Ueber die einem Dreieck ein- und umgeschriebenen Kegelschnitte.

Einleitung.

Die Gleichung $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ stellt die sogenannte vereinigte Lage von Punkt und Geraden in homogenen Dreieckskoordinaten dar, und es bedeuten darin x_1, x_2, x_3 drei Zahlen, die sich verhalten wie die Abstände eines Punktes von den Seiten eines als fest angenommenen Dreiecks, und die Koordinaten u_1, u_2, u_3 einer Geraden drei Zahlen, die sich verhalten wie die Abstände der Geraden von den Ecken desselben Dreiecks, in beiden Fällen jeder Abstand multipliziert mit einer beliebigen aber fest gewählten Konstanten, oder, wie auch gesagt werden kann, jeder Abstand gemessen in einer beliebigen aber fest gewählten Richtung.

Die so gekennzeichneten Koordinaten eignen sich wegen der einfachen, symmetrischen, Punkt- und Linienkoordinaten gleichmäßig berücksichtigenden Gestalt der eingangs erwähnten Gleichung vorzüglich für die Untersuchungen über allgemeine Lagenbeziehungen und lassen den dualen Charakter geometrischer Sätze in reinster Ausprägung zu Tage treten.

Bei der auf den folgenden Blättern behandelten Aufgabe insbesondere, wo Kegelschnitte sich in mannigfachster Art an ein festes Dreieck anlehnen, war es nur zu natürlich, von homogenen Dreieckskoordinaten als dem geeignetsten Werkzeuge Gebrauch zu machen; doch stellte es sich als nützlich heraus, ihnen erst die zu allgemeine Eigenschaft der beliebigen Richtung zu nehmen, damit unter Ausnützung der Winkelgrößen und Seitenlängen des gegebenen Dreiecks den nicht zu umgehenden metrischen Beziehungen näher getreten werden konnte. Es sollen demnach künftighin die Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3 Zahlen bedeuten, die sich verhalten wie die senkrechten Abstände des Punktes von den Seiten des Dreiecks, und die Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 Zahlen, die sich verhalten wie die senkrechten Abstände der Geraden von den Ecken. Die Gleichung für das Ineinanderliegen von Punkt und Geraden gewinnen wir dann folgendermaßen. Ist

$$L \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden und ist x_i $(i = 1, 2, 3)$ proportional zu dem senkrechten Abstande eines Punktes der Geraden von der Seite $x_i = 0$, so ist a_i nicht ohne Weiteres proportional zu dem Abstand u_i der Ecke A_i von der Geraden, doch steht es zu ihm in naher Beziehung. Schneidet L die Seiten des Dreiecks entsprechend in L_1, L_2, L_3, so wird z. B. für L_3 $x_3 = 0$ und L geht über in $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$; es ist demnach $x_1 : x_2 = - a_2 : a_1$, aber auch $x_1 : x_2 = A_2L_3 \sin A_2 : L_3A_1 \sin A_1$ und dies $= - u_2 \sin A_2 : u_1 \sin A_1$ unbekümmert darum, ob L_3 zwischen A_1 und A_2 oder außerhalb liegt. Dieselbe Betrachtung auf einen zweiten Schnittpunkt angewendet führt zu dem Ergebnis, daß a_1, a_2, a_3 proportional zu $u_1 \sin A_1$, $u_2 \sin A_2$, $u_3 \sin A_3$ sind. Die Gleichung für L geht daher über in

1. $$u_1 \sin A_1 \, x_1 + u_2 \sin A_2 \, x_2 + u_3 \sin A_3 \, x_3 = 0,$$

worin $\sin A_i$ ersetzt werden kann durch s_i oder $1 : h_i$ d. h. durch Seite oder reciproke Höhe. (Vergl. die ausführlichere Begründung dieser Form bei Hanner, analytische Geometrie, und Heger, Schlömilchs Handbuch der Mathematik.)

Zu der Form 1. würden wir auch gekommen sein, wenn wir von der Gleichung eines Punktes $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ ausgegangen wären und die Bedeutung der Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ untersucht hätten.

Wir können also sagen, die Form 1. drücke die vereinigte Lage von Punkt und Geraden aus für den Fall, daß die homogenen Dreieckskoordinaten Perpendikelverhältnisse sind.

Die Gleichung 1. setzt uns in den Stand, zu gewissen durch Punktkoordinaten gegebenen Gebilden die entsprechenden Formen in Linienkoordinaten — und umgekehrt — abzulesen, ohne dafür erst eine besondere geometrische Betrachtung anzustellen. Für den Schwerpunkt des Dreiecks gilt die Beziehung $x_1 \sin A_1 = x_2 \sin A_2 = x_3 \sin A_3$, daher ist nach 1. seine Gleichung $u_1 + u_2 + u_3 = 0$; der Höhendurchschnitt $x_1 \cos A_1 = x_2 \cos A_2 = x_3 \cos A_3$ hat folglich die Gleichung $u_1 \tan A_1 + u_2 \tan A_2 + u_3 \tan A_3 = 0$, der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises $x_1 : x_2 : x_3 = \cos A_1 : \cos A_2 : \cos A_3$ die Gleichung $u_1 \sin 2A_1 + u_2 \sin 2A_2 + u_3 \sin 2A_3 = 0$, die Mitten der vier Berührungskreise $x_1 = \pm x_2 = \pm x_3$ entsprechend $u_1 \sin A_1 \pm u_2 \sin A_2 \pm u_3 \sin A_3 = 0$. Selbstverständlich ist auch die umgekehrte Schlußweise zulässig. Wir bringen sie an einem für die Folge wichtigen Beispiele. Für die unendlich ferne Gerade L_∞ muß offenbar $u_1 = u_2 = u_3$ sein, ihre Gleichung ist daher

2. $$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0.$$

Bei größeren Rechnungen empfiehlt es sich oft, anfänglich den Faktor $\sin A_i$ zu unterdrücken und ihn erst in das Schlußergebnis aufzunehmen. Hierfür folgendes, oft benutzte Beispiel:

Ist die Punktgleichung eines Kegelschnitts $S \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$, so wird seine Gleichung in Linienkoordinaten dadurch gefunden, daß wir die Bedingung aufsuchen, unter der eine beliebige Gerade $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ denselben berührt. Eine beliebige Tangente in x hat die Form $x_1f'(x_1) + x_2f'(x_2) + x_3f'(x_3) = 0$. Soll diese mit der Geraden identisch sein, so muß, wenn wir die derivierten Funktionen $f'(x)$ ausführlich schreiben,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \lambda u_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \lambda u_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \lambda u_3 \end{aligned}$$

und noch $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ sein, wo $a_{ik} = a_{ki}$ und λ ein beliebiger Faktor ist.

