke, algebraische Gleichungen mit Hülfe der Reiheninversion zu lösen, ist an sich schon alt. Indessen ist er, soviel ich sehen kann, bisher immer nur verwandt worden, um die reellen Wurzeln genauer zu bestimmen, wenn für sie bereits ein Näherungswert bekannt war. Bei dem Verfahren, das — nach den einleitenden Betrachtungen des zweiten Abschnittes — vom dritten Abschnitte an bis zum Schlusse dieser Arbeit angewandt wird, ist weder die Kenntniss irgend eines Näherungswertes erforderlich, noch beschränkt es sich auf die reellen Wurzeln der Gleichung. Vielmehr setzt meine Methode, wie in dem fünften Abschnitte gezeigt wird, in den Stand, die **sämtlichen** Wurzeln trinomischer Gleichungen in der Form konvergenter unendlicher Reihen anzugeben und gleichzeitig in jedem Falle zu entscheiden, ob überhaupt reelle Wurzeln vorhanden sind und wie viele. In dieser grossen Allgemeinheit der Betrachtungen dürfte der theoretische Wert meiner Methode liegen. Ob sie praktisch dasselbe zu leisten vermag, wie andere Methoden zur Bestimmung der reellen Wurzeln trinomischer Gleichungen*): die endgiltige Entscheidung dieser Frage ist mir noch nicht gelungen und muss einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Die Richtung, in welcher die letzteren Untersuchungen sich zu bewegen hätten, ist in den Schlussbemerkungen des fünften Abschnittes angegeben.

*) Die neuste Leistung auf diesem Gebiete sind jedenfalls die »Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen«. Von S. Gundelfinger, Leipzig 1897. B. G. Teubner.

I.

Die Funktion y der Veränderlichen x sei in einem gewissen Bereiche durch eine Potenzreihe darstellbar; es sei

$$y = x\left(a_{0,1} + a_{1,1}\,x + \ldots\ldots a_{r-1,1}\,x^{r-1} + \ldots\ldots\right), \tag{1}$$

wo der Koeffizient $a_{0,1}$ einen von Null verschiedenen Wert haben soll. Dann ist in demselben Bereiche auch jede ganze positive Potenz von y durch eine Potenzreihe von x darstellbar; und zwar sei

$$x^f = y^f\left(a_{0,f} + a_{1,f}\,x + \ldots\ldots a_{r-1,f}\,x^{r-1} + \ldots\ldots\right). \tag{2}$$

Nun ist bekannt, dass die Reihe (1), oder um gleich den allgemeineren Fall zu behandeln, die Reihe (2) in einem gewissen Bereiche eindeutig umkehrbar ist, dass also eine Gleichung von der Form existiert:

$$x^f = y^f\left(b_{0,f} + b_{1,f}\,y + \ldots\ldots b_{r-1,f}\,y^{r-1} + \ldots\ldots\right). \tag{3}$$

Um die Koeffizienten b in dieser Gleichung zu bestimmen, werde folgendes Verfahren eingeschlagen: Die Potenzreihe in (3) kann nach einem bekannten Satze innerhalb ihres Konvergenzbereiches wie eine Reihe mit endlicher Gliederzahl differentiirt werden. Die Differentiation nach x ergiebt:

$$f.x^{f-1} = f.b_{0,f}\,y^{f-1}.y' + (f+1).b_{1,f}\,y^{f}.y' + \ldots(r+f-1).b_{r-1,f}\,y^{r+f-2}.y' + (r+f).b_{r,f}\,y^{r+f-1}.y' + \ldots\ldots,$$

wobei y' nach bekannter Abkürzung die Ableitung von y, genommen nach x, bedeutet.

Wird diese Gleichung durch y^{r+f-1} dividiert, so erhält man

$$\frac{f.x^{f-1}}{y^{r+f-1}} = f.b_{0,f}.\frac{y'}{y^r} + (f+1).b_{1,f}.\frac{y'}{y^{r-1}} + \ldots\ (r+f-1).b_{r-1,f}.\frac{y'}{y} + (r+f).b_{r-f}.y' + \ldots \tag{4}$$

In dieser Gleichung kann jeder Quotient

$$\frac{y'}{y^{r-k}} = -\frac{1}{r-k-1}.\frac{d\,y^{-(r-k-1)}}{d\,x} \tag{5}$$

gesetzt werden, ausgenommen den Fall, dass $r-k=1$ ist. Beachtet man nun, dass die Gleichung (2) in einem gewissen Bereiche auch für ganze negative f Gültigkeit besitzt, und beschränkt man sich lediglich auf diesen Bereich, so ergiebt sich aus der Gleichung (5), dass in dem Ausdrucke $\frac{y'}{y^{r-k}}$, wenn man ihn nach Potenzen von x entwickelt, der Faktor der Potenz x^{-1}, d. h. das Residuum der Funktion $\frac{y'}{y^{r-k}}$ inbezug auf den Punkt $x = 0$, den Wert 0 hat. Für den ausgeschlossenen Fall $r-k=1$, also für den Quotienten $\frac{y'}{y}$ ergiebt sich als Residuum 1. Dass

für die weiteren Glieder auf der rechten Seite von (4) das Residuum inbezug auf den Punkt $x = 0$ wiederum den Wert 0 annimmt, ist selbstverständlich. Bildet man daher in Gleichung (4) für jedes Glied das geschlossene Integral um den Nullpunkt herum — eine Operation, die innerhalb des vorhin begrenzten Bereiches jedenfalls erlaubt ist — so ergiebt sich nach einem der Fundamentalsätze aus der Theorie der geschlossenen Integrale:

$$\int_{(0)} \frac{f \cdot x^{f-1} \cdot dx}{y^{r+f-1}} = (r+f-1) \cdot b_{r-1,f} \cdot 2\pi i, \quad \text{oder}$$

$$b_{r-1,f} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f}{r+f-1} \cdot \int_{(0)} \frac{x^{f-1} \cdot dx}{y^{r+f-1}}. \tag{6}$$

Hiermit ist eine Formel für den Koeffizienten $b_{r-1,f}$ gefunden. Man sieht, die Aufgabe, diesen Koeffizienten zu finden, kommt darauf hinaus, das Residuum der Funktion $\frac{x^{f-1}}{y^{r+f-1}}$ inbezug auf den Punkt $x = 0$ zu finden. Vermöge der Bemerkung, dass in einem gewissen Bereiche die Gleichung (2) auch für negatives f gilt, kann, indem in (3) — (r+f—1) an Stelle von f gesetzt wird, die Gleichung erhalten werden:

$$y^{-(r+f-1)} = x^{-(r+f-1)} \cdot \left(a_{0,-(r+f-1)} + a_{1,-(r+f-1)} x + \ldots a_{r-1,-(r+f-1)} x^{r-1} + \ldots\ldots\right).$$

Durch Multiplikation mit x^{f-1} findet man: Das in Frage stehende Residuum hat den Wert $a_{r-1,-(r+f-1)}$. Dieser Wert, in Gleichung (6) eingesetzt, ergiebt:

$$b_{r-1,f} = \frac{f}{(r+f-1)} \cdot a_{r-1,-(r+f-1)}. \tag{6a}$$

Spezialisiert man jetzt, indem man $f = 1$ setzt, so erhält man für die Koeffizienten b in der Reihe

$$x = y\left(b_{0,1} + b_{1,1}\, y + \ldots\ldots b_{r-1,1}\, y^{r-1} + \ldots\ldots\right) \tag{7}$$

die Formel:

$$b_{r-1,1} = \frac{1}{r} \cdot a_{r-1,-r} \tag{8}$$

Diese Formel lässt sich in Worten folgendermassen ausdrücken:

Satz: $b_{r-1,1}$, d. h. der Koeffizient der r-ten Potenz von y in der Reihe (7), welche durch Inversion der Reihe (1) entstanden ist, ist $\frac{1}{r}$ des Koeffizienten der r—1-ten Potenz von x in der Potenzreihe für $\left(\frac{y}{x}\right)^{-r}$.

Es verdient bemerkt zu werden, dass, wie eine Ausführung der erforderlichen Rechnungen zeigt, die Gleichungen (6) und (6a) auch noch Gültigkeit behalten, wenn —f an Stelle

von f tritt. Nur für den Fall $r-1=f$, also für den Koeffizienten $b_{f,-f}$, werden beide Formeln hinfällig; und es muss zur Ermittelung dieses Koeffizienten eine andere, gleichfalls sehr einfache Betrachtung angestellt werden, die ich indessen hier übergehen will, da wir im folgenden lediglich von der Formel (8) Gebrauch machen werden.

II.

Ich will die gewonnenen Resultate jetzt anwenden zur Bestimmung der Wurzeln, und zwar zunächst der **reellen** Wurzeln trinomischer algebraischer Gleichungen mit reellen Koeffizienten, also der Gleichungen:

$$f(x) = x^{m+n} + p\,x^{n} + q = 0. \qquad \textbf{(9)}$$

Bevor ich die Aufgabe vermittels der in Abschnitt I entwickelten Theorieen löse, will ich in dem jetzigen Abschnitte einige Vorbetrachtungen über die Gleichung $f(x)=0$ anstellen. Diese Vorbetrachtungen werden nach keiner Richtung neue Resultate bieten. Ich hätte mich daher einfach auf Angabe der Resultate unter Hinweis auf die einschlägige Litteratur begnügen können. Man möge meine Ausführlichkeit damit entschuldigen, dass dies der einzige Abschnitt meiner Arbeit ist, in dem die Betrachtungen meistenteils nicht über den Rahmen der Schulmathematik hinausgehen, also unseren Schülern unmittelbar zu gute kommen können. Übrigens dürfte die ganze Darstellung, namentlich die mit Rücksicht auf die folgenden Abschnitte von mir gewählte Einteilung der trinomischen Gleichungen, manches Eigenartige bieten.

Im folgenden sollen, wie der Kürze halber gleich hier ein für allemal festgesetzt werde, die Buchstaben a, b, c, d, h, x_0, x_1, x_2, stets reelle **positive** Grössen, die Buchstaben l, m, n, r, s, t stets **ganze positive** Zahlen, g stets eine **gerade**, dagegen **k und k'** stets **ungerade positive** Zahlen bezeichnen.

Die Gleichung (9) wird für den Fall, dass m und n noch den grössten gemeinsamen Teiler d besitzen, sich durch die Substitution $y = x^{d}$ in eine neue Gleichung

$$y^{m'+n'} + p\,y^{n'} + q = 0$$

verwandeln lassen, in der m' und n' keinen gemeinsamen Teiler mehr haben. Es soll daher im folgenden stets angenommen werden, die Exponenten m und n in der gegebenen Gleichung $f(x)=0$ besässen keinen gemeinschaftlichen Teiler mehr. Wir können also von dem Falle, dass sowohl m als auch n eine gerade Zahl ist, absehen. Dann bleiben noch folgende 3 Kombinationen übrig:

$$1.\begin{cases} m \text{ ist gerade; oder kurz } m = g. \\ n \text{ ist ungerade; oder kurz } n = k. \end{cases} \quad 2.\begin{cases} m = k. \\ n = g. \end{cases} \quad 3.\begin{cases} m = k'. \\ n = k. \end{cases}$$

Die Koeffizienten p und q können sowohl positive als auch negative Zahlen sein; es sind also 4 Kombinationen möglich:

$$1.\begin{cases} p = -a. \\ q = +b. \end{cases} \quad 2.\begin{cases} p = -a. \\ q = -b. \end{cases} \quad 3.\begin{cases} p = +a. \\ q = -b. \end{cases} \quad 4.\begin{cases} p = +a. \\ q = +b. \end{cases}$$

Stellt man jede dieser 4 Kombinationen mit der ersten, dann der zweiten, endlich der dritten obigen Kombination zusammen, so ergiebt sich:

Die sämtlichen trinomischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten zerfallen in 12 verschiedene typische Formen.

Der erste Typus wäre z. B.

$$x^{g+k} - a x^{k} + b = 0. \tag{10}$$

Man sieht nun, dass diese Gleichung durch die Substitution $x = \frac{1}{u}$ in die folgende übergeht:

$$u^{g+k} - \frac{a}{b} u^{g} + \frac{1}{b} = 0. \tag{11}$$

Durch die Substitution $x = -u$ geht dagegen die Gleichung (10) in folgende über:

$$u^{g+k} - a u^{k} - b = 0. \tag{12}$$

Endlich geht die Gleichung (10) durch die Substitution $x = -\frac{1}{u}$ in folgende der 12 typischen Formen über:

$$u^{g+k} + \frac{a}{b} u^{g} - \frac{1}{b} = 0. \tag{13}$$

Andere, als die vorgenommenen 3 Substitutionen

$$x = \frac{1}{u} \quad ; \quad x = -u \quad ; \quad x = -\frac{1}{u} \tag{14}$$

sind unthunlich, da die neue Gleichung im allgemeinen aufhören würde, trinomisch zu bleiben. Jedenfalls sieht man, dass die 4 verschiedenen typischen Formen (10) bis (13) zusammengehören in dem Sinne, dass, wenn ich eine dieser 4 Gleichungen als die Normalform der Gruppe bezeichne, die übrigen 3 durch eine der Substitutionen (14) auf diese Normalform gebracht werden können. Ganz analog lassen sich die noch übrigen 8 typischen Gleichungen behandeln. Es ergiebt sich das Resultat:

Die 12 typischen Formen der trinomischen Gleichungen können in 4 Gruppen geteilt werden. Die in jeder Gruppe enthaltenen Typen können durch eine (bezw. mehrere) der Substitutionen (14) auf den ersten Typus der Gruppe zurückgeführt werden. Dieser erste Typus soll die **Normalform** der Gruppe heissen.

