Coordinaten-Transformationen auf beliebiger Oberfläche in conjugiert-complexen Variabeln.

Einleitung.

A.

Über die Grundlagen einer Geometrie auf beliebiger Oberfläche.

Für die Begründung und Behandlung einer Geometrie auf beliebig vorgelegter Oberfläche ist die Fläche als Raumgebilde für sich, d. h. unabhängig von einem höheren Raume ins Auge zu fassen. Es werden nur die Lagen- und Massverhältnisse innerhalb der Fläche betrachtet, wobei also davon zu abstrahieren ist, wie die Fläche im dreidimensionalen Raume gelegen ist. Flächen, die ohne Dehnung in einander verbogen werden können, d. h. auf einander abwickelbare Flächen, sind somit vom Gesichtspunkte der Geometrie auf gegebener Oberfläche nicht von einander zu unterscheiden.

Wie auf der Ebene, so wird auch auf einer jeden Oberfläche die analytische Behandlung der Geometrie auf derselben begründet, werden die Lagenverhältnisse der Punkte und der Linien zu einander und die Massverhältnisse auf der Fläche fixiert durch ein beliebiges auf der vorgelegten Oberfläche gezeichnetes Coordinatensystem*), das durch irgend zwei ∞^1-fache Curvenscharen $u = const.$ und $v = const.$ gebildet wird. Von diesen Curvenscharen überdeckt jede für sich die Fläche vollständig, sodass jeder Punkt der Fläche auf einer bestimmten Curve

*) Dieses Coordinatensystem auf der vorgelegten Oberfläche kann raumgeometrisch gewonnen werden als Schnitt einer bestimmten im dreidimensionalen Raume festliegenden doppelten Flächenschar mit der gleichfalls in bestimmter, fester Lage im Raume gedachten Oberfläche. Hiermit sind zugleich die Coordinatencurven hinsichtlich der Gesetzmässigkeit ihres Verlaufs auf der vorgelegten Oberfläche und ihrer Zusammengehörigkeit zu einem doppelten Curvensysteme auf dieser Fläche sowohl rein geometrisch als auch analytisch definiert, und es lässt sich die Geometrie auf der vorgelegten Oberfläche, im besonderen die analytische Form des Bogenelementes auf derselben, aus dieser raumgeometrischen analytischen Fixierung sowohl der vorgelegten Oberfläche als auch des auf derselben angenommenen Coordinatencurvensystems entwickeln.

Von dieser raumgeometrischen Gewinnung des Coordinatensystems auf der vorgelegten Fläche soll jedoch hier abstrahiert werden. Es sollen die beiden Coordinatencurvenscharen als irgendwie auf der Fläche gegeben (ohne Nachfrage nach ihrer Herkunft) angesehen werden, wobei auf die Gesetzmässigkeit des Verlaufs der einzelnen Curve auf der Oberfläche und auf die Gesetzmässigkeit der Zusammengehörigkeit aller dieser Curven zu einem Curvensysteme als in den Krümmungs- und Erstreckungsverhältnissen der Oberfläche irgendwie begründet hinzuweisen ist.

$u = const.$, auf $u = c$, und gleichzeitig auf einer bestimmten Curve $v = const.$, auf $v = c'$, liegt, jede Wertcombination u, v einen ganz bestimmten Punkt der Fläche analytisch definiert, umgekehrt aber jeder Punkt der Fläche einem ganz bestimmten Wertepaare u, v entspricht. Rein geometrisch wird aber die Lage irgend eines beliebigen Punktes auf der Fläche auch fixiert durch die Längen s_u und s_v der Curvenbögen, welche von zwei individuell auf der Fläche festgelegten Anfangscoordinatencurven $u = o$ und $v = o$ aus längs der beiden Coordinatencurven $v = const.$ und $u = const.$, die sich in dem gedachten Flächenpunkte u, v schneiden, bis zu diesem Punkte hin gemessen werden.