Nach Fortschaffung der x wird die gewünschte Gleichung

3. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Bedeutete nun x den senkrechten Abstand, so ist es die Größe u erst dann, wenn jede mit dem Sinus des entsprechenden Winkels multipliziert ist.

Der Übergang von der Linien- zur Punktgleichung vollzieht sich in ganz ähnlicher Weise.

Wir werden weiterhin in unmittelbarem Zusammenhange mit unserer Hauptaufgabe in bequemer Art die Gleichung des einem Dreieck eingeschriebenen und die des umgeschriebenen Kreises in folgenden Formen erhalten:

a. $x_1^2 \cos^4 \frac{A_1}{2} + x_2^2 \cos^4 \frac{A_2}{2} + x_3^2 \cos^4 \frac{A_3}{2} - 2x_1x_2 \cos^2 \frac{A_1}{2} \cos^2 \frac{A_2}{2} \ldots = 0$

b. $u_1^2 \sin^4 A_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 2u_1u_2 \sin^2 A_1 \sin^2 A_2 \ldots = 0.$

Unter Benützung der eben gemachten Bemerkungen gehen die zugeordneten Gleichungen

$$\alpha.\quad u_2u_3 \cot \frac{A_1}{2} + u_3u_1 \cot \frac{A_2}{2} + u_1u_2 \cot \frac{A_3}{2} = 0 \quad \text{und}$$

$$\beta.\quad x_2x_3 \sin A_1 + x_3x_1 \sin A_2 + x_1x_2 \sin A_3 = 0 \quad \text{hervor.}$$

Wären α. und β. zuerst aufgetreten, so hätte uns unser Verfahren a. und b. gebracht.

Wir werden also im Folgenden immer genau zu untersuchen haben, ob beim Übergange von der einen Art Koordinaten zur anderen erstere perpendikulär gedacht waren und demgemäß für die zweite Art unsere Maßnahmen treffen. Ich weiß nicht, ob Salmon-Fiedlers vortreffliche analytische Geometrie, auf die wir uns vielfach beziehen werden, und die sich durch Reichhaltigkeit des Stoffes und Mannigfaltigkeit des Verfahrens auszeichnet, diesen Umstand entschieden genug betont hat. Jedenfalls muß hier hervorgehoben werden, daß die daselbst gebrauchten Linienkoordinaten $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ nur in einzelnen Fällen — beim Kreise — mit unseren $u_1\ u_2\ u_3$ identisch sind und daß die Gleichung der imaginären Kreispunkte — der absoluten Richtungen — bei uns lauten muß

4. $$u_1^2 \sin^2 A_1 + \ldots - 2u_1u_2 \sin A_1 \sin A_2 \cos A_3 - \ldots = 0.$$

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns der eigentlichen Aufgabe zu.

Ist einem Dreieck ein Kegelschnitt eingeschrieben und man verbindet die Ecken mit den Berührungspunkten auf den Gegenseiten, so gehen diese Linien durch einen Punkt P.

Ist ferner ein Kegelschnitt einem Dreieck umgeschrieben und man legt in den Ecken Tangenten an ihn, so schneiden dieselben die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten einer Geraden L.

Es fragt sich nun: „In welchem Gebiete der Ebene liegen die Punkte P und die Geraden L für die verschiedenen Arten der Kegelschnitte, und giebt es insbesondere für die Parabel eine Kurve, welche das für die Ellipsen und Hyperbeln geltende Gebiet trennt?"

Teile dieser Aufgabe tauchen in den mathematischen Werken an den verschiedensten Stellen auf, so bei Schröter, Möbius, Salmon; am eingehendsten und vollständigsten ist sie indeß in der Inaugural-Dissertation von C. Montag, Breslau 1870, „Über ein durch die Sätze von Brianchon und Pascal vermitteltes Beziehungssystem" gelöst worden. Wenn wir es trotzdem unternehmen, auf sie zurückzukommen, so geschieht es, weil wir mit einer anderen Methode, der analytischen, an die Arbeit herantreten und weil wir hoffen, die Lösung durchzuführen, ohne den analytischen Weg zu verlassen, während Montag bei seiner synthetischen Behandlung zur Bewältigung gewisser Schwierigkeiten auf die sogenannte zweideutige Verwandtschaft, deren Grundcharakter analytisch ist, zurückgreifen mußte. Außerdem lag es für den Verfasser nahe, ähnliche Untersuchungen, die er früher in der Raumgeometrie gemacht, auf die viel zugänglichere Ebene zu übertragen.

1. Teil.

Ein dem Fundamentaldreieck $A_1\ A_2\ A_3$ mit den Seiten s_1, s_2, s_3 eingeschriebener Kegelschnitt hat die Gleichung

$$S \equiv a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 - 2a_1a_2x_1x_2 - 2a_1a_3x_1x_3 - 2a_2a_3x_2x_3 = 0.$$

Die Berührungspunkte auf den Seiten ergeben sich, wenn der Reihe nach $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gesetzt wird, und sind bestimmt durch $a_2x_2 - a_3x_3 = 0$, $a_3x_3 - a_1x_1 = 0$, $a_1x_1 - a_2x_2 = 0$.

Diese die Ecken mit den Berührungspunkten verbindenden Geraden schneiden sich in einem Punkte P von den Koordinaten $\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3}$. Jedem Kegelschnitt ist ein solcher Punkt P zugeordnet und, da wir aus den Koordinaten von P obige Gleichung $S = 0$ bilden können, zu jedem Punkte P gehört ein einziger Kegelschnitt S. Von den jeweiligen Werten der Größen a_1, a_2, a_3 wird die Art des Kegelschnitts abhängen.