Die folgende Tabelle enthält die 4 Gruppen und bei jeder Gleichung, die noch nicht eine Normalform besitzt, die Substitution, durch welche die Zurückführung auf die zugehörige Normalform erfolgt. Die Normalformen selbst sind durch den Druck hervorgehoben.

Erste Gruppe.	Zweite Gruppe.
1) $\mathbf{x^{g+k} - a x^{k} + b = 0.}$	5) $\mathbf{x^{k'+k} - a x^{k} + b = 0.}$
2) $x^{k+g} - a x^{g} + b = 0;\ x = \frac{1}{u}.$	6) $x^{k'+k} + a x^{k} + b = 0;\ x = -u.$
3) $x^{g+k} - a x^{k} - b = 0;\ x = -u.$	
4) $x^{k+g} + a x^{g} - b = 0;\ x = -\frac{1}{u}.$	

Dritte Gruppe.

7) $\mathbf{x^{k+g} - a x^{g} - b = 0.}$

8) $x^{g+k} + a x^{k} - b = 0;\ x = \frac{1}{u}.$

9) $x^{k+g} + a x^{g} + b = 0;\ x = -u.$

10) $x^{g+k} + a x^{k} + b = 0;\ x = -\frac{1}{u}.$

Vierte Gruppe.

11) $\mathbf{x^{k'+k} - a x^{k} - b = 0.}$

12) $x^{k'+k} + a x^{k} - b = 0;\ x = -u$*)

*) oder auch $x = \frac{1}{u}$ oder $x = -\frac{1}{u}$.

Die zweite Gruppe enthält nur 2 Gleichungen, weil die Normalform dieser Gruppe durch die Substitution $x = \frac{1}{u}$ in sich selbst, d. h. in eine Gleichung derselben Form übergeht. Auch in der vierten Gruppe stehen nur 2 Gleichungen, weil die Normalform dieser Gruppe durch jede beliebige der Substitutionen (14) in die zwölfte typische Form übergeführt wird.

Wir brauchen uns im folgenden nur noch mit den 4 Normalformen zu beschäftigen, die sämtlich enthalten sind in der Gleichung:

$$f(x) = x^{m+n} - a x^{n} + q = 0, \tag{15}$$

wo q positiv oder negativ sein kann. Es sollen jetzt einige Sätze über die reellen Wurzeln dieser Normalformen abgeleitet werden. Zunächst werde die Frage aufgeworfen, ob die Gleichung (15), d. h. ob eine der 4 Normalformen Doppelwurzeln (oder allgemeiner: mehrfache Wurzeln) besitzen kann. Eine Doppelwurzel der Gleichung $f(x) = 0$ muss gleichzeitig eine einfache Wurzel der abgeleiteten Gleichung $f'(x) = 0$ sein, also der Gleichung:

$$(m + n)\, x^{m+n-1} - a n x^{n-1} = 0. \tag{16}$$

Diese Gleichung besitzt aber [ausser der Lösung $x = 0$, von der hier abgesehen werden kann] nur die reelle Wurzel — bezw. wenn m gerade ist, die beiden reellen Wurzeln —:

$$x = \left(\frac{a n}{m+n}\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{17}$$

Dieser Wert von x wird im allgemeinen sicherlich keine Wurzel der gegebenen Gleichung

$$q = x^{n}\left(a - x^{m}\right)$$

darstellen. Damit nämlich diese Gleichung, oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$\left(q^{m} = x^{m}\right)^{n} \cdot \left(a - x^{m}\right)^{m}$$

thatsächlich die Wurzel (17) besässe, müsste

$$q^{m} = \left(\frac{a n}{m+n}\right)^{n} \cdot \left(a - \frac{a n}{m+n}\right)^{m} = \left(\frac{a n}{m+n}\right)^{n} \cdot \left(\frac{a m}{m+n}\right)^{m} \tag{18}$$

sein. Diese Relation zwischen den Grössen q, a, m, n kann für die beiden letzten Normalformen, in denen m ungerade und q negativ ist, niemals stattfinden. Bei den ersten beiden Normalformen, in denen $q = +b$ ist, kann dagegen die Relation (18) bestehen. Wenn gleich hier 2

abkürzende Bezeichnungen eingeführt werden, die im folgenden fortgesetzt Anwendung finden, nämlich:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{m} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = J \quad \text{und} \quad \frac{m^{m} \cdot n^{n}}{(m+n)^{m+n}} = j\,, \tag{19}$$

so kann die Relation (18), wie man leicht sieht, für die beiden ersten Normalformen auch geschrieben werden:

$$J = j. \tag{20}$$

Die Zusammenfassung der Resultate ergiebt folgenden

Satz: Die beiden letzten Normalformen besitzen niemals reelle Doppelwurzeln, bezw. mehrfache Wurzeln. Die beiden ersten Normalformen werden im allgemeinen gleichfalls keine reellen Doppelwurzeln besitzen; nur wenn zwischen den Koeffizienten die Relation $J = j$ besteht (vergl. 19), so ist $\left(\frac{a\,n}{m+n}\right)^{\frac{1}{m}}$ eine Doppelwurzel der gegebenen Normalform.

Anmerkung 1: Hierbei wird, wie eine einfache Überlegung zeigt, im Falle der ersten Normalform, in welcher m gerade ist, lediglich der positive Wert der m-ten-Wurzel in (17) eine Doppelwurzel der gegebenen Gleichung darstellen.

Um die Betrachtungen nicht unnötigerweise zu komplizieren, soll bis auf weiteres der Fall $J = j$ ganz von der Untersuchung ausgeschlossen werden.

Ich gehe zu einigen Bemerkungen über die Anzahl der reellen einfachen Wurzeln der 4 Normalformen über. In den Beweisen will ich die Anwendung der Sätze über Zeichenfolgen und Zeichenwechsel in algebraischen Gleichungen vermeiden; dagegen gebrauche ich mehrfach folgenden bekannten

Hilfssatz: Zwischen je zwei aufeinander folgenden reellen einfachen Wurzeln der algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ ist immer mindestens eine Wurzel der abgeleiteten Gleichung $f'(x) = 0$ enthalten.

Aus diesem Satze würde zunächst folgen, dass die Gleichung (15) höchstens 4 reelle einfache Wurzeln besitzen könnte. Denn die abgeleitete Gleichung (16) besitzt im günstigsten Falle 3 reelle Wurzeln, nämlich 0 und, wenn m gerade ist, die beiden Wurzeln (17). Hätte nun die gegebene Gleichung mehr als 4, etwa 5 reelle einfache Wurzeln, und zwar der Grösse nach geordnet die Wurzeln w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, so müssten zwischen ihnen mindestens 4 Wurzeln der abgeleiteten Gleichung liegen. Das ist aber unmöglich. Jetzt wollen wir der Reihe nach die einzelnen Normalformen gesondert betrachten:

1) $$f(x) = x^{g+k} - a\,x^{k} + b = 0.$$

In diesem Falle besitzt die abgeleitete Gleichung 3 reelle Lösungen, nämlich eine positive, eine negative und die Wurzel 0— die letztere freilich nicht in dem Falle $k = 1$, den wir vorläufig ausschliessen wollen —. Aber da der Grad von $f(x)$ ungerade ist, die Gleichung $f(x) = 0$ also immer eine ungerade Anzahl reeller Lösungen besitzen muss, so sind nicht 4, sondern höchstens 3 reelle Wurzeln möglich. Eine, und zwar eine negative reelle Wurzel ist nach einem bekannten Satze über die Gleichungen von ungeradem Grade immer vorhanden. Die beiden übrigen Wurzeln

werden, falls sie überhaupt existieren, sicherlich gleiches Vorzeichen haben müssen, da sonst das Produkt sämtlicher Wurzeln, nämlich $-b$, nicht negativ sein könnte. Aber das gemeinsame Vorzeichen der beiden fraglichen Wurzeln muss jedenfalls $+$ sein; denn wäre es $-$, hätte also unsere Gleichung im ganzen 3 reelle negative Wurzeln, so müssten nach dem obigen Hilfssatze mindestens zwei negative Wurzeln der abgeleiteten Gleichung vorhanden sein, was nicht der Fall ist. — Man überzeugt sich leicht, dass für den ausgeschlossenen Fall $k = 1$ die Betrachtung fast genau dieselbe bleibt; und es ergiebt sich auch hier das nämliche Resultat, wie im Falle $k > 1$. Ebensowenig wird der Fall $k = 1$ bei der zweiten und vierten Normalform eine Änderung des Resultates herbeiführen. Er soll deswegen dort stillschweigend übergangen werden.

$$2) \qquad f(x) = x^{k'+k} - ax^{k} + b = 0.$$

Die abgeleitete Gleichung besitzt hier bloss 2 reelle Lösungen — nämlich 0 und eine positive Wurzel —, also $f(x) = 0$ höchstens 3. Von diesen sind aber, weil der Grad der Gleichung jetzt gerade ist, thatsächlich bloss 2 möglich. Beide müssen auch hier gleiches Vorzeichen haben aus einem ähnlichen Grunde, wie vorhin. Zwischen 2 negativen Wurzeln könnte nun die positive Lösung der abgeleiteten Gleichung nicht enthalten sein. Folglich müssen die beiden fraglichen Wurzeln, falls sie überhaupt existieren, positiv sein.

$$3) \qquad f(x) = x^{k+g} - ax^{g} - b = 0.$$

Die abgeleitete Gleichung besitzt 2 reelle Lösungen, nämlich 0 und eine positive Wurzel. Folglich hat die gegebene Gleichung höchstens 3 reelle Wurzeln. Eine, und zwar eine positive Lösung besitzt sie sicherlich. Dann müssten die beiden andern möglichen Wurzeln gleiches Vorzeichen haben, weil sonst das Produkt sämtlicher Wurzeln, nämlich $+b$, nicht positiv sein könnte. Negative Wurzeln kann nun unsere Gleichung überhaupt nicht haben, weil für negatives x alle ihre Glieder negativ werden. Es bliebe der Fall übrig, dass $f(x) = 0$ im ganzen 3 positive Wurzeln besässe. Das aber widerspräche der Anzahl der positiven Lösungen der abgeleiteten Gleichung. Ebensowenig ist es möglich, dass 2 positive Wurzeln existieren; denn wegen des ungeraden Grades von f(x) muss immer eine ungerade Anzahl reeller Lösungen vorhanden sein. Die dritte Normalform wird also lediglich eine einzige reelle, u. z. positive Wurzel besitzen.

$$4) \qquad f(x) = x^{k'+k} - ax^{k} - b = 0.$$

Aus demselben Grunde wie vorhin sind höchstens 3 reelle Wurzeln möglich. Ihre Anzahl aber reduziert sich hier, wo der Grad der Gleichung gerade ist, auf 2. Nach einem bekannten Satze über Gleichungen von geradem Grade sind aber diese 2 auch immer thatsächlich vorhanden, und zwar ist die eine Wurzel positiv, die andere negativ.

Fasst man die einzelnen Resultate zusammen, so ergiebt sich der

Satz: Die dritte Normalform besitzt stets eine und nur eine reelle und zwar positive Wurzel; die vierte Normalform hat stets 2 reelle Wurzeln, eine positive und eine negative; die erste Normalform besitzt stets eine negative Wurzel, ausserdem hat sie unter Umständen noch 2, aber nur 2 positive Wurzeln; die zweite Normalform hat zuweilen überhaupt keine reelle Wurzel, unter Umständen hat sie 2, aber nur 2 positive Wurzeln.

Man sieht, dass durch die bisherigen Methoden die Anzahl der positiven Wurzeln der ersten und zweiten Normalform nicht bestimmt ermittelt werden kann, sondern von gewissen »Umständen«, das heisst natürlich: von gewissen Relationen abhängt, die zwischen den Konstanten dieser Gleichungen bestehen müssen. Das Auffinden solcher Relationen soll unser nächstes Ziel sein.