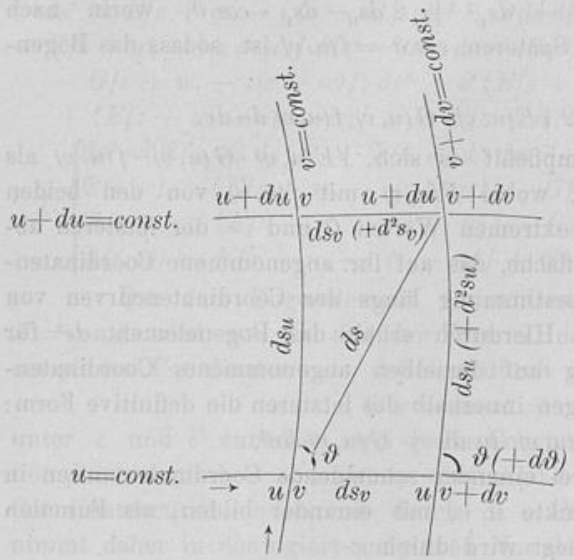
Bei dieser doppelten analytischen Festlegung eines beliebigen Flächenpunktes durch ein Wertepaar u, v und durch ein anderes Wertepaar s_u, s_v ist es zunächst erforderlich, den Zusammenhang der Zählungsweise der Coordinatenwerte u, v mit den ihnen entsprechenden Bogenlängen s_u, s_v der Coordinatencurven analytisch zu fixieren. Nun kann aber die Verfolgung der Mass- und Lagenverhältnisse auf der Fläche von einem beliebigen Punkte u, v bez. s_u, s_v derselben aus zunächst nur differentiell geschehen, da die beliebig gekrümmte Fläche ihre Massgrössen: Strecke, Flächengebiet, Winkel in der uns allein direkt zugänglichen, in der allein von uns direkt auffassbaren Weise als geradlinige Strecke, als ebenes Flächengebiet, als Unterschied zweier geradlinigen Richtungen nur in differentieller Form darbietet, nämlich innerhalb des Berührungsbereiches der im Ausgangspunkte u, v an die Fläche gelegten Tangentialebene mit der Fläche. So kann der functionale Zusammenhang der Bogenlängen s_u, s_v der Coordinatencurven mit den Coordinatenwerten u, v selbst nur in differentieller Form gegeben sein, so zwar, dass die Änderung des Bogendifferentials ds_u, als auf der Coordinatencurve $v =$ const. gemessen von der festen Stelle u, v der Fläche aus, nur von dem Betrage der differentiellen Wertänderung der Grösse u, nicht aber auch der Grösse v abhängen kann, die differentielle Bogenänderung ds_v nur von dem Betrage der differentiellen Änderung des Coordinatenwertes v, nicht aber der Grösse u. Dem Genauigkeitsgrade der Operation auf der Fläche um den gewöhnlichen, nicht singulären Punkt u, v herum und gleichzeitig innerhalb der im Punkte u, v an die Fläche gelegten Tangentialebene entspricht es nun allein, wenn diese Abhängigkeit zwischen ds_u und du einerseits und zwischen ds_v und dv andererseits die einfacher Proportionalität ist, wobei aber die Wertverhältnisse $ds_u : du$ und $ds_v : dv$ wiederum an sich einander keineswegs bedingen. Hiernach ist der functionale Zusammenhang der Bogenlängen s_u, s_v der Coordinatencurven mit den Coordinatenwerten u, v in allgemeinster Weise durch die Relationen gegeben:

$$A. \quad ds_u^2 = E(u, v)\, du^2, \; ds_v^2 = G(u, v)\, dv^2.$$

In diesen Relationen sind die Functionen $E(u, v)$ und $G(u, v)$ durch 3 Elemente bestimmt: durch die vorgelegte individuelle Oberfläche, durch das auf derselben gegebene individuelle Coordinatencurvensystem und die gegebene individuelle Zählungsweise der Bogenlängen s_u und s_v mit den Coordinatenwerten u und v; die Functionen $E(u, v)$ und $G(u, v)$ werden durch diese drei Elemente einzeln individuell festgelegt.

Mit den beiden Functionen $E(u, v)$ und $G(u, v)$ sind aber umgekehrt die Oberfläche, das Coordinatensystem auf derselben und die Zählungsweise der Coordinatencurven, d. i. der Coordinatenwerte u und v, nach den Bogenlängen s_u und s_v auf diesen Coordinatencurven noch keineswegs individuell festgelegt, ist die Geometrie auf dieser Oberfläche noch nicht gesichert. Es fehlt zu den angegebenen Streckenmassen s_u und s_v, gemessen auf den von irgend einem Flächenpunkte u, v ausgehenden Coordinatencurven hin, noch ein Winkelmass für die Fläche,

die Angabe des Winkels ϑ, den die beiden Coordinatencurven in ihrem gemeinschaftlichen Ausgangspunkte u, v mit einander bilden, als des dritten Stückes zur Festlegung des auf der Oberfläche und gleichzeitig auf der Tangentialebene zu derselben im Punkte u, v gelegenen, von u, v als dem einen Eckpunkte ausgehenden Flächenelementes, des Dreieckes, dessen abschliessende, dem Winkel ϑ bez. seinem Supplemente gegenüberliegende Seite*) ein ganz beliebiges auf keiner der Coordinatencurven verlaufendes Bogendifferential ds ist, das den Ausgangspunkt u, v, mit einem beliebigen ihm benachbarten Punkte $u + du$, $v + dv$ verbindet.