Soll S Parabel werden, so muß die unendlich ferne Gerade

$$L_\infty \quad s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 = 0$$

berührt werden, und dies geschieht unter der Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 & s_1 \\ -a_2a_1 & a_2^2 & -a_2a_3 & s_2 \\ -a_3a_1 & -a_3a_2 & a_3^2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt liefert diese Determinante

$$s_2s_3a_1 + s_3s_1a_2 + s_1s_2a_3 = 0.$$

Wegen der Bedeutung der Größen a_i bewegt sich für die eingeschriebenen Parabeln P, wenn wir für $\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3}$ die laufenden Koordinaten x_1, x_2, x_3 einführen, auf dem Kegelschnitt

$$E \equiv s_1s_2x_1x_2 + s_1s_3x_1x_3 + s_2s_3x_2x_3 = 0.$$

Derselbe ist, wie die Form zeigt, dem Dreieck umgeschrieben und, da die Tangenten in den Ecken, nämlich $s_2x_2 + s_3x_3 = 0$, $s_3x_3 + s_1x_1 = 0$, $s_1x_1 + s_2x_2 = 0$ zu den Seiten parallel sind, dem parallel umgeschriebenen Dreieck eingeschrieben. Der Pol der unendlich fernen Geraden, also der Mittelpunkt, ist bestimmt durch $s_1x_1 = s_2x_2 = s_3x_3$, welches ebensowohl Schwerpunkt des ursprünglichen als des parallel umgeschriebenen Dreiecks ist.

Um zu ermitteln, wann S Hyperbel oder Ellipse ist, eliminiren wir aus S und L_∞ etwa x_3 und untersuchen in der für $x_1 : x_2$ hervortretenden Gleichung die Diskriminante. Ist diese positiv, so hat S mit L_∞ reelle Schnittpunkte und ist Hyperbel, ist sie negativ, so werden die Schnittpunkte imaginär und S ist Ellipse. Die fragliche Diskriminante wird

$$-4a_1^2a_2^2a_3^2s_3^2\left(\frac{s_1s_2}{a_1a_2} + \frac{s_2s_3}{a_2a_3} + \frac{s_1s_3}{a_1a_3}\right).$$

Nennen wir die Klammergröße A und unterdrücken den durchaus negativen vorausgehenden Faktor, so tritt also für $A > 0$ die Ellipse, für $A < 0$ die Hyperbel auf; für $A = 0$ war, wie wir schon gesehen haben, der Kegelschnitt Parabel. Lassen wir P von der Ecke A_3 aus auf einem durch das Dreieck gezogenen Strahl wandern, so sind für alle Lagen innerhalb des Dreiecks $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ positiv und $A > 0$; auf A_1A_2 wird $\frac{1}{a_3} = 0$, also $A = \frac{s_1s_2}{a_1a_2} > 0$. Jetzt wechselt $\frac{1}{a_3}$ das Vorzeichen, ist erst klein und wird immer größer und führt also A der Null immer näher, bis P den Kegelschnitt E erreicht, wo, wie wir wissen, $A = 0$ ist. Für einen Punkt P auf der umgeschriebenen Ellipse E geht demnach S von der Ellipse durch die Parabel hindurch zur Hyperbel über; die Ellipse E trennt also alle Hyperbeln zugeordneten Punkte P von den zu Ellipsen gehörigen.

Unter den letzteren befinden sich natürlich auch die 4 berührenden Kreise. Bei dem eingeschriebenen speziell werden, wie man aus einer Figur leicht findet, die Koordinaten des entsprechenden Punktes P $\frac{1}{\cos^2\frac{A_1}{2}} : \frac{1}{\cos^2\frac{A_2}{2}} : \frac{1}{\cos^2\frac{A_3}{2}}$, und daher ist seine Gleichung, wenn wir in

$S = 0$ die Größen a_1, a_2, a_3 durch die Kosinus-Quadrate der halben Winkel ersetzen, die auf Seite 5 unter a. angeführte. (Vergl. Fiedler, Kegelschnitte, 1888 S. 530 Beispiel 5).

S wird eine gleichseitige Hyperbel unter der Bedingung (ebendort S. 688)

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3 \cos A_1 + 2a_3a_1 \cos A_2 + 2a_1a_2 \cos A_3 = 0,$$

es bewegt sich daher P für diesen Fall gemäß der Bedeutung der Größen a_1, a_2, a_3 auf der Kurve

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{2 \cos A_1}{x_2x_3} + \frac{2 \cos A_2}{x_3x_1} + \frac{2 \cos A_3}{x_1x_2} = 0 \quad \text{oder}$$

$$K_4 \equiv x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_2x_3 \cos A_1 + 2x_1x_2^2x_3 \cos A_2 + 2x_1x_2x_3^2 \cos A_3 = 0.$$

Dieselbe ist eine Kurve 4. Ordnung, welche, wie aus der Form der Gleichung unmittelbar hervorgeht, die Ecken des Dreiecks zu Doppelpunkten hat, im übrigen aber ganz außerhalb des Dreiecks und der Ellipse E liegt. Sie gehört zur Gruppe der bei Salmon (Ebene Kurven 1873 S. 316—318) mit Hilfe des dort genannten „inversen" Kegelschnitts behandelten Kurven und hat, weil für $x_3 = 0$ in der dann auftretenden Gleichung $x_1^2 + 2x_1x_2 \cos A_3 + x_2^2 = 0$ die Diskriminante $\cos^2 A_3 - 1$ negativ ist, die Ecken des Dreiecks zu isolierten Punkten. Sie ist demnach von der 6. Klasse.

Rückt P einer Seite z. B. $x_3 = 0$ immer näher, so schrumpft seitlich der Kegelschnitt S immer mehr zusammen und geht, wenn P auf $x_3 = 0$ fällt, in die doppelt gezählte Seite A_1A_2 über. Algebraisch wird aus $S = 0$, nachdem mit a_3^2 dividiert worden ist, weil $\frac{1}{a_3}$ Null wird, $x_3^2 = 0$ und bestätigt das eben Gesagte.