Die beiden in Rede stehenden Normalformen sind spezielle Fälle folgender Gleichung:

$$f(x) = x^{m+n} - a x^{n} + b = 0. \tag{21}$$

oder anders geschrieben:

$$b = x^{n}\left(a - x^{m}\right), \tag{21 a}$$

oder

$$x^{m+n} = a x^{n} - b. \tag{21 b}$$

Aus (21 a) folgt, dass eine positive Wurzel c der Gleichung $f(x) = 0$ jedenfalls der Ungleichung

$$c^{m} < a \tag{22}$$

Genüge leisten muss, während (21 b) zeigt, dass für dieselbe Wurzel c die Ungleichheit besteht:

$$a . c^{n} > b. \tag{23}$$

Wird (22) mit n, dagegen (23) mit m potenziert, so ergiebt sich aus der Kombination beider die neue Ungleichung:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{m} < c^{mn} < a^{n}.$$

Hieraus folgt, dass für die Existenz positiver Lösungen der gegebenen Gleichung (21) das Bestehen der Ungleichung $\left(\frac{b}{a}\right)^{m} < a^{n}$, oder — mit Anwendung der Abkürzungen (19) — das Bestehen der Ungleichung

$$J < 1 \tag{24}$$

eine notwendige Vorbedingung bildet. Thatsächlich ist diese Bedingung durchaus noch nicht hinreichend; man kann vielmehr auf folgende Weise zu einer schärferen Bedingung gelangen:

Ich will die kleinste der möglicherweise vorhandenen positiven Wurzeln x_0, die grösste x_1 nennen. Man sieht dann ohne weiteres, dass die Funktion $f(x_1 + h)$ für beliebige positive h stets positiv sein wird. Aber aus dem Taylorschen Satze folgt, dass für hinreichend kleines h das Vorzeichen von $f(x_1 + h)$ lediglich abhängt von dem Vorzeichen der Grösse $h\, f'(x_1)$, die nicht selbst verschwinden kann, da Doppelwurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ausdrücklich ausgeschlossen worden sind. Also muss $f'(x_1)$ jedenfalls positiv sein, d. h. es ist

$$(m+n)\, x_1^{m+n-1} - a . n\, x_1^{n-1} > 0$$

oder

$$x_1^{m} > \frac{a\, n}{m+n}. \tag{25}$$

Dagegen wird die Funktion $f(x_0 + h)$ für sehr kleine h bestimmt einen negativen Wert annehmen müssen, wie man z. B. aus der graphischen Darstellung der Werte von f(x) für die Punkte $+\infty$, x_1 und x_0 augenblicklich ersieht. Genau so, wie vorhin, folgt jetzt, dass $f'(x_0) < 0$ sein muss und

$$x_0^m < \frac{a\,n}{m+n}. \tag{26}$$

Aus den beiden Ungleichungen (25) und (26) ergäbe sich, dass der positive Wert $x = \left(\frac{a\,n}{m+n}\right)^{\frac{1}{m}}$ jedenfalls zwischen x_0 und x_1 gelegen sein müsste, dass also für ihn f(x) negativ sein würde. Folglich wäre

$$\left(\frac{a\,n}{m+n}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot \left(\frac{a\,n}{m+n} - a\right) + b < 0$$

oder

$$b < \left(\frac{a\,n}{m+n}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot \frac{a\,m}{m+n}$$

oder

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m \cdot \frac{1}{a^n} < \frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

oder mit Anwendung der Abkürzungen (19)

$$J < j. \tag{27}$$

Diese Bedingung ist thatsächlich schärfer als die Bedingung (24)

Anmerkung 2: Aus den Ungleichungen (22) und (25) ergeben sich 2 Grenzen, zwischen denen x_1 immer enthalten sein muss, nämlich:

$$\sqrt[m]{\frac{a\,n}{m+n}} < x_1 < \sqrt[m]{a}.$$

Es ist leicht, auch x_0 in 2 Grenzen einzuschliessen. Dies gelingt schon mittels der Gleichungen (23) und (26).

Engere Grenzen liefert folgende Betrachtung: Wird in die gegebene Gleichung $\frac{1}{u}$ an Stelle von x gesetzt, so wird, wenn $f(x) = 0$ positive Lösungen besitzt, auch die neue Gleichung $\varphi(u) = 0$ positive Lösungen besitzen, nämlich $\frac{1}{x_0}$ und $\frac{1}{x_1}$, von denen $\frac{1}{x_0}$ die grösste wäre. Folglich würde $\varphi\left(\frac{1}{x_0} + h\right) > 0$ sein müssen, also nach den vorigen Schlüssen auch $\varphi'\left(\frac{1}{x_0}\right) > 0$. Nun ist

$$\varphi(u) = u^{m+n} - \frac{a}{b}\,u^m + \frac{1}{b}.$$

Die Bedingung $\varphi'\left(\frac{1}{x_0}\right) > 0$ ergiebt daher:

$$(m+n) \cdot \frac{1}{x_0^{m+n-1}} - \frac{a}{b} \cdot m \cdot \frac{1}{x_0^{m-1}} > 0$$

oder

$$\frac{m+n}{m} \cdot \frac{b}{a} > x_0^n.$$

Diese Ungleichung zusammen mit (23) ergiebt für x_0 die Grenzen

$$\sqrt[n]{\frac{b}{a}} < x_0 < \sqrt[n]{\frac{b}{a} \cdot \frac{m+n}{m}}.$$

Es fragt sich jetzt, ob die Ungleichung (27) wirklich eine ausreichende Vorbedingung für die Existenz positiver Wurzeln der ersten und zweiten Normalform bildet.

III.

Ich will von der Gleichung

$$f(x) = x^{m+n} - a x^n + b = 0 \tag{28}$$

ausgehen, in der die beiden ersten Normalformen enthalten sind. Ferner will ich annehmen, dass die Ungleichung (27) $J < j$ erfüllt sei. Es soll jetzt mit Hülfe der Reiheninversion die Frage nach der Existenz positiver Lösungen von $f(x) = 0$ entschieden werden.

Dazu schreibe ich die gegebene Gleichung:

$$\frac{b}{a} = x^n \left(1 - \frac{x^m}{a}\right). \tag{29}$$

Wenn nunmehr die neue Bezeichnung

$$\frac{b}{a} = y^n \quad : \quad y = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \tag{30}$$

eingeführt wird, so lautet die Gleichung (29):

$$y^n = x^n \cdot \left(1 - \frac{x^m}{a}\right).$$

Durch Ausziehen der n-ten Wurzel erhält man:

$$y = x \left(1 - \frac{x^m}{a}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{31}$$

Da für die etwa vorhandenen positiven Wurzeln c der Gleichung $f(x) = 0$ nach (22) stets $\frac{c^m}{a} < 1$ ist, so lässt sich die rechte Seite von (31) für alle x von 0 bis x_1 einschliesslich (x_1 die grösste positive Wurzel) nach dem binomischen Satze in eine Potenzreihe von x entwickeln. Wenn man nun die Grösse y in (31) zunächst einmal als eine Variable ansieht, so kann nach den Betrachtungen des Abschnittes I eine Reihe konstruiert werden:

$$x = y \left(b_{0,1} + b_{1,1} y + \ldots b_{r-1,1} y^{r-1} + \ldots\right) \tag{32}$$

Diese inverse Reihe soll nun wirklich hergestellt und ihr Konvergenzbereich untersucht werden. Liesse sich zeigen, dass der durch die Gleichung (30) definierte Wert von y noch innerhalb dieses

Konvergenzbereiches liegt, so würde ein positiver Wert von x, der sich dann aus (32) ergäbe, thatsächlich eine Wurzel der Gleichung (28) sein.

Nach dem Lehrsatze im ersten Abschnitte ist zur Bestimmung der Koeffizienten $b_{r-1,1}$ die Kenntnis des Koeffizienten der r—1-ten Potenz in der Entwickung von $\left(\frac{y}{x}\right)^{-r}$, d. h. von

$$\left(1 - \frac{x^m}{a}\right)^{-\frac{r}{n}}$$

erforderlich. Nun ist nach dem binomischen Satze der letztere Ausdruck

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \cdot \binom{-r}{n}_l \cdot \frac{x^{lm}}{a^l}.$$

Der Faktor der Potenz x^{r-1} wird also im allgemeinen gleich 0 sein, ausgenommen für diejenigen Werte von r, welche einer Gleichung genügen

$$r-1 = lm \quad ; \quad r = lm + 1,$$

wo l Werte von 0 bis ∞ annehmen kann. Für diese Werte von r wird vermöge der Formel (8)

$$b_{lm,1} = \frac{1}{lm+1} \cdot \frac{(-1)^l}{a^l} \cdot \binom{-\frac{lm+1}{n}}{l}$$

$$= \frac{1}{lm+1} \cdot \frac{(-1)^l}{a^{l}\,l!} \cdot \frac{(-1)^l}{l!} \cdot \left(\frac{lm+1}{n}\right) \cdot \left(\frac{lm+1}{n} + 1\right) \cdots\cdots \left(\frac{lm+1}{n} + l - 1\right)$$

$$= \frac{1}{(lm+)\,.\,a^l} \cdot \binom{\frac{m+n}{n}\,l - \frac{n-1}{n}}{l}.$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (32) ein, so ergiebt sich

$$x = y \,.\, \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{lm+1} \cdot \binom{\frac{m+n}{n}\,.\,l - \frac{n-1}{n}}{l} \cdot \left(\frac{y^m}{a}\right)^l. \tag{33}$$

Um jetzt das Konvergenzgebiet dieser Reihe zu untersuchen, bilde ich mir den Quotienten des des l+n-ten und des l-ten Gliedes und bezeichne ihn durch Q_l. Es wird

$$Q_l = \frac{(lm+1).\binom{\frac{m+n}{n}\,l+m+n-\frac{n-1}{n}}{l+n}}{(lm+mn+1).\binom{\frac{m+n}{n}\,l-\frac{n-1}{n}}{l}} \cdot \left(\frac{y^m}{a}\right)^n.$$

Wenn man die Binomialkoeffizienten in ihre Faktoren zerlegt und den Faktor $\left(\frac{y^m}{a}\right)^n$ auf die linke Seite schafft, so ergiebt sich

$$Q_l \cdot \left(\frac{a}{y^m}\right)^n =$$

$$\frac{(lm+1).\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+m+n-\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+m+n-1-\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+m+n-l-n+2-\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+m+n-l-n+1-\frac{n-1}{n}\right)}{(lm+mn+1)\,(l+n)\,(l+n-1)\ldots(l+1)\left(\frac{m+n}{n}\cdot l-\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{m+n}{n}\cdot l-1-\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{m+n}{n}l-l+2-\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{m+n}{n}l-l+1-\frac{n-1}{n}\right)}$$

Die rechte Seite lässt mehrere Vereinfachungen zu. Man erkennt zunächst, dass der letzte Faktor im Zähler sich gegen den ersten im Nenner hebt und dass ebenso der letzte Faktor im Nenner sich gegen den ersten im Zähler hebt. Die Anzahl der auf der rechten Seite übrig bleibenden Faktoren beträgt dann im Zähler und Nenner $l+n-1$. Wenn also

$$l \geqq m+1$$

genommen wird, so wird die Anzahl der Faktoren in Zähler und Nenner immer $\geqq m+n$ sein. Gesetzt nun, man sei in diesem Falle $l \geqq m+n$ im Zähler des Bruches bis zu dem m+n-ten Faktor, d. h. bis zu dem Faktor $\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+1-\frac{n-1}{n}\right)$ vorgeschritten, so werden alle folgenden Faktoren des Zählers, wie man sofort sieht, sich gegen gleiche Faktoren des Nenners fortheben, und die letzte Gleichung wird schliesslich folgende Form annehmen;

$$Q_l\left(\frac{a}{y^m}\right)^n = \frac{\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+m+n-\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+m+n-1-\frac{n-1}{n}\right)\cdots\cdots\cdots\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+1-\frac{n-1}{n}\right)}{(l+n)\,(l+n-1)\ldots(l+1)\left(\frac{m+n}{n}l-l+m+1-\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{m+n}{n}\cdot l-l+m-\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{m+n}{n}l-l+2-\frac{n-1}{n}\right)},$$

oder noch einfacher

$$Q_l = \frac{\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+m+n-\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+m+n-1-\frac{n-1}{n}\right)\cdots\cdots\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+1-\frac{n-1}{n}\right)}{(l+n)\,(l+n-1)\ldots(l+1)\left(\frac{m}{n}l+m+1-\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\cdot l+m-\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{m}{n}l+2-\frac{n-1}{n}\right)}\left(\frac{y^m}{a}\right)^n. \quad \textbf{(34)}$$

Jetzt ist die Zahl der Faktoren in Zähler und Nenner von l unabhängig, nämlich gleich m+n. Die Bestimmung des Grenzwertes, dem sich Q_l für unendlich grosses l nähert, wird daher keine Schwierigkeiten machen. Es ergiebt sich aus (34) sofort, dass Q_l dem Grenzwerte zustrebt

$$\frac{\left(\frac{m+n}{n}\right)^{m+n}}{\left(\frac{m}{\ }\right)^m}\cdot\left(\frac{y^m}{a}\right)^n = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m\,.\,n^n}\cdot\left(\frac{y^m}{a}\right)^n. \quad \textbf{(35)}$$

Die Reihe (33) kann im allgemeinen nur so lange konvergent sein, als dieser Grenzwert < 1 ist. Soll die Reihe also noch für den durch (30) definierten Wert von y konvergieren, so muss

$$\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m\,.\,n^n}\cdot\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}\cdot\frac{1}{a}\right)^n < 1$$

sein. Wenn die Abkürzungen (19) wieder eingeführt werden, so kann diese Ungleichung auch geschrieben werden:

$$J < j,$$

eine Relation, die laut der Annahme im Eingange dieses Abschnittes thatsächlich erfüllt sein soll.