Dieser Neigungswinkel ϑ der Coordinatencurven im Punkte u, v gegen einander wird nun nach Massgabe der vorgelegten Oberfläche und des auf ihm angenommenen Coordinatencurvensystems für die verschiedenen Punkte u, v der Oberfläche ein verschieden grosser, d. h. ϑ wird eine bestimmte Function der beiden Coordinaten u und v sein, etwa fixiert durch $\cos\vartheta = f(u, v)$. Wie aber rein anschauungsgemäss die Grösse dieses Winkels unabhängig ist von den beliebig zu wählenden Längen ds_u und ds_v der ihn einschliessenden Seiten in jenem Flächenelemente, dem Dreiecke mit den Seiten ds_u, ds_v und ds, so ist $f(u, v)$ eine von $E(u, v)$ und $G(u, v)$ unabhängige Function ihrer Argumente, die nun mit jenen beiden Functionen die Oberfläche, das auf ihr angenommene Coordinatencurvensystem und die Zählungsweise der Coordinatencurven nach den Längen der Bögen längs derselben vollständig individuell festlegt. Es geht dies daraus hervor, dass nun, nach Einführung dieser dritten Function $f(u, v)$, das an beliebiger Stelle u, v der Oberfläche gelegene Flächenelement, jenes Dreieck mit den Seiten ds_u, ds_v und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ϑ, zu vollständiger Berechnung bereit liegt, dass es möglich ist, mit Hilfe der Seite ds dieses Dreiecks von einem beliebigen Flächenpunkte, einem Eckpunkte des Dreiecks, aus auf der Fläche den Weg zu gewinnen nach einem beliebigen andern ihm benachbarten Flächenpunkte, einem zweiten Eckpunkte des Dreiecks, in einer ganz beliebigen, also nicht an die Coordinatencurven gebundenen Richtung auf der Fläche, die Grösse dieses ganz beliebigen Bogendifferentials auf der vorgelegten Oberfläche und seine Richtung gegen die Coordinatencurven, von denen es ausgeht, zu berechnen, dass es also möglich ist, die vorgelegte Oberfläche, freilich nur in differentiellem Masse, doch in sonst ganz freier Weise nach allen Richtungen hin, Strecken, Winkel und Flächen messend, zu durchforschen.

---

*) Der dem Bogenelement ds gegenüberliegende Winkel (vergl. obenstehende Figur) ist zwar nicht absolut gleich dem Winkel ϑ beim Ausgangspunkte der beiden Coordinatencurven $u = const.$ und $v = const.$, sondern, die Stetigkeit der Änderung des Winkels zwischen je zwei einander schneidenden Coordinatencurven für die Oberfläche und das auf ihr gewählte Coordinatencurvensystem vorausgesetzt, um ein Differential $d\vartheta$ von ϑ verschieden, es stimmt aber doch nach dem vorgeschriebenen Genauigkeitsgrade $\cos(\vartheta + d\vartheta)$ mit $\cos\vartheta$ vollständig überein, und ϑ kommt in folgendem nur als Argument dieser trigonometrischen Function in Frage.

Die bisher genannten drei Elemente für Begründung einer Geometrie auf beliebig gegebener Oberfläche, die Differentiale der Coordinatencurvenbögen, ds_u und ds_v, und der Winkel ϑ, den die in einem beliebigen Flächenpunkte u, v einander schneidenden Coordinatencurven daselbst mit einander bilden, oder die drei jene Elemente definierenden Functionen $E(u, v)$, $G(u, v)$ und $f(u, v)$ werden nun in der Form des aus ihnen zu berechnenden ganz beliebigen Bogendifferentials ds auf der Fläche einheitlich zusammengefasst. Die Anwendung des Cosinussatzes der ebenen Trigonometrie auf das als plan angenommene differentielle Dreieck mit den Bestimmungsstücken ds_u, ds_v und ϑ ergiebt für die dem Winkel ϑ bez. seinem Supplemente gegenüberliegende Seite den Wert $ds^2 = ds_u^2 + ds_v^2 + 2\, ds_u \cdot ds_v \cdot \cos\vartheta$, worin nach $A.$ $ds_u^2 = E(u, v)\, du^2$, $ds_v^2 = G(u, v)\, dv^2$ und nach Späterem $\cos\vartheta = f(u, v)$ ist, sodass das Bogendifferential ds^2 die Form gewinnt:

$$ds^2 = E(u, v)\, du^2 + G(u, v)\, dv^2 + 2\sqrt{E(u, v) \cdot G(u, v)}\, f(u, v)\, du\, dv.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise empfiehlt es sich, $\sqrt{E(u, v) \cdot G(u, v)} \cdot f(u, v)$ als eine einzige neue Function $F(u, v)$ einzuführen, wobei $F(u, v)$ mit $f(u, v)$ von den beiden andern Functionen $E(u, v)$ und $G(u, v)$, von den extremen Werten 0 und ∞ der letzteren abgesehen, unabhängig ist, mit ihnen aber die Oberfläche, das auf ihr angenommene Coordinatencurvensystem sowie die Abhängigkeit der Massbestimmung längs der Coordinatencurven von der Zählungsweise derselben individuell festlegt. Hierdurch erhält das Bogenelement ds^2 für eine beliebig vorgelegte Oberfläche, ein beliebig auf derselben angenommenes Coordinatencurvensystem und beliebig gewählte Massbeziehungen innerhalb des letzteren die definitive Form:

$$B. \quad ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2\, F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2,$$

während der Neigungswinkel ϑ, den beliebige zwei einander schneidende Coordinatencurven in ihrem Schnittpunkte, einem beliebigen Flächenpunkte u, v, mit einander bilden, als Function der Coordinaten u, v dieses Flächenpunktes festgelegt wird durch

$$C. \quad \cos\vartheta = f(u, v) = \frac{F(u, v)}{\sqrt{E(u, v) \cdot G(u, v)}}$$

Hiermit ist das beliebige Bogenelement ds in der Form B durch die drei Functionen $E(u, v)$, $F(u, v)$ und $G(u, v)$, die es in sich birgt, zur einheitlichen und ausreichenden Grundlage, zum einheitlichen Masselemente für die Geometrie auf beliebig gegebener Oberfläche geworden. Das Endziel irgend welcher Coordinatentransformationen auf gegebener Oberfläche muss daher die Fixierung und Discussion der etwa typischen Form sein, welche das Bogenelement auf der vorliegenden Fläche auf Grund des neuen Coordinatensystems annimmt, wie wiederum die besondere Form des Bogenelementes massgebend sein wird für die einzuschlagenden Methoden bei Behandlung der wichtigen Probleme der Geometrie auf gegebener Oberfläche, des Problems der geodätischen Linien, der Flächenkrümmung etc.

B.

Das Bogenelement auf einer beliebig gegebenen Oberfläche in conjugiert-complexen Coordinaten.

In Folgendem soll die Geometrie auf beliebig gegebener Oberfläche, soweit sich dieselbe auf die reelle Form des Bogenelementes:

$$1. \quad ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2\, F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2$$

stützt, auf ein beliebiges Coordinatensystem auf dieser Oberfläche mit conjugiert-complexen Variabeln z, w bezogen werden.

Die Transformation der zunächst als reell vorausgesetzten Variabeln u, v in conjugiert-complexe Variabeln und die dementsprechende Transformation der obigen allgemeinen Form des Bogenelementes geschieht auf Grund der Substitution $u = z + w$, $v = -i(z - w)$ oder umgekehrt $2z = u + iv$, $2w = u - iv$. Zu Folge dieser Substitution wird

$$du = dz + dw, dv = -i(dz - dw), \text{ also}$$

$$du^2 = dz^2 + 2dz \cdot dw + dw^2, dv^2 = -(dz^2 - 2dz \cdot dw + dw^2), du \cdot dv = -i(dz^2 - dw^2),$$

$$E(u, v) \equiv E[z + w, -i(z - w)], F(u, v) \equiv F[z + w, -i(z - w)], G(u, v) \equiv G[z + w, -i(z - w)].$$