Fassen wir die Ergebnisse noch einmal zusammen, so stellt sich für diesen Teil folgendes heraus:

„Verbindet man die Berührungspunkte eines einem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitts mit den Gegenecken, so gehen diese Linien durch einen Punkt P. Liegt P auf der dem Dreieck um- und dem parallel umgeschriebenen Dreieck eingeschriebenen Ellipse E, so ist der zu P gehörige Kegelschnitt eine Parabel und wird Ellipse oder Hyperbel, je nachdem P innerhalb oder außerhalb E liegt. Eine gleichseitige Hyperbel ist er, wenn P auf einer gewissen Kurve 4. Ordnung 6. Klasse liegt, welche die Ecken des Dreiecks zu isolierten Doppelpunkten hat."

Die Durchführung der vorstehenden Aufgabe mit Linienkoordinaten ist nicht ohne Reiz und verursacht bis zu einem gewissen Grade keine Unbequemlichkeiten. Nur für den Fall der gleichseitigen Hyperbel treten Rechenschwierigkeiten auf, die der Verfasser noch nicht zu überwinden verstanden hat. Der äußeren Form und des Nachfolgenden wegen sei hier nur die Gleichung der das Gebiet der Ellipsen und Hyperbeln trennenden Kurve E erwähnt, welche die einfache Gestalt

$$\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} = 0$$

annimmt.

2. Teil A.

Die der vorigen dualistisch gegenüberstehende Aufgabe setzt an die Stelle des eingeschriebenen den dem Dreieck umgeschriebenen Kegelschnitt und läßt es zunächst ratsam erscheinen, statt der perpendikulären Punktkoordinaten senkrechte Linienkoordinaten zu verwenden. Die Gleichung des Kegelschnitts hat dann die der früheren ähnliche Form

$$\Sigma \equiv a_1^2u_1^2 + a_2^2u_2^2 + a_3^2u_3^2 - 2a_1a_2u_1u_2 - 2a_1a_3u_1u_3 - 2a_2a_3u_2u_3 = 0.$$

Die Tangente in A_3 erfordert $u_3 = 0$, ihr Schnittpunkt auf A_1A_2 ist daher $a_1u_1 - a_2u_2 = 0$. Die auf gleiche Weise auf den zwei anderen Seiten liegenden Punkte sind $a_2u_2 - a_3u_3 = 0$ und $a_3u_3 - a_1u_1 = 0$. Die Form ihrer Gleichungen lehrt, daß sie auf der Geraden M von den Koordinaten $\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3}$ gelegen sind.

Soll $\Sigma = 0$ Parabel sein, so muß die unendlich ferne Gerade Tangente werden. Für diese ist $u_1 = u_2 = u_3$, daher müssen die Koeffizienten in Σ der Bedingung genügen

$$B \equiv a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_1a_2 - 2a_1a_3 - 2a_2a_3 = 0.$$

Zufolge der Bedeutung von $\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3}$ umhüllt die Gerade M die Kurve

$$K_3^4 \equiv u_2^2u_3^2 + u_3^2u_1^2 + u_1^2u_2^2 - 2u_1^2u_2u_3 - 2u_1u_2^2u_3 - 2u_1u_2u_3^2 = 0,$$

welche von der 4. Klasse ist.

Die Seiten des Dreiecks sind offenbar Tangenten, denn für A_1A_2 ist $u_1 = u_2 = 0$, wodurch die Gleichung befriedigt wird. Für jede Parallele zu derselben Seite ist $u_1 = u_2$, und K_3^4 geht über in $u_2^3(u_2 - 4u_3) = 0$, woraus ersichtlich wird, daß A_1A_2 dreifach im Unendlichen berührt und daß außerdem auch die Parallele zu A_1A_2, deren Koordinaten $u_1 = u_2 = 4u_3$ sind, eine Berührende ist. Dieselbe liegt ebenso hoch über der Ecke A_3, als der Schwerpunkt des Dreiecks über A_1A_2 liegt. Für die anderen Ecken und Seiten gilt das Gleiche.

In $B = 0$ kann keine der Größen a negativ sein, denn wäre es beispielsweise a_3, so könnten wir es durch $-a_3$ ersetzen und für B schreiben $(a_1 - a_2)^2 + a_3^2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3$; dieser Ausdruck besteht jetzt aus wesentlich positiven Gliedern und kann nicht verschwinden. Die Gerade M, welche die Kurve K_3^4 umhüllt, liegt also stets außerhalb des Dreiecks und mit ihr die durch sie erzeugte Kurve ebenfalls außerhalb. Da die drei Seiten Wendetangenten (im Unendlichen) sind, ist dieselbe nach den Plückerschen Formeln vom 3. Grade, was uns später die Punktkoordinatengleichung direkt zeigen wird.

Ehe wir auf die weitere Erörterung der Kurvengestalt eingehen, suchen wir erst nach Kennzeichen dafür, daß $\Sigma = 0$ Ellipse oder Hyperbel ist.

Geht die unendlich ferne Gerade durch einen Punkt $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3 = 0$, so muß wegen $u_1 = u_2 = u_3$ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ sein. Dieser Punkt aber gehört dem Kegelschnitt Σ an, wenn

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 & \alpha_1 \\ -a_2a_1 & a_2^2 & -a_2a_3 & \alpha_2 \\ -a_3a_1 & -a_3a_2 & a_3^2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder, nach Entwickelung der Determinante, wenn $a_1\alpha_2\alpha_3 + a_2\alpha_3\alpha_1 + a_3\alpha_1\alpha_2 = 0$ ist. Führen wir für α_3 seinen Wert $-(\alpha_1 + \alpha_2)$ ein, so entsteht $\alpha_1^2a_2 + \alpha_1\alpha_2(a_1 + a_2 - a_3) + \alpha_2^2a_1 = 0$, und ihre Diskriminante ist $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_1a_2 - 2a_1a_3 - 2a_2a_3$, die linke Seite von $B = 0$, wie zu erwarten war. Die unendlich ferne Gerade hat daher reelle, zusammenfallende oder imaginäre Schnittpunkte mit Σ, d. h. $\Sigma = 0$ ist Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem B positiv, gleich Null oder negativ ist.