Diese Konvergenzuntersuchung hat indessen noch eine Lücke. Es ist zwar gezeigt worden, dass Q_l unter der Voraussetzung $J < j$ für u n e n d l i c h g r o s s e s l wirklich < 1 ist; da-

gegen fehlt der Nachweis, dass ebendasselbe auch schon von einem angebbaren, endlichen Werte von l ab der Fall ist. Diesen Nachweis, der sich bei der verwickelten Form des Quotienten Q_l hier keineswegs so einfach gestaltet, wie in vielen andern Fällen, will ich führen, indem ich zeige, dass Q_l für alle $l \geqq m+1$, d. h. für alle l, für welche Q_l in die Form (34) gebracht werden kann, mit wachsendem l selbst wächst, dass also ein beliebiges Q_l immer kleiner ist, als der Grenzwert der Q_l. Die beiden Beweise, die ich hierfür gefunden habe, sind ziemlich schwerfällig. Ich gebe hier den folgenden, der, obwohl weniger kurz, mir doch an sich bemerkenswert erscheint.

Ich betrachte Q_l als stetige Funktion der Veränderlichen l. Dann kann man ansetzen $Q_l = \frac{\psi(l)}{\chi(l)}$, wobei $\psi(l)$ und $\chi(l)$ ganze rationale Funktionen von l bedeuten. Man sieht nun aus (34), dass die Wurzeln der Gleichungen $\psi(l) = 0$ und $\chi(l) = 0$ sämtlich negativ sind, dass also für die in Betracht kommenden Werte von l sowohl $\psi(l)$ als auch $\chi(l)$ stets positiv und nie gleich 0 wird. Angenommen nun, der Quotient Q_l besässe für einen speziellen Wert von l nicht die Eigenschaft, mit wachsendem l selbst zu wachsen, es sei also

$$\frac{\psi(l+h)}{\chi(l+h)} \leqq \frac{\psi(l)}{\chi(l)} \text{ oder } \frac{\psi(l+h)}{\psi(l)} \leqq \frac{\chi(l+h)}{\chi(l)} \text{ oder}$$

$$\frac{\psi(l+h)}{\psi(l)} - \frac{\chi(l+h)}{\chi(l)} \tag{36}$$

negativ oder gleich 0. Würde man dann $\psi(l+h)$ und $\chi(l+h)$ nach dem Taylorschen Satze entwickeln, so würde das Anfangsglied der Entwicklung von (36) nach Potenzen von h lauten:

$$h\left[\frac{\psi'(l)}{\psi(l)} - \frac{\chi'(l)}{\chi(l)}\right].$$

Für hinreichend kleines h müsste das Vorzeichen des ganzen Ausdrucks (36) von dem Vorzeichen dieses ersten Gliedes abhängig sein. Damit daher der Ausdruck (36) negativ oder 0 werden könnte, müsste für unsern speziellen Wert von l

$$\frac{\psi'(l)}{\psi(l)} \leqq \frac{\chi'(l)}{\chi(l)}$$

sein. Es kann aber gezeigt werden, dass für alle in Betracht kommenden Werte von l diese Relation falsch ist, dass vielmehr stets

$$\frac{\psi'(l)}{\psi(l)} > \frac{\chi'(l)}{\chi(l)} \tag{37}$$

ist. Hiermit wäre dann die Behauptung über das Wachsen des Quotienten Q_l erwiesen.

Um die Richtigkeit der Ungleichung (37) zu zeigen, will ich mir die Quotienten $\frac{\psi'(l)}{\psi(l)}$ und $\frac{\chi'(l)}{\chi(l)}$ wirklich herstellen. Da $\psi(l)$ und $\chi(l)$ in Produktform gegeben sind, so ist dies bekanntlich ohne weiteres möglich. Man erhält, wenn man von dem inbezug auf l konstanten Faktor $\left(\frac{y^m}{a}\right)^n$ hier absieht, das Resultat: Es müsste folgende Ungleichheit bestehen

$$\frac{m+n}{n}\cdot\left[\frac{1}{\frac{m+n}{n}\,l+m+n-\frac{n-1}{n}}+\frac{1}{\frac{m+n}{n}\,l+m+n-1\frac{n-1}{n}}+\cdots\cdots\frac{1}{\frac{m+n}{n}\,l+1-\frac{n-1}{n}}\right]$$

$$>\frac{1}{l+n}+\cdots\cdots\frac{1}{l+1}+\frac{m}{n}\left[\frac{1}{\frac{m}{n}\,l+m+1-\frac{n-1}{n}}+\frac{1}{\frac{m}{n}\,l+m-\frac{n-1}{n}}+\cdots\cdots\frac{1}{\frac{m}{n}\,l+2-\frac{n-1}{n}}\right],$$

oder

$$\frac{1}{l+n-\frac{n-1}{m+n}}+\frac{1}{l+n-\frac{2n-1}{m+n}}+\cdots\cdots\frac{1}{l+n-\frac{(m+n)\,n-1}{m+n}}$$

$$>\frac{1}{l+n}+\frac{1}{l+n-1}+\cdots\frac{1}{l+n-(n-1)}+\frac{1}{l+n+\frac{1}{m}}+\frac{1}{l+n-\frac{n-1}{m}}+\frac{1}{l+n+\frac{2n-1}{m}}+\cdots\cdots\frac{1}{l+n-\frac{(m-1)n-1}{m}},$$

oder wenn für $l+n$ die neue Veränderliche z eingeführt wird:

$$\frac{1}{z-\frac{n-1}{m+n}}+\frac{1}{z-\frac{2n-1}{m+n}}+\cdots\cdots\frac{1}{z-\frac{(m+n)\,n-1}{m+n}}>\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\cdots\frac{1}{z-(n-1)}+\frac{1}{z-\frac{1}{m}}+\frac{1}{z-\frac{n-1}{m}}+\frac{1}{z-\frac{2\,n-1}{m}}+\cdots\frac{1}{z-\frac{(m-1)n-1}{m}}\quad\textbf{(38)}$$

Die Glieder auf der linken Seite dieser Ungleichung wachsen von Glied zu Glied. Es ist nun leicht, auch auf der rechten Seite die Glieder so anzuordnen, dass sie eine steigende Reihe bilden. Dazu führe man die Divisionen $\frac{n-1}{m}$, $\frac{2n-1}{m}$, ... $\frac{(m-1)\,n-1}{m}$ thatsächlich aus. Ich will jetzt 2 Fälle unterscheiden:

$$1)\ \frac{n-1}{m}\geqq 1,\ \text{also erst recht}\ \frac{n}{m}>1.\qquad\textbf{(39)}$$

Bezeichnet man die ganzen Zahlen, die sich als Quotienten der Divisionen $\frac{n-1}{m}$, $\frac{2n-1}{m}$ u. s. w. ergeben, mit s_1, s_2, ... s_{m-1}, so besteht folgende Reihe von Ungleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} s_1+1>\frac{n-1}{m}\geqq s_1,\\ s_2+1>\frac{2n-1}{m}\geqq s_2,\\ \vdots\\ s_r+1>\frac{rn-1}{m}\geqq s_r,\\ \vdots\\ s_{m-1}+1>\frac{(m-1)\,n-1}{m}\geqq s_{m-1}.\end{array}\right\}\textbf{(40)}$$

Nach (39) muss nun s_1 mindestens den Wert 1 besitzen. Da ferner die einzelnen Brüche $\frac{n-1}{m}$, $\frac{2n-1}{m}$ u. s. w. stets um den Betrag $\frac{n}{m}$ zunehmen, der nach (39) >1 ist, so kann nie der Fall eintreten, dass 2 aufeinanderfolgende s denselben Wert erhalten. Das letzte s, s_{m-1}, wird entschieden $<n-1$ sein müssen, wie aus Ungleichung (40) ebenfalls leicht folgt. Daher werden die Glieder, welche auf der rechten Seite der Ungleichung (38) als Subtrahenden zu z hinzutreten, in folgende steigende Reihe gebracht werden können:

$$-\frac{1}{m}, 0, 1, 2, \ldots s_1, \frac{n-1}{m}, s_1+1, \ldots s_r, \frac{rn-1}{m}, s_r+1, \ldots\ldots s_{m-1}, \frac{(m-1)\,n-1}{m}, s_{m-1}+1, \ldots (n-1). \quad \textbf{(41)}$$

Man erkennt nun ohne weiteres, dass die Ungleichung (38) als richtig erwiesen wäre, wenn gezeigt werden könnte, dass jedes Glied der Reihe (41) kleiner ist als das ebensovielte Glied der Reihe:

$$\frac{n-1}{m+n}, \frac{2n-1}{m+n}, \frac{3n-1}{m+n}, \frac{4n-1}{m+n}, \ldots\ldots \frac{(m+n)\,n-1}{m+n}. \quad \textbf{(42)}$$

Für die beiden Anfangsglieder der Reihen ergiebt sich dies sofort, für die übrigen Glieder durch folgende Betrachtung:

In der Reihe (41) ist 1 das dritte Glied, 2 das vierte, s_1 das s_1+2-te, $\frac{n-1}{m}$ das s_1+3-te, allgemein $\frac{rn-1}{m}$ das s_r+r+2-te, s_r+t das $s_r+t+r+2$-te. Es wäre also nachzuweisen

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ \dfrac{(s_r+r+2)\,n-1}{m+n} > \dfrac{rn-1}{m} \\ \text{b)}\ \dfrac{(s_r+t+r+2)\,n-1}{m+n} > s_r+t, \text{ wo } t \text{ alle Werte} \end{array}\right\} \quad \textbf{(43)}$$

von 1 bis $s_{r+1}-s_r$ annehmen kann.

Aus der in (40) enthaltenen Ungleichung

$$s_r+1 > \frac{rn-1}{m} \text{ folgt: Es ist erst recht } \frac{s_r+2}{rn-1} > \frac{1}{m}.$$

Multipliziert man beiderseits mit n und addiert beiderseits 1, so ergiebt sich

$$\frac{n\,(s_r+2)}{rn-1}+1 > \frac{n}{m}+1 \text{ oder } \frac{(s_r+r+2)\,n-1}{rn-1} > \frac{n+m}{m}.$$

Das ist aber nichts anders als die Ungleichung (43a), deren Richtigkeit hiermit bewiesen ist.

Aus der in (40) enthaltenen Ungleichung

$$(r+1)\,n-1 \geqq s_{r+1}\,.\,m, \text{ oder erst recht } (r+2)\,n-1 > s_{r+1}\,.\,m \quad \textbf{(44)}$$

folgt durch beiderseitige Addition von $s_{r+1}\,.\,n$

$$(s_{r-1}+r+2)\,n-1 > s_{r-1}\,.\,(m+n) \text{ oder } \frac{(s_{r+1}+r+2)\,n-1}{m+n} > s_{r-1}.$$

Diese Ungleichung wird ihrer Ableitung nach auch Gültigkeit besitzen, wenn in ihr an Stelle von s_{r+1} kleinere ganze Zahlen eingesetzt werden, z. B. die Zahlen s_r+t. Hiermit ist die Richtigkeit von (43b) erwiesen.

Die letzte Betrachtung wird jedoch hinfällig, sobald $r=m-1$ wird. Dann nämlich hätte die Ungleichung (44) keinen Sinn mehr, da in ihr eine Grösse s_m auftreten würde, die in dem Systeme (40) überhaupt nicht mehr vorkommt. Um zu zeigen, dass auch die letzten Glieder

der Reihe (41) von dem Gliede $s_{m-1}+1$ an bis zu dem Gliede $n-1$ Glied für Glied kleiner sind als die ebensovielten Glieder der Reihe (42), stelle ich folgende Überlegung an: Es ist sicherlich

$$\frac{(m+1)n-1}{m} > n-d,$$

wo d eine beliebige der Zahlen 1 bis $n-1$ bedeutet. Wird diese Ungleichung mit m multipliziert und dann beiderseits $(n-d).n$ addiert, so ergiebt sich

$$(m+n-d+1)\,n-1 > (n-d)(m+n), \text{ oder } \frac{(m+n-d+1)n-1}{m+n} > n-d.$$

Lässt man nun d der Reihe nach die Werte von $n-(s_{m-1}+1)$ an bis 1 annehmen, so ist auch der Rest der Behauptung erwiesen.

$$2)\quad \frac{n-1}{m} < 1.$$

Hier kann auch $\frac{n}{m} < 1$ angenommen werden; denn von dem Falle $\frac{n}{m} = 1$ kann abgesehen werden, weil die dann entstehende Gleichung $x^{2n} - a x^{n} + b = 0$ gleich im Eingange des zweiten Abschnittes von der Betrachtung ausgeschlossen wurde. In diesem Falle wird einer oder werden mehrere der Divisionen $\frac{n-1}{m}, \frac{2n-1}{m}$ u. s. w. Quotienten ergeben, die < 1 sind. Es sei etwa noch

$$\frac{s_1 . n-1}{m} \leqq 1 \;;\; \text{dagegen } \frac{(s_1+1)n-1}{m} > 1.$$

Nun können in der steigend geordneten Reihe der Glieder, die auf der rechten Seite von (38) als Subtrahenden in den Nennern auftreten, niemals zwei ganze Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... $n-1$ aufeinander folgen wegen der Ungleichung $\frac{n}{m} < 1$. Daher wird die Anordnung — beim Gebrauch analoger Bezeichnungen wie vorhin — lauten:

$$-\frac{1}{m}, 0, \frac{n-1}{m}, \frac{2n-1}{m} \ldots \frac{s_1 n-1}{m}, 1, \frac{(s_1+1)n-1}{m} \ldots \frac{s_{n-1} . n-1}{m}, n-1, \frac{(s_{n-1}+1)n-1}{m}, \ldots \frac{(m-1)n-1}{m}.$$

Der Beweis für die Richtigkeit der Ungleichung (38) ist jetzt genau so zu führen, wie im vorigen Falle. Ich übergehe ihn daher.