Wir kehren zur Kurve K_3^4 zurück.

Dieselbe wird von der Geraden M umhüllt, wenn deren Koordinaten $\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3}$ sich gemäß der Parametergleichung $B = 0$ verändern. Die Sachlage wird nicht verschoben, wenn wir mit a_3^2 dividieren und $a_1 : a_3 = \lambda$, $a_2 : a_3 = \mu$ setzen. $B = 0$ geht dann über in

$$\lambda^2 + \mu^2 + 1 - 2\lambda\mu - 2\lambda - 2\mu = 0, \text{ woraus}$$

$$\lambda = \mu + 1 \pm 2\sqrt{\mu} \quad \text{oder} \quad \lambda = (1 \pm \sqrt{\mu})^2 = (\sqrt{\mu} \pm 1)^2 \text{ folgt.}$$

Von allen Lagen, die M einnehmen kann, dürfen wir diejenigen jetzt ausschließen, wo M in das Innere des Dreiecks eintritt, denn für diese ist $B > 0$ und $\Sigma = 0$ eine Hyperbel. Schneidet die äußerlich gelegene Gerade M die Seiten entsprechend in M_1, M_2, M_3, so erhalten λ und μ eine einfache geometrische Bedeutung; es ist nämlich

$$\lambda = a_1 : a_3 = u_3 : u_1 = M_2A_3 : M_2A_1$$
$$\mu = a_2 : a_3 = u_3 : u_2 = M_1A_3 : M_1A_2,$$

λ und μ sind also Teilverhältnisse auf den Seiten A_1A_3 und A_2A_3. Wegen des Doppelwertes von λ giebt es für jedes bestimmte μ, das heißt für jeden bestimmten Punkt M_1 zwei Tangenten t und T an die Kurve; für t hat λ den einen — kleineren — Wert $(1 - \sqrt{\mu})^2$, für T den anderen — größeren — $(1 + \sqrt{\mu})^2$. Wir geben nunmehr dem Punkte M_1 alle Lagen auf den außerhalb des Dreiecks gelegenen Teilen der Seite A_2A_3 und ersehen aus dem Fortrücken der anderen Schnittpunkte die jeweilige Lage der Tangenten t und T.

Wenn

1) M_1 von A_3 ausgehend ins Unendliche rückt, wobei μ von 0 bis 1 wächst, so nimmt
   a) für t, wo $\lambda = (1 - \sqrt{\mu})^2$ ist, λ von 1 bis 0 ab und wird für $\mu = \frac{1}{4}$ selbst $= \frac{1}{4}$;
   b) für T, wo $\lambda = (1 + \sqrt{\mu})^2$ ist, λ von 1 bis 4 zu.

Wenn aber

2) M_1 vom Unendlichen sich nach A_2 fortschiebt, wobei μ von 1 bis ∞ wächst, so nimmt
   a) für t, wo $\lambda = (\sqrt{\mu} - 1)^2$ ist, λ von 0 bis ∞,
   b) für T, wo $\lambda = (\sqrt{\mu} + 1)^2$ ist, λ von 4 bis ∞ zu.

Unterscheiden wir noch die Schnittpunkte von A_1A_3 mit t und T und nennen sie M_2 und M_2^1, so schließen wir aus 1):

geht M_1 von A_3 auf A_2A_3 ins Unendliche, so kommt M_2 aus dem Unendlichen bis A_3, t beschreibt also einen hyperbelartigen Ast im Scheitelraume des Winkels A_3, in III, und M_2^1 geht aus dem Unendlichen bis auf $^1/_3$ der Länge der Seite A_1A_3 an A_1 heran, T beschreibt also einen halben ebensolchen Ast im Raume I,

aus 2):

geht M_1 vom Unendlichen auf A_2 zu, so geht M_2 von A_3 durchs Unendliche bis A_1 und t beschreibt einen ganzen hyperbelartigen Ast im Raume II, während M_2^1 den vorigen Weg bis A_1 fortsetzt und also T den noch fehlenden halben Ast in I beschreibt.

Man könnte noch zweifelhaft sein, ob die aufeinanderfolgenden Lagen der Tangenten t und T wirklich ihre Schnittpunkte in II und I haben und die Kurvenäste aus diesen Räumen nicht etwa heraustreten. Die Symmetrie der hier auftretenden algebraischen Formen fordert, daß alle Teile des Dreiecks gleichmäßig bedacht werden; es läßt sich indeß streng nachweisen, daß das, was in III geschieht, auch bei I und II eintritt. Wir müssen zu diesem Zwecke die Schnittpunkte M_3 und M_3^1 der Tangenten t und T in ihrem Fortrücken auf A_1A_2 beobachten. Es ist $M_3^1A_1 : M_3^1A_2 = u_1 : u_2 = a_2 : a_1 = \mu : \lambda = \mu : (1 + \sqrt{\mu})^2$. Rückt nun M_1 von A_3 ins ∞, also μ von 0 bis 1, so wächst $\mu : \lambda$ von 0 bis 4, d. h. M_3^1 entfernt sich fortwährend von A_1. Die aufeinanderfolgenden Lagen von T müssen sich also durchweg im Raume I schneiden und dort den Kurvenast erzeugen. Ähnlich gestaltet sich die Sache für den Raum II.

Die Kurve K_3^4 besteht also aus 3 über die Ecken des Dreiecks hinausliegenden hyperbelähnlichen Ästen, die mit ihren Scheiteln bis $^1/_3$ der jedesmaligen Höhe des Dreiecks an die Ecken von außen heranreichen.

Fixieren wir jetzt auf A_2A_3 etwa über A_3 hinaus einen festen Punkt M_1 und denken uns von ihm die an die Äste III und I gehenden Tangenten t und T, so hat μ einen festen Wert und es wird für t: $\lambda = \mu + 1 - 2\sqrt{\mu}$, für T: $\lambda = \mu + 1 + 2\sqrt{\mu}$. Denken wir uns ferner einen von M_1 ausgehenden Strahl t aus der Lage t in die Lage T im Drehsinne $A_1A_2A_3$ gedreht, so durchschneidet er entweder den Ast III oder den Ast I zweimal (und dabei noch einmal den Ast I bz. III). Bei dieser Drehung wächst nun λ und muß also von $\mu + 1 - 2\sqrt{\mu}$ zu $\mu + 1 + 2\sqrt{\mu}$ übergehen. Nimmt λ einen zwischen beiden liegenden Wert, etwa $\mu + 1 \pm \varepsilon$, wo $\varepsilon < 2\sqrt{\mu}$ ist, an, so wird aus B, dessen Wert wir schreiben können $\lambda^2 - 2\lambda\,(\mu + 1) + (\mu - 1)^2$, schließlich $\varepsilon^2 - 4\mu$ d. h. negativ. Positiv wird dieser Wert, wenn λ außerhalb der beiden Werte liegt, ε also $> 2\sqrt{\mu}$ ist.

Läge der feste Punkt M_1 über A_2 hinaus, so müßten wir den Strahl t im Sinne $A_1A_3A_2$, also umgekehrt drehen, soll λ vom kleineren zum größeren Werte übergehen. Aus alledem geht hervor: schneidet M einen Kurvenast zweimal, die ganze Kurve also dreimal, so ist B negativ und $\Sigma = 0$ Ellipse; schneidet sie diesen Ast keinmal, die Kurve also einmal, so ist B positiv und $\Sigma = 0$ Hyperbel. K_3^4 grenzt also in der That das für Hyperbeln gültige Gebiet von dem zu Ellipsen gehörigen ab. Dies ist so zu verstehen: Nehmen wir außerhalb jedes der drei Kurvenäste einen beliebigen Punkt an und legen von ihm aus einen Strahl M, den wir um den Punkt drehen, so gehört er, so lange er sich außerhalb der drei Äste dreht, zu einer Hyperbel, dreht er sich bis an einen Ast heran, zu einer Parabel, und durchsetzt er den Ast, zu einer Ellipse. Der über den festen Punkt hinaus verlängerte Strahl schneidet immer noch einmal in einem besonderen Punkte.

Wir behandeln noch die Frage, wenn $\Sigma = 0$ eine gleichseitige Hyperbel wird. Dies geschieht bei unseren Koordinaten (vergl. Fiedler 689), wenn

$$a_1 \cot A_1 + a_2 \cot A_2 + a_3 \cot A_3 = 0$$

ist, also wenn die Gerade M den Kegelschnitt

$$u_2u_3 \cot A_1 + u_3u_1 \cot A_2 + u_1u_2 \cot A_3 = 0$$

berührt. Seine Berührungspunkte mit den Seiten sind $u_1 \cot A_2 + u_2 \cot A_1 = 0$ u. s. w., also die Höhenfußpunkte.

Dieser eingeschriebene Kegelschnitt ist entweder Hyperbel oder Ellipse, je nachdem die auf ähnliche Art wie auf Seite 8 gefundene Discriminante größer oder kleiner als Null ist. Sie ist nach einer kleinen Umformung und nach Unterdrückung des stets positiven Nenners $\sin^2 A_1 \sin^2 A_2 \sin^2 A_3$:

$$-4(\cos A_1 \cos A_2 \cos A_3 + \cos^2 A_1 \cos^2 A_2 \cos^2 A_3)$$

und ist für spitze Dreieckswinkel negativ, für einen stumpfen Winkel, weil der zweite Summand, absolut genommen, kleiner als der erste ist, positiv. Beim spitzwinkligen Dreieck ist der Kegelschnitt daher Ellipse, beim stumpfwinkligen Hyperbel. Beim rechtwinkligen degeneriert er in zwei Punkte, den Eckpunkt und gegenüberliegenden Höhenfußpunkt, denn für $\sphericalangle A_3 = 90^0$ wird seine Gleichung $u_3\,(u_2 \cot A_1 + u_1 \cot A_2) = 0$.

Wir fügen hier die Gleichung des umgeschriebenen Kreises in Linienkoordinaten hinzu, weil sie sich nach dem Vorhergehenden sehr leicht ergiebt. Die Gerade M, welche die Schnittpunkte der in den Ecken des Dreiecks an den Kreis gelegten Tangenten mit den Gegenseiten enthält, hat folgendermaßen bestimmbare Koordinaten. Es ist $u_1 : u_2 = M_3A_1 : M_3A_2 = \frac{M_3A_1}{M_3A_3} : \frac{M_3A_2}{M_3A_3}$ $= \frac{\sin A_2}{\sin A_1} : \frac{\sin A_1}{\sin A_2} = \sin^2 A_2 : \sin^2 A_1$ u. s. w., also überhaupt $u_1 : u_2 : u_3 = \frac{1}{\sin^2 A_1} : \frac{1}{\sin^2 A_2} : \frac{1}{\sin^2 A_3}$. Setzen wir diese Werte in die allgemeine Gleichung des umgeschriebenen Kegelschnitts für $\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3}$ ein, so wird sie

$$u_1^2 \sin^4 A_1 + u_2^2 \sin^4 A_2 + \ldots - 2u_2u_3 \sin^2 A_2 \sin^2 A_3 - \ldots = 0,$$

eine Form, die wir auf Seite 5 schon vorausgenommen hatten.

2. Teil B.

Der eben behandelte Abschnitt gestaltete sich wegen des höheren Grades der die Ebene zerteilenden Grenzkurve nicht so einfach als der erste. Wir gehen daher noch einmal mit Punktkoordinaten an ihn heran und hoffen, daß bei neuer Betrachtungsweise neue Gesichtspunkte sich ergeben werden.