Erst hiermit kann die Konvergenz der Reihe (33) für den durch (30) definierten Wert von y als völlig bewiesen betrachtet werden. Setzt man in (33) für y seinen Wert aus (30) ein, so ergiebt sich

$$x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{/m+1} \cdot \left(\frac{m+n}{n} \cdot l - \frac{n-1}{n}\right)_l \cdot \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{a}\right]^l,$$

oder wenn wieder von der Abkürzung (19) Gebrauch gemacht wird:

$$x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{/m+1} \cdot \left(\frac{m+n}{n}\, l - \frac{n-1}{n}\right)_l \cdot J^{\frac{l}{n}}. \qquad \textbf{(45)}$$

Man erkennt leicht, dass der durch diese unendliche Reihe dargestellte Wert von x positiv und zwar die kleinste positive Wurzel der gegebenen Gleichung ist. Fassen wir die einzelnen Resultate dieses Abschnittes zusammen, so ergiebt sich der

Satz: Die Ungleichung $J < j$ stellt nicht bloss die notwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung für die Existenz positiver Wurzeln der beiden ersten Normalformen dar. Die kleinste dieser positiven Wurzeln wird durch (45) in Form einer unendlichen Reihe gegeben.

Wie steht es nun mit der andern, der grössten positiven Wurzel x_1 der gegebenen Gleichung? (28) geht durch die Substitution $x = \frac{1}{u}$ in folgende über:

$$u^{m+n} - c u^m + d = 0, \tag{46}$$

eine Gleichung, in welcher

$$c = \frac{a}{b} \; ; \; d = \frac{1}{b}$$

gesetzt wurde und in welcher im Vergleich zu der ursprünglichen Gleichung (28) m und n ihre Stelle vertauscht haben. Jetzt wird die hinreichende Bedingung für die Existenz positiver Wurzeln der Gleichung (46):

$$\left(\frac{d}{c}\right)^n \cdot \frac{1}{c^m} < j \; . \; \left(\text{vergl. } (19)\right)$$

Diese Bedingungsgleichung geht, wenn man für c und d ihre Werte einsetzt, wieder in die Relation $J < j$ über, die laut Annahme erfüllt sein soll. Die Gleichung (46) besitzt also positive Lösungen, ein Resultat, das ja zu erwarten war. Zugleich aber ergiebt sich der

Satz: Die beiden in (19) definierten Grössen J und j sind Invarianten der Gleichung $f(x) = 0$ in dem Sinne, dass sie denselben Wert annehmen, ob man sie für die ursprüngliche Gleichung oder für die durch Substitution $x = \frac{1}{u}$ entstandene neue Gleichung berechnet.

Jetzt braucht man nur so vorzugehen, wie bei der ursprünglichen Gleichung. Durch Inversion von (46) entsteht, analog der Gleichung (33), die Reihe:

$$u = v \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{ln+1} \cdot \binom{\frac{m+n}{m} \cdot l - \frac{m-1}{n}}{l} \cdot \left(\frac{v^n}{c}\right)^l. \tag{47}$$

Und diese Reihe wird noch konvergieren für denjenigen Wert von v, der sich, analog wie y aus (30), jetzt aus der Gleichung ergiebt:

$$v = \sqrt[m]{\frac{d}{c}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a}}. \tag{48}$$

Setzt man diesen Wert von v in (47) ein, so erhält man für die gesuchte kleinste positive Wurzel $\frac{1}{x_1}$ der Gleichung (46)

$$\frac{1}{x_1} = \sqrt[m]{\frac{1}{a}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{ln+1} \cdot \left(\frac{m+n}{m} \cdot l - \frac{m-1}{m}\right)_l \cdot J^{\frac{l}{m}}; \tag{49}$$

denn $\left(\frac{v^n}{c}\right)^l$ nimmt für den durch Gleichung (48) definierten Wert von v thatsächlich den Wert $J^{\frac{l}{m}}$ an.

Die bisherigen Betrachtungen dieses Abschnittes haben sowohl für die erste als auch für die zweite Normalform Gültigkeit. Jetzt will ich spezialisieren. Setze ich $m = g$ und $n = k$, so wird (28) in die erste Normalform übergehen, und die Formeln (45) und (49) werden dann die beiden positiven Wurzeln dieser Normalform darstellen. Aber jetzt kann in (48) die Grösse v 2 verschiedene reelle Werte annehmen, nicht bloss den positiven, der ihr bisher stillschweigend als der einzige mögliche Wert beigelegt worden ist und der in (49) zu verwenden ist, sondern auch einen negativen Wert, den ich kurz mit $-v$ bezeichnen will. Setzt man diesen Wert $-v$ in (47) ein, so muss die Reihe (47) natürlich auch für ihn konvergieren und folglich sich ein zugehöriger reeller Wert von u ergeben. Dieser Wert kann aber nichts anderes sein als die negative Wurzel $-\frac{1}{x_2}$ der Gleichung (46), wobei $-x_2$ die negative Lösung der ursprünglichen Gleichung (28) bezeichnet. Man erhält also, wie leicht zu übersehen ist:

$$-\frac{1}{x_2} = -\left|\sqrt[g]{\frac{1}{a}}\right| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{kl+1} \left(\frac{g+k}{g} \cdot l - \frac{g-1}{g}\right)_l \cdot \left|J^{\frac{l}{g}}\right|. \tag{50}$$

Hierbei bedeuten nach bekannter Abkürzung die vertikalen Striche $|\ \ |$ den absoluten Betrag der g-ten Wurzel.

Für die zweite Normalform, in welcher $m = k'$, $n = k$ zu setzen ist, kann weder bei der Grösse y in (30), noch bei der Grösse v in (48) eine Doppeldeutigkeit eintreten. Also existieren hier thatsächlich nur 2 reelle u. z. positive Lösungen, wie im zweiten Abschnitte ja auch gezeigt worden ist.

Die ganzen Betrachtungen dieses Abschnittes werden hinfällig, sobald die Annahme $J < j$ nicht mehr erfüllt ist. Die erste Normalform wird auch in diesem Falle $J > j$ noch eine reelle, und zwar eine negative Lösung besitzen. Wie diese Wurzel zu bestimmen ist, wird im folgenden Abschnitt gelehrt.

IV.

Ich wende mich jetzt der dritten und vierten Normalform zu, die beide in der Gleichung enthalten sind:

$$x^{m+n} - a x^n - b = 0 \tag{51}$$

oder

$$x^n \left(x^m - a\right) = b$$

In diesem Falle ergiebt sich für eine positive Wurzel c die Bedingung

$$c^m > a,$$

also genau das Gegenteil von (22). Weil nun aber das Bestehen der Ungleichung (22) eine wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit der Entwicklungen des vorigen Abschnittes war, so folgt, dass hier an einfache Übertragung der Resultate nicht zu denken ist.

Ich will hier $x = \frac{1}{u}$ setzen. Dann muss die neue Gleichung, ebenso wie die ursprüngliche, eine positive Wurzel haben. Die neue Gleichung kann nun geschrieben werden

$$b = \frac{1}{u^{m+n}} - \frac{a}{u^{n}} = u^{-(m+n)} \cdot \left(1 - a\,u^{m}\right). \tag{52}$$

Für die Existenz einer positiven Wurzel u_0 ergiebt sich jetzt die Bedingung:

$$a\,u_0^{m} < 1,$$

so dass die Differenz $1 - a\,u^{m}$ für alle u von $u = 0$ bis $u = u_0$ einschliesslich nach dem binomischen Satze potenziert werden kann. Setze ich jetzt

$$b = v^{-(m+n)} \quad ; \quad v = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m+n}}, \tag{53}$$

so geht (52) über in folgende Gleichung:

$$v^{-(m+n)} = u^{-(m+n)} \cdot \left(1 - a\,u^{m}\right)$$

$$v = u \cdot \left(1 - a\,u^{m}\right)^{-\frac{1}{m+n}}.$$

Entwickelt man rechts nach dem binomischen Satze, so entsteht eine Potenzreihe von u, die der Umkehrung fähig ist. Zur Bestimmung des Koeffizienten $b_{r-1,1}$ ist die Kenntnis des Koeffizienten von u^{r-1} in der Entwicklung von

$$\left(1 - a\,u^{m}\right)^{\frac{r}{m+n}} \tag{54}$$

nötig. Nach dem binomischen Satze ist dieser Ausdruck (54)

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l} \cdot \left(\frac{r}{m+n}\right)_{l} \cdot a^{l} \cdot u^{lm}.$$

Der Faktor der Potenz u^{r-1} wird also im allgemeinen der Null gleich sein, ausgenommen für diejenigen Werte von r, welche den Gleichungen genügen

$$r - 1 = lm,$$

wo l einen beliebigen der Werte von 0 bis ∞ annehmen kann. Daraus ergiebt sich genau wie im vorigen Abschnitte

$$b_{lm,1} = \frac{(-1)^{l}}{lm+1} \cdot \left(\frac{lm+1}{m+n}\right)_{l} \cdot a^{l}$$

und

$$u = v \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{lm+1} \cdot \binom{lm+1}{m+n}_l \left(a v^m\right)^l \tag{55}$$

Jetzt bilde ich den Quotienten des $l+m+n$-ten und des l-ten Gliedes. Er heisse wieder Q_l. Dann wird, vom Zeichen abgesehen:

$$Q_l = \frac{(lm+1) \cdot \left(\frac{lm+1}{m+n} + m\right)\left(\frac{lm+1}{m+n} + m - 1\right) \cdots\cdots \left(\frac{lm+1}{m+n} + m - l - m - n + 1\right)}{[lm + m(m+n) + 1] \cdot (l+m+n) \cdot (l+m+n-1) \cdots (l+1) \cdot \left(\frac{lm+1}{m+n}\right)\left(\frac{lm+1}{m+n} - 1\right) \cdots \left(\frac{lm+1}{m+n} - l + 1\right)} \cdot \left(a v^m\right)^{m+n}.$$

Hebt man den zweiten Faktor im Zähler des Bruches auf der rechten Seite gegen den ersten Faktor im Nenner und den ersten Faktor im Zähler gegen den Faktor $\frac{lm+1}{m+n}$ im Nenner, so bleibt

$$Q_l = \frac{\left(\frac{lm+1}{m+n} + m - 1\right)\left(\frac{lm+1}{m+n} + m - 2\right) \cdots\cdots \left(\frac{lm+1}{m+n} + m - l - m - n + 1\right)}{(l+m+n)(l+m+n-1) \cdots (l+1)\left(\frac{lm+1}{m+n} - 1\right)\left(\frac{lm+1}{m+n} - 2\right) \cdots \left(\frac{lm+1}{m+n} - l + 1\right)} \cdot \left(a v^m\right)^{m+n}. \tag{56a}$$

Der Bruch auf der rechten Seite hat im Zähler und Nenner $l+m+n-1$ Faktoren, also jedenfalls mehr als m Faktoren. Daher wird sich stets eine ganze Anzahl von Faktoren gegeneinander heben lassen, und es bleibt

$$Q_l = \frac{\left(\frac{lm+1}{m+n} + m - 1\right) \cdots \left(\frac{lm+1}{m+n}\right) \cdot \left(\frac{lm+1}{m+n} - l\right)\left(\frac{lm+1}{m+n} - l - 1\right) \cdots \left(\frac{lm+1}{m+n} - l - n + 1\right)}{(l+m+n) \cdots\cdots (l+1)} \cdot \left(a v^m\right)^{m+n} \tag{56b}$$

$$= \frac{(-1)^n \left(\frac{lm+1}{m+n} + m - 1\right) \cdots \left(\frac{lm+1}{m+n}\right) \cdot \left(\frac{ln-1}{m+n}\right)\left(\frac{ln-1}{m+n} + 1\right) \cdots \left(\frac{ln-1}{m+n} + n - 1\right)}{(l+m+n) \cdots (l+1)} \cdot \left(a v^m\right)^{m+n}.$$

Jetzt beträgt die Anzahl der Faktoren in Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite nur noch $m+n$. Man könnte nun genau so wie im dritten Abschnitt beweisen, dass der absolute Betrag von Q_l mit wachsendem l selbst wächst, dass also jedes beliebige Q_l dem absoluten Betrage nach $<$ ist als der absolute Betrag des Grenzwertes der Quotienten Q_l. Dieser Grenzwert, dem Q_l, vom Zeichen abgesehen, für unendlich grosses l zustrebt, wird

$$\frac{m^m}{(m+n)^m} \cdot \frac{n^n}{(m+n)^n} \cdot \left(a v^m\right)^{m+n}. \tag{57}$$

Dieser Grenzwert müsste auch noch für den durch (53) definierten Wert von v kleiner als 1 bleiben. Es müsste also sein:

$$\frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}} < \frac{a^{m+n}}{b^m},$$

d. h. mit Anwendung der Abkürzungen (19)

$$j < J. \tag{58}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so konvergiert die fragliche Reihe, und man erhält die positive Wurzel $\frac{1}{x_0}$ der Gleichung (52) — wobei x_0 die positive Lösung der gegebenen Gleichung (51) bedeutet —, indem man in (55) für v seinen Wert aus (53) einsetzt. Es wird

$$\frac{1}{x_0} = \sqrt[m+n]{\frac{1}{b}} \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_l \frac{(-1)^l}{lm+1} \cdot \binom{lm+1}{m+n}_l \cdot \left(\frac{a}{b^{\frac{m}{m+n}}}\right)^l$$

oder nach (19)

$$\frac{1}{x_0} = \sqrt[m+n]{\frac{1}{b}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{lm+1} \cdot \binom{lm+1}{m+n}_l \cdot J^{-\frac{l}{m \mid n}}. \tag{59}$$

Die bisherigen Betrachtungen galten für die dritte und vierte Normalform gleichzeitig. Jetzt will ich spezialisieren. Wenn $m = k$, $n = g$ ist, so geht die Gleichung (51) in die dritte Normalform über. Da $m+n$ in diesem Falle eine ungerade Zahl ist, so wird Gleichung (53) nur einen einzigen reellen Wert für v liefern, so dass sich auch nach dieser Methode ergiebt: Die dritte Normalform hat lediglich eine reelle Wurzel. Denn auch ein Versuch, zur Ermittelung etwaiger anderer reeller Lösungen jetzt wieder das Verfahren des vorigen Abschnittes anzuwenden, wird zu nichts führen, wie man sich durch Ausführung leicht überzeugt.