Ein dem Fundamentaldreieck umgeschriebener Kegelschnitt hat die Gleichung $S \equiv a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0$. Die Tangenten in den Ecken sind

$$a_3 x_2 + a_2 x_3 = 0, \quad a_3 x_1 + a_1 x_3 = 0, \quad a_2 x_1 + a_1 x_2 = 0,$$

und diese schneiden die Gegenseiten in drei Punkten der Geraden

$$M \equiv \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0.$$

Die unendlich ferne Gerade hat mit S zwei reelle, zwei zusammenfallende oder zwei imaginäre Schnittpunkte gemein, je nachdem nach Elimination von x_3 aus $L_\infty = 0$ und $S = 0$ das Verhältnis $x_1 : x_2$ reell, einwertig oder imaginär ist, d. h. je nachdem die Discriminante der sich für $x_1 : x_2$ ergebenden Gleichung, nämlich die Form

$$B \equiv a_1^2 s_1^2 + a_2^2 s_2^2 + a_3^2 s_3^2 - 2a_1 a_2 s_1 s_2 - 2a_1 a_3 s_1 s_3 - 2a_2 a_3 s_2 s_3$$

positiv, gleich Null oder negativ ist.

Der Fall $B = 0$ führt uns zu der früheren Kurvengleichung K_3^4, wenn wir beachten, daß in $M = 0$ die Größen $\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3}$ proportional zu $u_1 s_1 : u_2 s_2 : u_3 s_3$ sind; wir wollen indeß bei Punktkoordinaten bleiben.

Nach bekannten Regeln der Differenzialrechnung erhalten wir die Enveloppe von $M = 0$, wenn sich a_1, a_2, a_3 gemäß der Gleichung $B = 0$ verändern, durch Elimination von λ, a_1, a_2, a_3 aus

$$\lambda \frac{\partial B}{\partial a_1} + \frac{\partial M}{\partial a_1} = 0, \quad \lambda \frac{\partial B}{\partial a_2} + \frac{\partial M}{\partial a_2} = 0, \quad \lambda \frac{\partial B}{\partial a_3} + \frac{\partial M}{\partial a_3} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_3} + \frac{x_1}{a_3} = 0,$$

oder, nachdem wir zur Vereinfachung

$$a_1 s_1 = \alpha, \quad a_2 s_2 = \beta, \quad a_3 s_3 = \gamma;$$
$$x_1 s_1 = x, \quad x_2 s_2 = y, \quad x_3 s_3 = z$$

gesetzt haben, durch Fortschaffen von $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$ aus

$$1. \begin{cases} \lambda(\alpha - \beta - \gamma) = \dfrac{x}{\alpha^2} \\ \lambda(-\alpha + \beta - \gamma) = \dfrac{y}{\beta^2} \\ \lambda(-\alpha - \beta + \gamma) = \dfrac{z}{\gamma^2} \end{cases}$$

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0.$$

Multipliziert man die drei ersten Gleichungen entsprechend mit α, β, γ und addiert, so erhält man wegen der 4. Gleichung die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma = 0,$$

worin die linke Seite der bekannte Wert B ist. Aus $B = 0$ folgen die Formen

$$(\alpha - \beta - \gamma)^2 = 4\beta\gamma$$
$$(-\alpha + \beta - \gamma)^2 = 4\alpha\gamma$$
$$(-\alpha - \beta + \gamma)^2 = 4\alpha\beta,$$

und dadurch gehen die quadrierten Gleichungen über in

$$4\lambda^2\alpha\beta\gamma = \frac{x^2}{\alpha^3}$$

$$4\lambda^2\alpha\beta\gamma = \frac{y^2}{\beta^3}$$

$$4\lambda^2\alpha\beta\gamma = \frac{z^2}{\gamma^3},$$

es wird also wegen $\frac{x^2}{\alpha^3} = \frac{y^2}{\beta^3} = \frac{z^2}{\gamma^3}$, welches wir $= \frac{1}{m^3}$ setzen,

$$\alpha = m\sqrt[3]{x^2}, \quad \beta = m\sqrt[3]{y^2}, \quad \gamma = m\sqrt[3]{z^2},$$

und die vierte Gleichung nimmt die Gestalt an

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0,$$

welche in $(x + y + z)^3 = 27xyz$ übergeführt werden kann. Es müßte nun hierin x, y, z wieder ersetzt werden durch x_1s_1, x_2s_2, x_3s_3, da indeß bei unseren folgenden Betrachtungen die Größen s den Größen x nie von der Seite weichen, behalten wir die einfache Form bei, nur heißt jetzt die unendlich ferne Gerade $x + y + z = 0$, der Schwerpunkt des Dreiecks $x = y = z$. Es mag hier bemerkt werden, daß die neuen Koordinaten ihre gute geometrische Bedeutung haben. (Vergl. Durège, Ebene Kurven 3. Ordnung S. 15).

Die Kurve ist, wie wir früher schon gefunden haben und jetzt direct sehen, von der dritten Ordnung. Setzen wir, um ihren Durchschnitt mit den Seiten zu erfahren, $z = 0$, so geht ihre Gleichung über in $(x + y)^3 = 0$, d. h. $z = 0$ trifft die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten, nämlich dort, wo $z = 0$ und die durch die Gegenecke hierzu gezogene Parallele $x + y = 0$ sich treffen, also im Unendlichen. Dasselbe gilt von den anderen Seiten. Die Dreiecksseiten werden demnach Wendetangenten, und die Wendepunkte liegen auf der unendlich fernen Geraden — ganz im Einklang mit unseren früheren Erfahrungen.

Die Koordinaten des Schwerpunkts $x = y = z$ befriedigen, wie wir sehen, die Gleichung ebenfalls; dieser Punkt ist daher ein isolirter Punkt der Kurve. Wir lernen hierdurch eine Singularität derselben kennen, welche die Gleichung in Linienkoordinaten nicht aufwies, die aber andererseits notwendig und hinreichend ist, um ihre Klasse von der 6. auf die 4. zu erniedrigen. Die in $\frac{4}{3}$ Höhe zur Seite A_1A_2 gezogene Parallele hat die Gleichung $4(x + y) + z = 0$. Setzen wir den sich hieraus ergebenden Wert von z in die Kurvengleichung ein, so geht sie über in

$$(x + y)\,(x - y)^2 = 0;$$

die Parallele schneidet also nicht blos in dem Punkte, wo sich $x + y = 0$ und $z = 0$ treffen, im Unendlichen, sondern auch noch in dem zusammenfallenden Punkte $x = y = -\frac{z}{8}$, d. i. dort, wo sie von der von A_3 ausgehenden Schwerlinie geschnitten wird. Die Parallele ist in diesem Punkte Berührende.