Anders bei der vierten Normalform! Hier ist $m = k'$, $n = k$, also $m+n$ eine gerade Zahl. Folglich wird sich aus (53) ausser dem positiven Werte der $m+n$-ten Wurzel, welcher in (59) zu benutzen ist, noch ein zweiter negativer Wert ergeben. Bezeichnet man ihn mit v_1, während für den positiven Wert die Bezeichnung v beibehalten wird, so ist

$$v_1 = -1 \cdot v \quad ; \quad v_1^{k'} = -1 \cdot v^{k'} = \frac{-1}{b^{\frac{k'}{k'+k}}}.$$

Diese Werte an Stelle von v in (55) eingesetzt, liefern folgende Reihe für die negative Wurzel $-\frac{1}{x_2}$ der Gleichung (52):

$$-\frac{1}{x_2} = -\left|\sqrt[k'+k]{\frac{1}{b}}\right| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k'+l1} \cdot \binom{k'l+1}{k'+k}_l \cdot \left|J^{-\frac{l}{k'+k}}\right| \tag{60}$$

Durch die Untersuchungen dieses Abschnittes kann jetzt der früher ausgeschlossene Fall erledigt werden, dass in der ersten Normalform

$$x^{g+k} - a x^k + b = 0$$

nicht die Bedingung $J < j$, sondern vielmehr $j < J$ erfüllt ist. In der That: Durch die Substitution $x = -\frac{1}{u}$ geht die Gleichung über in

$$-\frac{1}{u^{g+k}} + \frac{a}{u^k} + b = 0$$

oder
$$b = u^{-(g+k)} \cdot \left(1 - a u^{g}\right).$$

Das ist aber gerade die Gleichung (52). (59) liefert die positive Wurzel $\frac{1}{x_2}$ dieser Gleichung, wenn $-x_2$ die negative Lösung der ersten Normalform bedeutet. Es wird nach (59)

$$-\frac{1}{x_2} = -\sqrt[g+k]{\frac{1}{b}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{g\,l+1} \binom{g\,l+1}{g+k}_l \cdot J^{-\frac{l}{g+k}}. \tag{61}$$

Die bisher in diesem Abschnitte aufgestellten Formeln werden hinfällig, sobald die Bedingung $j < J$ nicht erfüllt ist, sondern wieder, wie im dritten Abschnitte, $J < j$ ist. Auch dann noch müssen die dritte und vierte Normalform eine positive Lösung haben. Diese lässt sich durch folgendes Verfahren bestimmen:

Die Substitution $x = \frac{1}{u}$ in die Gleichung (51) ergiebt:

$$\frac{1}{u^{m+n}} - b = \frac{a}{u^{n}} \quad \text{oder}$$

$$\left(1 - b\,u^{m+n}\right) \cdot u^{-m} = a. \tag{62}$$

Jetzt werde

$$a = v^{-m} \; ; \; v = \sqrt[m]{\frac{1}{a}} \tag{63}$$

gesetzt, so lautet die Gleichung (62)

$$v = u \left(1 - b\,u^{m+n}\right)^{-\frac{1}{m}}. \tag{64}$$

Nun kann die rechte Seite innerhalb der Grenzen, um die es sich hier handelt, nach dem binomischen Satze entwickelt und die so entstandene Potenzreihe umgekehrt werden. Man erkennt, dass hier die Gleichungen (52) bis (55) Gültigkeit behalten werden, wenn man in ihnen nur 1) m und m+n, 2) a und b mit einander vertauscht. Die Formeln (56 a) und (56 b) werden eine tiefer greifende Änderung erfahren; nämlich die Ausführung der Rechnungen zeigt, dass die n letzten Faktoren, welche in (56 b) im Zähler des Bruches auf der rechten Seite stehen, jetzt in den Nenner treten müssen. Beachtet man dies und die vorhin erwähnten Vertauschungen, so findet man mit Hülfe von (57) leicht, dass der absolute Betrag des Quotienten Q_l für $l = \infty$ folgender Grenze zustrebt:

$$\frac{(m+n)^{m+n}}{m^{m} \cdot n^{n}} \cdot b^{m} \cdot v^{m(m+n)}.$$

Damit dieser Quotient auch dann noch, wenn für v der durch die Gleichung (63) definierte Wert eingesetzt wird, dem absoluten Betrage nach < 1 bleibe, muss folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$b^m \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{m+n}}} < \frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

d. h. gerade die Ungleichung $J < j$, deren Existenz wir vorausgesetzt haben. Folglich ergiebt sich die positive Lösung $\frac{1}{x_0}$ der Gleichung (62) aus (55), wenn darin die mehrfach erwähnten Vertauschungen vorgenommen werden. Es wird

$$\frac{1}{x_0} = v \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l(m+n)+1} \cdot \binom{l(m+n)+1}{m}_l \cdot \left(b \cdot v^{m+n}\right)^l, \tag{65}$$

oder durch Einsetzung des Wertes von v aus (63)

$$\frac{1}{x_0} = \sqrt[m]{\frac{1}{a}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l(m+n)+1} \binom{l(m+n)+1}{m}_l \cdot J^{\frac{l}{m}}. \tag{65a}$$

Diese Betrachtungen gelten für die dritte und vierte Normalform gleichzeitig. Jetzt spezialisiere ich wieder. Wenn die dritte Normalform vorgelegt ist, in welcher $m = k$, $n = g$ ist, so ist der durch (63) definierte Wert von v eindeutig. Es ist bloss eine einzige positive Lösung möglich.

Da aber auch in der vierten Normalform $m = k'$ ist, so wird aus (63) auch hier nur ein einziger und zwar positiver Wert von v hervorgehn. Nun aber sind bei der vierten Normalform, wie im zweiten Abschnitte gezeigt, in jedem Falle zwei reelle Lösungen möglich. Die noch fehlende negative kann auf folgende Weise erhalten werden: Man substituiere in die gegebene Gleichung

$$x^{k'+k} - a x^k - b = 0$$

$x = -u$. Dann wird

$$u^{k'+k} + a u^k = b \quad . \qquad \text{oder}$$

$$\frac{a}{b} u^k = 1 - \frac{u^{k'+k}}{b} \qquad \text{oder}$$

$$\frac{a}{b} = u^{-k}\left(1 - \frac{u^{k'+k}}{b}\right).$$

Jetzt setze man

$$\frac{a}{b} = v^{-k} \quad ; \quad v = \sqrt[k]{\frac{b}{a}}, \tag{66}$$

dann wird

$$v = u\left(1 - \frac{u^{k'+k}}{b}\right)^{-\frac{1}{k}}. \tag{67}$$

Man sieht, dies ist genau die Gleichung (64), nur dass k an Stelle von m und k' an Stelle von n und $\frac{1}{b}$ an Stelle von b getreten ist und dass jetzt v den durch (66) definierten Wert besitzt.

Man erhält demgemäss für die gesuchte positive Lösung x_2 der Gleichung (67) — wobei $-x_2$ die negative Wurzel der vierten Normalform bezeichnet — nach (65) folgende Reihe:

$$-x_2 = -v \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(k'+k)\,l+1} \left(\frac{(k'+k)l+1}{k}\right)_l \left(\frac{v^{k'+k}}{b}\right)^l, \tag{68}$$

oder mit Einsetzung des Wertes von v aus (66)

$$-x_2 = -\sqrt[k]{\frac{b}{a}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(k'+k)\,l+1} \cdot \left(\frac{(k'+k)\,l+1}{k}\right)_l \cdot J^{\frac{l}{k}}. \tag{68 a}$$

Anmerkung: Man überzeugt sich leicht, dass im Falle der dritten Normalform ein analoges Verfahren zu nichts führt.

V.

In diesem Abschnitte soll zuerst der bisher ausdrücklich ausgeschlossene Fall

$$J = j$$

untersucht werden. Sei wieder die Gleichung

$$f(x) = x^{m+n} - a\,x^n + b = 0$$

vorgelegt, in der die beiden ersten Normalformen enthalten sind. Dann behalten die im dritten Abschnitte angestellten Betrachtungen zunächst ihre volle Gültigkeit, und es handelt sich nur darum, zu untersuchen, ob die Reihe (45) noch konvergent bleibt unter der Voraussetzung, dass j an Stelle von J gesetzt wird. Man bilde auch jetzt wieder Q_l, den Quotienten des $l+n$-ten und des l-ten Gliedes. Für dieses Q_l ergiebt sich nach (34), wenn darin für y der durch (30) definierte Wert eingesetzt wird, folgender Ausdruck:

$$Q_l = \frac{\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+m+n-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{m+n}{n}\cdot l+m+n-1-\frac{n-1}{n}\right)\cdots\cdots\cdots\left(\frac{m+n}{n}\,l+1-\frac{n-1}{n}\right)}{(l+n)\,l+n-1)\ldots(l+1)\cdot\left(\frac{m}{n}\cdot l+m+1-\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\cdot l+m-\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{m}{n}\cdot l+2-\frac{n-1}{n}\right)}\cdot J. \tag{69}$$

Jetzt ist aber

$$J = j = \frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}} = \frac{\left(\frac{n}{m+n}\right)^{m+n}}{\left(\frac{n}{m}\right)^m}.$$

Man kann nun jeden der $m+n$ Faktoren $\frac{n}{m+n}$, in die sich der Zähler des letzten Bruches zerlegen lässt, mit einem Faktor im Zähler von (69) multiplizieren, und ebenso jeden der m Faktoren $\frac{n}{m}$, in die sich der Nenner zerlegen lässt, mit einem der m letzten Faktoren im Nenner von (69). Dann nimmt Q_l folgende Gestalt an

$$Q_l = \frac{\left(l+n-\frac{n-1}{m+n}\right)\cdot\left(l+n-\frac{2n-1}{m+n}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\left(l+n-\frac{(m+n)\,n-1}{m+n}\right)}{(l+n)\,(l+n-1)\ldots(l+1)\left(l+n+\frac{1}{m}\right)\left(l+n-\frac{n-1}{m}\right)\left(l+n-\frac{2n-1}{m}\right)\cdots\left(l+n-\frac{(m-1)\,n-1}{m}\right)}. \tag{70}$$

Dieser Quotient nimmt, wie aus den betreffenden Betrachtungen des dritten Abschnittes unmittelbar folgt, für sehr grosse l die Form an

$$\frac{1}{1+\varphi(l)},$$

wobei $\varphi(l)$ eine positive Grösse bedeutet, die für $l = \infty$ verschwindet. Man verfahre nun in diesem kritischen Falle des früheren Konvergenzkriteriums wie üblich:

Indem man von der Vergleichsreihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l^r} \quad ; \quad r > 1$$

ausgeht, findet man, dass die in Frage stehende Reihe konvergieren wird, sobald

$$Q_l \leqq \frac{l^r}{(l+n)^r}$$

ist, das heisst, sobald

$$1 + \varphi(l) \geqq \frac{(l+n)^r}{l^r}$$

ist. Da nun aber für alle $r > 1$ jedenfalls

$$\left(\frac{l+n}{l}\right)^r > 1 + \frac{nr}{l}$$

gesetzt werden darf, so wird die zu untersuchende Reihe sicherlich konvergieren, sobald von einem bestimmten l ab bis zu $l = \infty$ die Relation stattfindet:

$$l \,.\, \varphi(l) > nr \quad ; \quad r > 1. \tag{71}$$

Um in unserem Falle $\varphi(l)$ zu bilden, schreibe man

$$Q_l = \frac{\psi(l)}{\chi(l)} = \frac{\psi(l)}{\psi(l)+\chi(l)-\psi(l)} = \frac{1}{1 - \frac{\chi(l)-\psi(l)}{\psi(l)}}.$$

Also es wird

$$\varphi(l) = \frac{\chi(l) - \psi(l)}{\psi(l)}. \tag{72}$$

Um jetzt den Grenzwert des Produktes $l \,.\, \varphi(l)$ für ein unendlich grosses l zu finden, ist es wie man leicht sieht, nur notwendig, den Faktor der höchsten Potenz von l in der Differenz $\chi(l)-\psi(l)$ zu bestimmen. Man setze nun:

$$\left.\begin{aligned} \chi(l) &= l^{m+n} + a_1 l^{m+n-1} + a_2 l^{m+n-2} + \ldots \\ \varphi(l) &= l^{m+n} + b_1 l^{m+n-1} + b_2 . l^{m+n-2} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Dann wird in der Differenz $\chi(l) - \varphi(l)$ der Faktor der $m+n-1$-ten Potenz von l gleich $a_1 - b_1$. Diese Grössen a_1 und b_1 sind aber leicht zu berechnen; sie sind nichts anderes als die Summen

derjenigen Glieder, die in der Produktdarstellung von $\chi(l)$ und $\psi(l)$ in den einzelnen Faktoren als Summanden zu l hinzutreten. Man erhält daher die Grössen a_1 und b_1 mit Hülfe der bekannten Formel für die Summe der s ersten ganzen Zahlen. Die Differenz $a_1 - b_1$ wird $\frac{3n}{2}$. Dieser Grenze muss s ich für ein unendlich grosses l das Produkt $l \,.\, \varphi(l)$ nähern; also für $l = \infty$ ist die Konvergenzbedingung (71) erfüllt. Der Nachweis, dass ebendasselbe schon von einem angebbaren endlichen l ab der Fall sein muss, ist auch hier recht schwerfällig. Er läuft darauf hinaus, zu zeigen, dass $l \,.\, \varphi(l)$, als stetige Funktion von l betrachtet, von einem gewissen endlichen l an dem Werte nach beständig abnimmt, wenn l grösser und grösser wird. Es kann dieser Nachweis nicht so geführt werden, wie der entsprechende im dritten Abschnitte, weil hier, wie (72) zeigt, die für die Gültigkeit jener Untersuchungen notwendige Voraussetzung fehlt, dass Zähler und Nenner von $l \,.\, \varphi(l)$ in Produktform gegeben sind. Ich gebe hier folgenden Beweis:

Ganz ähnlich, wie im dritten Abschnitte, ergiebt sich, dass für die Existenz der Ungleichung

$$l\,\varphi(l) > (l+h)\,\varphi(l+h) \tag{74}$$

oder

$$\varphi(l) > \left(1 + \frac{h}{l}\right) \varphi(l+h)$$

die hinreichende und notwendige Bedingung folgende ist:

$$0 > \frac{\varphi(l)}{l} + \varphi'(l)$$

oder

$$\varphi(l) + l\varphi'(l) < 0.$$

Indem man hierin für $\varphi(l)$ und $\varphi'(l)$ ihre Werte aus (72) einsetzt, erhält man durch eine einfache Transformation die Bedingungsungleichung:

$$\psi(l)\,[\chi(l) - \psi(l)] - l[\chi(l)\,\psi'(l) - \psi(l)\,\chi'(l)] < 0. \tag{75}$$

Man findet leicht, dass auf der linken Seite dieser Ungleichung die beiden höchsten Potenzen von l, nämlich l^{2m+2n} und $l^{2m+2n-1}$, zum Fortfall kommen und dass der Faktor der Potenz $l^{2m+2n-2}$ folgender wird:

$$b_1(a_1 - b_1) - (a_2 - b_2). \tag{76}$$

Um ihn zu finden, wäre also die Berechnung der Koeffizienten a_2 und b_2 nötig. Nun ist nach bekannten Sätzen über die Koeffizienten algebraischer Gleichungen

$$2a_2 = a_1^2 - \sum_{r=1}^{m+n} x_r^2,$$

wobei x_r eine beliebige der, aus der Produktform in (70) sich unmittelbar ergebenden Wurzeln der Gleichung $\chi(l) = 0$ bezeichnet. Genau so wird

$$2b_2 = b_1^2 - \sum_{r=1}^{m+n} y_r^2,$$

wo y_r eine beliebige Wurzel der Gleichung $\psi(l) = 0$ bedeutet. Folglich wird

$$a_2 - b_2 = \frac{1}{2}\left(a_1^2 - b_1^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m+n}\left(y_r^2 - x_r^2\right);$$

und der ganze Ausdruck (76) nimmt nach einigen Transformationen die Form an:

$$-\frac{1}{2}\left(a_1 - b_1\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m+n}\left(y_r^2 - x_r^2\right). \tag{77}$$

Die Summen der Wurzelquadrate x_r^2 und y_r^2 lassen sich in unserem Falle mit Hülfe der Formel für die Summe der Quadrate der ersten s ganzen Zahlen berechnen. Die Durchführung der recht umständlichen Rechnungen ergiebt, dass der Ausdruck (77) oder, was dasselbe ist, der Ausdruck (76) folgenden Wert hat:

$$\frac{n}{24\,m\,(m+n)} \cdot \Big[(m+n)\,(-9mn+2m+2n+24) - 2mn - 12\,(n-1)\Big]. \tag{78}$$

Man überzeugt sich leicht, dass dieser Ausdruck für alle in Frage kommenden Werte von m und n negativ sein wird, ausgenommen die 3 Fälle, dass $n = 1$ und m entweder $= 1$ oder $= 2$ oder $= 3$ ist. Aber diese Ausnahmefälle sind praktisch bedeutungslos: Wenn nämlich die trinomische Gleichung höchstens biquadratisch ist und ferner infolge der Bedingung $J = j$ die Doppelwurzel (17) besitzt, so können die noch fehlenden Wurzeln auf elementarem Wege durch Auflösung einer Gleichung von höchstens zweitem Grade gefunden werden. Ich behalte mir jedoch vor, an anderer Stelle auf diese interessanten Fälle zurückzukommen.

Jedenfalls ist hiermit gezeigt, dass mit Ausnahme der 3 erwähnten Fälle der Faktor der höchsten Potenz von l in dem Ausdrucke (75) stets negativ ist. Es ist nun leicht möglich, eine endliche obere Grenze anzugeben, unterhalb deren stets der absolute Betrag der Faktoren sämtlicher übrigen Potenzen von l in dem Ausdrucke (75) bleiben muss. Dann aber kann nach einem bekannten Satze der Algebra auch immer ein bestimmter, endlicher Wert l_1 angegeben werden von der Beschaffenheit, dass die Funktion (75) für alle $l > l_1$ negativ wird. Damit ist der Beweis für die Richtigkeit der Ungleichung (75) oder, was dasselbe ist, der Ungleichung (74) gegeben und die Konvergenz der Reihe (45) für den Fall $J = j$ festgestellt.

Die unendliche Reihe in (49), welche den reziproken Wert der zweiten positiven Wurzel von $f(x) = 0$, also in unserem Falle den reziproken Wert der Doppelwurzel darstellt, unterscheidet sich von der Reihe in (45) nur dadurch, dass m und n ihre Stellungen vertauscht haben. Sie wird also gleichfalls konvergent bleiben müssen, wobei aber wieder einer besonderen Untersuchung die 3 Fälle vorbehalten bleiben müssen, in denen der (78) entsprechende Ausdruck

$$\frac{m}{24\,n\,(m+n)}\Big[(m+n)\,(-9mn+2m+2n+24) - 2mn - 12\,(m-1)\Big]$$

positiv wird.

Folglich muss jetzt auch die Reihe in (50) unter der Annahme $J = j$ konvergent bleiben, da die Reihe in (49) nichts anderes ist, als die Summe der absoluten Beträge der Glieder von (50). Also man erhält das

Resultat: Die Reihen (45), (49), (50) bleiben konvergent, wenn in ihnen j an Stelle von J gesetzt wird.

Gleichzeitig ergiebt sich aber noch folgendes: Wenn in (49) j für J und für $\frac{1}{x}$ der reziproke Wert der Doppelwurzel aus (17) gesetzt wird, so erhält man, nachdem der Faktor $\sqrt[m]{\frac{1}{a}}$ auf beiden Seiten fortgehoben ist, die merkwürdige Identität:

$$\left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{1}{m}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{ln+1}\left(\frac{m+n}{m}\,l - \frac{m-1}{m}\right)_l \cdot j^{\frac{l}{m}}. \tag{79}$$

Es ist mir nicht gelungen, diese Identität nachträglich durch Anwendung des binomischen Satzes als richtig zu erweisen. Eine ganz ähnliche Identität würde sich leicht aus (45) ergeben. Dieselbe kann man aber einfacher erhalten, indem man in (79) m und n miteinander vertauscht.

Bei der dritten und vierten Normalform sind keine Doppelwurzeln möglich, wie schon im zweiten Abschnitte gezeigt worden ist. Wohl aber kann auch hier der Fall $J = j$ eintreten. (Wegen des Zeichens — bei dem Koeffizienten b in der dritten und vierten Normalform hätte, wenn genau dieselbe Bezeichnungsweise wie bei den ersten beiden Normalformen beibehalten wäre, die Relation hier $J = -j$ geschrieben werden müssen.) Es fragt sich jetzt, ob die unter der Annahme $j < J$ oder die unter der entgegengesetzten Annahme im vierten Abschnitte abgeleiteten Reihen beim Übergang zu dem Falle $J = j$ auf ihre Konvergenz zu untersuchen sind. Die Untersuchung von (65a) unter der Annahme $J = j$ ergiebt, dass der absolute Betrag des Quotienten Q_l, d. h. des Quotienten des $l+m$-ten und des l-ten Gliedes wieder genau die Form (70) annimmt, nur dass m und n miteinander zu vertauschen sind. Folglich wird, wie vorhin die Reihe (49), so jetzt die Reihe (65a) unter der Annahme $J = j$ noch konvergent bleiben; ja, sie wird sogar noch konvergieren, wenn an Stelle der einzelnen Glieder ihre absoluten Beträge eingesetzt werden. Genau so kann schliesslich noch bewiesen werden, dass auch die Formel (68a) für $J = j$ Gültigkeit behält, selbst dann noch, wenn an Stelle der einzelnen Glieder deren absolute Beträge gesetzt werden.

Anmerkung: Zum Überfluss könnte man jetzt auch noch die unter der Annahme $j < J$ abgeleiteten Reihen (59) und (60) daraufhin untersuchen, ob sie für $j = J$ konvergent bleiben. Es ergiebt sich, dass wenigstens die absoluten Beträge ihrer Glieder keine konvergente Summe mehr haben, sondern eine stark divergente. Wenn man nämlich unter der Annahme $J = j$ wieder Q_l, den Quotienten des $l+m+n$-ten und l-ten Gliedes, bildet, ihn transformiert und schliesslich das Konvergenzkriterium (71) anwendet, so findet man, dass $l\varphi(l)$ hier als Grenzwert den negativen Wert $-\frac{3(m+n)}{2}$ annimmt.

Vom zweiten Abschnitte an bezogen sich bisher alle Betrachtungen lediglich auf die reellen Wurzeln der trinomischen Gleichungen. Es ist nun aber auch ohne weiteres möglich, **die komplexen Wurzeln** ganz in derselben Weise zu behandeln. Denn die sämtlichen unendlichen Reihen, durch welche die reellen Wurzeln der Gleichungen dargestellt werden konnten, sind vermöge unserer Konvergenzuntersuchungen, bei denen bloss die absoluten Beträge der Quotienten Q_l eine Rolle spielten, absolut konvergent, auch noch in dem kritischen Falle des

ersten Konvergenzkriteriums. Folglich bleibt die Konvergenz der Reihen unverändert bestehen, wenn man in (33), (47), (55), (65) und (68) an Stelle von y oder von v die komplexen Wurzeln setzt, welche den Gleichungen (30), (48), (53), (63), (66) genügen. Sei zuerst die Gleichung

$$f(x) = x^{m+n} - a x^{n} + b = 0$$

gegeben, in der die beiden ersten Normalformen enthalten sind, und sei $J \leqq j$. Dann erhält man aus (30) die folgenden Werte von y:

$$y = \left|\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right| \cdot \left(\cos\frac{2r\pi}{n} + i \sin\frac{2r\pi}{n}\right),$$

wo r alle ganzzahligen Werte von 0 bis n—1 annehmen kann. Um die aus der Formel (33) sich ergebendeu Wurzeln berechnen zu können, wäre zu bilden

$$\left(\frac{y^m}{a}\right)^l = \left|\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{a}\right)\right|^l \cdot \left(\cos\frac{2r\pi}{n} + i \sin\frac{2r\pi}{n}\right)$$

$$= \left|J^{\frac{l}{n}}\right| \cdot \left(\cos\frac{2lmr\pi}{n} + i \sin\frac{2lmr\pi}{n}\right)$$

Setzt man dies in (33) ein, so ergiebt sich, dass n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ durch die Formel gegeben werden:

$$x_r = \left|\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right| \cdot \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{lm+1} \cdot \left(\frac{m+n}{n} \cdot l - \frac{n-1}{n}\right)_l \cdot \left|J^{\frac{l}{n}}\right| \cdot \cos\frac{2(lm+1)r\pi}{n} + i \sum \ldots \sin \ldots\right] \quad (80)$$

wo r alle ganzzahligen Werte von 0 bis n—1 annehmen kann. Die Abkürzung $\sum \ldots \sin \ldots$ soll in (80) sowie im folgenden den Sinn haben, dass hier genau dieselben Grössen wie in der vorhergeheuden Summe zu summieren sind, nur dass an Stelle der Kosinusfunktion hier der Sinus zu setzen ist. Die fehlenden m Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ kann man genau auf dieselbe Weise erhalten, indem man in (47) an Stelle von v die m Werte einführt, welche aus (48) für v sich ergeben. Dann entsteht eine neue Gleichung, von der (49) und (50) bloss spezielle Fälle sind. Und zwar ist

$$\frac{1}{x_s} = \left|\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\right| \cdot \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{ln+1} \cdot \left(\frac{m+n}{m} l. - \frac{m-1}{m}\right)_l \left|J^{\frac{l}{m}}\right| \cos\frac{2(ln+1)s\pi}{m} + i \sum \ldots \sin \ldots\right]. \quad (81)$$

wobei s eine beliebige der ganzen Zahlen von 0 bis m—1 bezeichnet.