Allgemein hat eine Parallele zu A_1A_2 die Form $\lambda\,(x + y) + z = 0$. Eliminieren wir hieraus und aus $(x + y + z)^3 = 27xyz$ z und suchen die Diskriminante der sich für das Verhältnis $x : y$ ergebenden Gleichung, welche sich in der Form

$$D \equiv \left(\frac{\frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda - 1}{3}\right)^3} - 1\right)^2 - 1$$

ergiebt, so finden wir sie positiv für jedes λ von 4 bis 1 und von 1 bis 0, für alle übrigen und für negative Werte wird D negativ. Zweimal, für $\lambda = 4$ und $\lambda = -\frac{1}{2}$ wird $D = 0$. Ins Geometrische übersetzt heißt dies: Zweimal, nämlich wenn die Parallele durch den Schwerpunkt geht oder in $\frac{4}{3}$ Höhe von $A_1 A_2$ verläuft, trifft sie die Kurve in zusammenfallenden Punkten, liegt sie höher oder nähert sie sich $A_1 A_2$ von der anderen Seite, so sind die endlichen Schnittpunkte reell; von $A_1 A_2$ aus bis in $\frac{4}{3}$ Dreieckshöhe schneidet die Parallele im Endlichen nicht. Dehnen wir dieselbe Betrachtung auch auf die übrigen Dreiecksseiten aus, so gewinnen wir schließlich dasselbe Bild von der Kurve, welches wir uns schon im vorigen Abschnitt verschafft hatten.

Die Fälle, wo der umgeschriebene Kegelschnitt Ellipse und Hyperbel wird, übergehen wir hier und wollen nur noch einige Worte der gleichseitigen Hyperbel schenken. $S = 0$ wird eine solche unter der Bedingung $a_1 \cos A_1 + a_2 \cos A_2 + a_3 \cos A_3 = 0$ (siehe Fiedler 689). Eliminieren wir hieraus und aus $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$ erst a_3 und bestimmen aus der für $a_1 : a_2$ resultierenden Gleichung die Diskriminante, so erhalten wir damit die Gleichung der Enveloppe in folgender Gestalt:

$$x_1^2 \cos {}^2A_1 + x_2^2 \cos {}^2A_2 + x_3^2 \cos {}^3A_3 - 2x_1x_2 \cos A_1 \cos A_2 \ldots = 0.$$

In Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnis (S. 10) berührt dieser Kegelschnitt die Seite $x_3 = 0$ in $x_1 \cos A_1 - x_2 \cos A_2 = 0$, also im Höhenfußpunkte.

Auch hier finden wir, daß er für ein stumpfwinkliges Fundamentaldreieck Hyperbel, für ein spitzwinkliges Ellipse ist. Für ein rechtwinkliges geht seine Gleichung über in $(x_1 \cos A_1 - x_2 \cos A_2)^2 = 0$, nämlich in die doppelt zu zählende Höhe, und wir haben, wenn wir mit dem früheren vergleichen, den charakteristischen Unterschied vor uns, der zwischen dem Grenzfall eines Kegelschnitts als Ortskurve und als Enveloppe besteht.

Das Hauptergebnis des 2. Teiles ist daher folgendes:

„Zieht man in den Ecken eines Dreiecks, welchem ein Kegelschnitt umgeschrieben ist, Tangenten an ihn, so schneiden diese die Gegenseiten in drei in einer Geraden M liegenden Punkten. So lange der Kegelschnitt Parabel ist, berührt M eine aus drei hyperbelartigen Ästen bestehende Kurve 3. Ordnung 4. Klasse und wird Hyperbel oder Ellipse, wenn M die Kurve einmal oder dreimal schneidet. Ist er insbesondere eine gleichseitige Hyperbel, so umhüllt M einen das Dreieck in den Höhenfußpunkten berührenden Kegelschnitt, der Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem das Dreieck spitz- oder stumpfwinklig war."

Wenn man den einen, immer vorhandenen, Schnittpunkt der Geraden M mit der für die Art des Kegelschnitts wichtigen Grenzkurve K_3^4 außer Acht läßt, könnte in Übereinstimmung mit dem Ergebnis des 1. Teiles nötigenfalls gesagt werden:

„Der dem Dreieck umgeschriebene Kegelschnitt ist Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem M außerhalb, auf oder innerhalb der genannten Kurve gelegen ist."

Anhang.

Die Herleitung der Gleichung $(x + y + z)^3 = 27xyz$ war nicht davon abhängig, daß x, y, z für s_1x_1, s_2x_2, s_3x_3 gesetzt wurden, sie hätte sich in ganz ähnlicher Weise vollzogen, wenn wir ganz allgemein mit Produkten wie b_1x_1, b_2x_2, b_3x_3 zu thun gehabt hätten, wenn wir also nicht die Enveloppe für die Gerade M für den Fall aufgesucht hätten, daß der umgeschriebene Kegelschnitt

die unendlich ferne Gerade sondern eine ganz beliebige andere $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ berührt. Wir schließen hieraus den allgemeineren Satz:

„Wenn Kegelschnitte einem Dreieck umgeschrieben sind, die außerdem noch eine gewisse Gerade berühren, so umhüllen diejenigen Geraden, auf welchen die in den Ecken an den Kegelschnitt gelegten Tangenten die Seiten des Dreiecks treffen, eine Kurve 3. Ordnung 4. Klasse, welche die Schnittpunkte der Geraden mit den Seiten des Dreiecks zu Wendepunkten hat."

Unsere Kurve K_3^4 bedeutet in dieser Kurvengruppe nur einen Grenzfall, nämlich den, wo die zur Tangente gewählte beliebige Linie die unendlich ferne Gerade ist.

Auf die Ähnlichkeit ihrer Gleichungsform

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$$

mit der für die Grenzkurve des 1. Teils gefundenen

$$\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} = 0$$

sei noch besonders hingewiesen.