Wenn die dritte oder vierte Normalform gegeben und zunächst die Bedingung $j < J$ erfüllt ist, so braucht man nur in (55) für v den Wert einzusetzen, der sich aus (53) ergiebt. Es wird

$$v = \sqrt[m+n]{\frac{1}{b}} = \left|\sqrt[m+n]{\frac{1}{b}}\right| \cdot \left(\cos\frac{2r\pi}{m+n} + i \sin\frac{2r\pi}{m+n}\right),$$

daher nach (55)

$$\frac{1}{x_r} = \left|\sqrt[m+n]{\frac{1}{b}}\right| \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{lm+1} \left(\frac{lm+1}{m+n}\right)_l \left|J^{-\frac{l}{m+n}}\right| \cdot \cos\frac{2(lm+1)r\pi}{m+n} + i\sum \ldots \sin \ldots\right], \quad (82)$$

wobei r eine beliebige der ganzen Zahlen von 0 bis m+n—1 bezeichnet. Diese Formel (82) stellt aber bis auf das Vorzeichen von x_r auch gleichzeitig die sämtlichen m+n Wurzelu der ersten Normalform für den Fall $j < J$ dar. Man hat nur g an Stelle von m und k an Stelle von n zu setzen.

Bei der zweiten Normalform ist im Falle $j < J$ eine geringe Änderung der Betrachtungen erforderlich, die im vierten Abschnitte für die erste Normalform galten. Nämlich die zweite Normalform wird durch die Substitution $x = -\frac{1}{u}$ übergeführt in

$$\frac{1}{u^{k'+k}} + \frac{a}{u^k} + b = 0 \text{ oder } b = -u^{-(k'+k)}\left(1+a u^{k'}\right).$$

Hier wäre nun zu setzen:

$$b = -v^{-(k'+k)}$$

$$v = \left|\sqrt[k'+k]{\frac{1}{b}}\right| \cdot \left(\cos\frac{(2r+1)\pi}{k'+k} + i\sin\frac{(2r+1)\pi}{k'+k}\right)$$

Dieser Wert von v muss in (55) eingesetzt werden; aber gleichzeitig ist in (55) —a an Stelle von a, also a^l an Stelle von $(-1)^l a^l$ zu schreiben. Dies liefert folgende Gleichung:

$$\frac{1}{x_r} = \left|\sqrt[k'+k]{\frac{1}{b}}\right| \cdot \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{lk'+1} \cdot \left(\frac{lk'+1}{k'+k}\right)_l \cdot \left|J^{-\frac{l}{k'+k}}\right| \cos\frac{(2r+1)(k'l+1)\pi}{k'+k} + i\sum \ldots \sin \ldots\right], \quad (83)$$

wo r alle ganzzahligen Werte von 0 bis k'+k—1 annehmen kann.

Wenn bei der dritten oder vierten Normalform die Bedingung $J \leqq j$ erfüllt ist, so ist in (65) an Stelle von v sein Wert aus (63) zu setzen. Es wird

$$v = \sqrt[m]{\frac{1}{a}} = \left|\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\right| \cdot \left(\cos\frac{2r\pi}{m} + i\sin\frac{2r\pi}{m}\right)$$

und

$$\frac{1}{x_r} = \left|\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\right| \cdot \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l(m+n)+1} \left(\frac{l(m+n)+1}{m}\right)_l \cdot \left|J^{\frac{l}{m}}\right| \cos\frac{2\left((m+n)l+1\right)r\pi}{m} + i\sum \ldots \sin \ldots\right], \quad (84)$$

wo r eine beliebige der ganzen Zahlen von 0 bis m—1 bedeutet. Bei der vierten Normalform erhält man für die k übrigen Wurzeln eine Formel, indem man in (68) für v seinen Wert aus (66) einsetzt, nämlich

$$v = \left|\sqrt[k]{\frac{b}{a}}\right| \cdot \left(\cos\frac{2s\pi}{k} + i\sin\frac{2s\pi}{k}\right).$$

Dann wird

$$x_s = -\left|\sqrt[k]{\frac{b}{a}}\right| \cdot \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(k'+k)\,l+1}\left(\frac{(k'+k)\,l+1}{k}\right)_l \cdot \left|J^{\frac{l}{k}}\right| \cdot \cos\frac{2\big((k'+k)l+1\big)s\pi}{k} + i\sum \ldots \sin \ldots\right], \quad \textbf{(85)}$$

wobei s eine beliebige der ganzen Zahlen von 0 bis k—1 bedeutet.

Bei der dritten Normalform ist das Verfahren, das im vierten Abschnitte zu den Gleichungen (66) bis (68) geführt hat, etwas zu modifizieren. Man schreibe nämlich die dritte Normalform

$$-a\,x^{g} = b - x^{k+g}$$

oder

$$-\frac{a}{b} = x^{-g} \cdot \left(1 - \frac{x^{k+g}}{b}\right).$$

Setzt man nun

$$-\frac{a}{b} = v^{-g}; \quad v = \left|\sqrt[g]{\frac{b}{a}}\right| \cdot \left(\cos\frac{(2s+1)\,\pi}{g} + i\,\sin\frac{(2s+1)\,\pi}{g}\right),$$

so wird nach (68):

$$x_s = \left|\sqrt[g]{\frac{b}{a}}\right| \cdot \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(g+k)\,l+1}\left(\frac{(g+k)\,l+1}{g}\right)_l \cdot \left|J^{\frac{l}{g}}\right| \cdot \cos\,(2s+1)\left(\frac{(g+k)\,l+1}{g}\right)\pi + i\sum \ldots \sin \ldots\right], \quad \textbf{(86)}$$

wo s alle Werte von 0 bis g—1 annehmen kann.

Die folgende Tabelle giebt eine Zusammenstellung der Formeln, nach denen die Wurzeln der vier Normalformen berechnet werden können.

Sämtliche Wurzeln der Normalform

	I.	II.	III.	IV.
	sind enthalten in den Formeln:			
$J \leq j$	**(80)** und **(81)**	**(80)** und **(81)**	**(84)** und **(86)**	**(84)** und **(85)**
	Speziell die reellen Wurzeln in den Formeln:			
	(45), (49) und (50)	(45) und (49)	(65 a)	(65 a) und (68 a)
$j < J$	**(82)***	**(83)**	**(82)**	**(82)**
	Speziell die reellen Wurzeln in den Formeln:			
	(61)	—	(59)	(59) und (60)

*) aber links ist zu schreiben $-\frac{1}{x_r}$.

In allen vorhergehenden Entwicklungen ist von den Resultaten des ersten Abschnittes lediglich die Formel (8) angewandt worden. Nun soll versucht werden, die allgemeine Formel (6a) anzuwenden, oder mit andern Worten: Es sollen jetzt für die positiven Potenzen der Wurzeln unserer Normalformen unendliche Reihen aufgestellt werden.

Nach Gleichung (31) wird für die beiden ersten Normalformen:

$$y = x\left(1 - \frac{x^m}{a}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Nun wird in der inversen Reihe nach (6a) der Koeffizient $b_{r-1,f}$ gleich $\frac{f}{r+f-1}$ mal dem Faktor der r—1-ten Potenz in der Entwicklung von

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{-(r+f-1)}, \text{ also von } \left(1 - \frac{x^m}{a}\right)^{-\frac{r+f-1}{n}}.$$

Der letztere Ausdruck ist nach dem binomischen Satze

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(-\frac{r+f-1}{n}\right)_l \frac{x^{lm}}{a^l}.$$

Der Faktor von x^{r-1} wird folglich im allgemeinen gleich 0 sein, es sei denn, dass $r-1=lm$ oder $r = lm+1$ wäre. Für diesen Fall wird

$$b_{lm,f} = \frac{f}{lm+f} \cdot \frac{(-1)^l}{a^l} \left(-\frac{lm+f}{n}\right)_l$$

$$b_{lm,f} = \frac{f}{n \,.\, a^l \,.\, l!} \left(\frac{lm+f}{n} + 1\right)\left(\frac{lm+f}{n} + 2\right) \ldots \left(\frac{lm+f}{n} + l - 1\right). \tag{87}$$

Würde man jetzt die Betrachtungen des dritten Abschnittes wiederholen, so ergäbe sich, dass die Reihe für x^f ganz derselben Konvergenzbedingung unterworfen ist, wie die Reihe (33) für x^1, ein Resultat, das nach bekannten Sätzen über das Potenzieren unendlicher Reihen auch zu erwarten stand. Ferner folgt aus (87), dass $b_{lm,f}$ ebenso wie früher $b_{lm,1}$ eine positive Grösse ist. Vergleicht man nun $b_{lm,f}$ mit $b_{lm,1}$, das die Form hatte

$$b_{lm,1} = \frac{1}{n \,.\, a^l \,.\, l!} \left(\frac{lm+1}{n} + 1\right)\left(\frac{lm+1}{n} + 2\right) \ldots\ldots \left(\frac{lm+1}{n} + l - 1\right),$$

so sieht man, dass

$$b_{lm,f} > b_{lm,1}$$

ist. Daher wird in der Reihe für x^f eine grössere Anzahl von Gliedern als in (33) in Betracht zu ziehen sein, um die Potenz x^f mit derselben Genauigkeit zu berechnen, mit der man x^1 aus (33) berechnen kann. In diesem Sinne kann die Konvergenz der Reihe, die sich für x^f ergiebt, schwächer genannt werden, als die Konvergenz der ursprünglichen Reihe für x^1. Wäre da-

gegen f eine negative Zahl, so zeigt (87), dass dann die Reihe für x^{-f} stärker konvergieren müsste, als die ursprüngliche Reihe für x^{1}.

Da nun aber die Betrachtung negativer Potenzen der inversen Reihen in dieser Arbeit ausgeschlossen sein sollte, so müssen diese Untersuchungen, die wahrscheinlich zu einer Entscheidung über die praktische Brauchbarkeit meiner Methode führen werden, hier abgebrochen werden, um bei anderer Gelegenheit wieder aufgenommen zu werden. Ebensowenig sollen die Potenzen der Wurzeln in den andern Normalformen noch untersucht werden.

Berichtigungen.

Bei Abzählung der Zeilen soll jede Formel, auch wenn sie den Raum mehrerer Zeilen einnimmt, als eine Zeile gelten.

S. 4 in Formel **(2)** lies $y^{f} = x^{f}(\ldots$ st. $x^{f} = y^{f}(\ldots$

S. 5 Z. 11 v. o. l. indem in (2) st. indem in (3).

S. 11 in Formel **(21)** l. $a x^{n}$ st. $a x^{n}$.

S. 14 Z. 11 v. o. l. wo l alle Werte . . . st. wo l Werte . . .

Z. 13 v. o. im Nenner l. a^{l} st. $a^{l!}$

Z. 14 v. o. im Nenner l. $(lm+1)$ st. $(lm+)$.

S. 15 Z. 8 v. o. l. $l \geqq m+1$ st. $l. \geqq m+n$.

S. 17 Z. 1 v. o. im vorletzten Nenner fehlt vor $\frac{n-1}{n}$ das Zeichen —.

Z. 4 v. o. im vorletzten Nenner l. $-\frac{2n-1}{m}$ st. $+\frac{2n-1}{m}$

in Formel **(38)** im viertletzten Nenner l. $z+\frac{1}{m}$ st. $z-\frac{1}{m}$

Z. 3 v. u. l. Ungleichung (39) st. Ungleichung (40)

S. 18 Z. 7 v. u. l. jedesmal s_{r+1} st. s_{r-1}.

S. 20 in Formel **(47)** l. $\frac{m-1}{m}$ st. $\frac{m-1}{n}$.

S. 23 Z. 3 v. u. l. $\frac{m^{m} . n^{n}}{(m+n)^{m+n}} . \frac{a^{m+n}}{b^{m}} < 1.$

S. 24 in Formel **(60)** l. $\frac{1}{k'l+1}$ st. $\frac{1}{k'+l1}$.

S. 28 Z. 10 v. u. l. im letzten Nenner $1+\frac{\chi(l)-\psi(l)}{\psi(l)}$ st. $1-\frac{\chi(l)-\psi(l)}{\psi(l)}$.

Z. 2 und Z. 3 v. u. l. $\psi(l)$ st. $\varphi(l)$.