Das Bogenelement nimmt daher die Form an

$$ds^2 = E[z + w, -i(z - w)] \cdot (dz^2 + 2dz\,dw + dw^2) - 2i\,F[z + w, -i(z - w)] \cdot (dz^2 - dw^2)$$
$$- G[z + w, -i(z - w)] \cdot (dz^2 - 2dz\,dw + dw^2) = \{E[z + w, -i(z - w)] - 2i\,F[z + w, -i(z - w)]$$
$$- G[z + w, -i(z - w)]\}\,dz^2 + 2\,\{E[z + w, -i(z - w)] + G[z + w, -i(z - w)]\}\,dz\,dw$$
$$+ \{E[z + w, -i(z - w)] + 2i\,F[z + w, -i(z - w)] - G[z + w, -i(z - w)]\}\,dw^2 \text{ oder}$$

$$I. \begin{cases} ds^2 = \mathfrak{E}(x, w)\,dx^2 + 2 \cdot \mathfrak{F}(x, w)\,dx\,dw + \mathfrak{G}(x, w)\,dw^2, \text{ wo} \\ \mathfrak{E}(x, w) \equiv \{E[x + w, -i(x - w)] - G[x + w, -i(x - w)]\} - 2i\,F[x + w, -i(x - w)], \\ \mathfrak{G}(x, w) \equiv \{E[x + w, -i(x - w)] - G(x + w, -i(x - w)]\} + 2i\,F[x + w, -i(x - w)], \\ \mathfrak{F}(x, w) \equiv E(x + w, -i(x - w)] + G[x + w, -i(x - w)] \text{ ist.} \end{cases}$$

Das dem Bogenelement *1.* zu Grunde liegende Coordinatencurvensystem $u = const.$, $v = const.$ wird nun in den der Form *I.* des Bogenelementes zu Grunde liegenden conjugiert-complexen Coordinaten x, w definiert durch die Gleichungen

$$x + w = const. = c, -i(x - w) = const. = c',$$

unter c und c' zunächst zwei reelle Constanten verstanden. In differentieller Form sind die Coordinatencurven $u = const.$ in conjugiert-complexen Variabeln definiert durch $dx = -dw$, die Coordinatencurven $v = const.$ durch $dx = dw$. Das Bogendifferential der Coordinatencurven nimmt daher in conjugiert-complexen Variabeln x, w die Form an

$$ds_u^2 = E(u, v)\,du^2 = E[x + w, -i(x - w)] \cdot (dx + dw)^2 \text{ für } v = const. \text{ oder für } dx = dw \text{ und}$$
$$ds_v^2 = G(u, v)\,dv^2 = -G[x + w, -i(x - w)] \cdot (dx - dw)^2 \text{ für } u = const. \text{ oder für } dw = -dx.$$

also die Form: $ds_u^2 = 4 \cdot E[x + w, -i(x - w)]\,dx^2$, $ds_v^2 = -4\,G[x + w, -i(x - w)]\,dw^2$.

Setzen wir das Bogenelement *1.* als reell voraus, d. h. bei reellen Variabeln u, v die drei Functionen $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ einzeln als reelle aber sonst vollständig willkürliche, von einander unabhängige Functionen ihrer Variabeln, so zeigen die Functionen

$$E[x + w, -i(x - w)] \equiv E'(w, x, i), F[x + w, -i(x - w)] \equiv F'(x, w, i), G[x + w, -i(x - w)] \equiv G'(w, x, i)$$

die Eigentümlichkeit, dass

$$D. \quad E'(x, w, i) \equiv E'(w, x, -i), F'(x, w, i) \equiv F'(w, x, -i) \text{ und } G'(x, w, i) \equiv G'(w, x, -i)$$

ist, sie sind aber sonst vollständig willkürliche und von einander unabhängige Functionen ihrer beiden Argumente x, w. Ausserdem stellen sich aber in der soeben erhaltenen allgemeinen Form *I.* des reellen Bogenelementes einer beliebig gegebenen Oberfläche in conjugiert-complexen Variabeln x, w auf Grund der zuletzt entwickelten Beziehungen *D.* die entsprechenden Relationen heraus

$$D'. \quad \mathfrak{E}(x, w, i) \equiv \mathfrak{G}(w, x, -i), \mathfrak{G}(x, w, i) \equiv \mathfrak{E}(w, x, -i), \mathfrak{F}(x, w, i) \equiv \mathfrak{F}(w, x, -i).$$

Umgekehrt sei eine beliebige Oberfläche gegeben durch das Bogenelement auf ihr: *I.* $ds^2 = \mathfrak{E}(x, w)\,dx^2 + 2\mathfrak{F}(x, w)\,dx\,dw + \mathfrak{G}(x, w)\,dw^2$, diese Form des Bogenelementes in den beiden conjugiert-complexen Variabeln x, w analytisch ausgedrückt und auf ein beliebiges Coordinatensystem auf der gegebenen Oberfläche bezogen. Die Transformation dieser imaginären Form *I.* des Bogenelementes auf die reelle Form *1.* ist durch folgendes System gegeben:

$z = {}^1/_2(u + iv),\ w = {}^1/_2(u - iv),\ 1.\ ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2$, wo

$$E \begin{cases} E(u,v) = {}^1/_4\ \{2\mathfrak{F}(z,w) + [\mathfrak{E}(z,w) + \mathfrak{G}(z,w)]\} \\ G(u,v) = {}^1/_4\ \{2\mathfrak{F}(z,w) - [\mathfrak{E}(z,w) + \mathfrak{G}(z,w)]\} \\ F(u,v) = {}^1/_4\, i\,[\mathfrak{E}(z,w) - \mathfrak{G}(z,w)] \end{cases} \text{ist.}$$

Diese Form *1.* definiert nun eine reelle Oberfläche und auf derselben ein reelles Coordinatencurvensystem mit reellen Massbeziehungen innerhalb desselben, sobald einzeln $E(u,v)$, $G(u,v)$ und $F(u,v)$ reelle Functionen ihrer beiden reellen Variabeln u und v sind, d. h. sobald

$$2\mathfrak{F}(z,w,i) + [\mathfrak{E}(z,w,i) + \mathfrak{G}(z,w,i)] \equiv 2\mathfrak{F}(w,z,-i) + [\mathfrak{E}(w,z,-i) + \mathfrak{G}(w,z,-i)],$$
$$2\mathfrak{F}(z,w,i) - [\mathfrak{E}(z,w,i) + \mathfrak{G}(z,w,i)] \equiv 2\mathfrak{F}(w,z,-i) - [\mathfrak{E}(w,z,-i) + \mathfrak{G}(w,z,-i)],$$
$$i\,[\mathfrak{E}(z,w,i) - \mathfrak{G}(z,w,i)] \equiv -i\,[\mathfrak{E}(w,z,-i) - \mathfrak{G}(w,z,-i)] \text{ ist.}$$

Diese Bedingungen führen aber, wie man aus geeigneter Verbindung derselben mit einander erkennt, auf die Bedingungen D' für die Realität des Bogenelements $I.$ zurück.

Auf Grund der Formeln $E.$ lauten nun die Bogenelemente der Coordinatencurven in conjugiert-complexen Variabeln

$A'.\ ds_u{}^2 = \{2\mathfrak{F}(z,w) + [\mathfrak{E}(z,w) + \mathfrak{G}(z,w)]\}\,dz^2,\ ds_v{}^2 = -\{2\mathfrak{F}(z,w) - [\mathfrak{E}(z,w) + \mathfrak{G}(z,w)]\}\,dw^2,$

und der Neigungswinkel ϑ zweier beliebigen Coordinatencurven $z + w = const.$ und $z - w = const.$ in ihrem Schnittpunkte z, w wird gegeben durch

$$C'.\quad \cos\vartheta = \frac{\mathfrak{G}(z,w) - \mathfrak{E}(z,w)}{\sqrt{\{\mathfrak{E}(z,w) + \mathfrak{G}(z,w)\}^2 - 4\mathfrak{F}^2(z,w)}} \text{ oder } tang^2\vartheta = 4\,\frac{\mathfrak{E}(z,w)\,\mathfrak{G}(z,w) - \mathfrak{F}^2(z,w)}{\{\mathfrak{E}(z,w) - \mathfrak{G}(z,w)\}^2}.$$

I.

Transformation verschiedener Arten von Coordinatensystemen auf gegebener Oberfläche in einander.

1.

Transformation eines beliebigen individuellen Coordinatensystems z, w in ein beliebiges anderes, mithin allgemeines Coordinatensystem z_1, w_1.

Diese Aufgabe wird gelöst durch eine Substitution $II.^1\ z = Z_1(z_1, w_1),\ w = W_1(z_1, w_1)$, in welcher Z_1 und W_1 zwei willkürliche, von einander unabhängige Functionen ihrer beiden Argumente sind. Aus $II.^1$ folgt durch Differentiation

$$dz = \frac{\partial Z_1}{\partial z_1}\,dz_1 + \frac{\partial Z_1}{\partial w_1}\,dw_1,\ dw = \frac{\partial W_1}{\partial z_1}\,dz_1 + \frac{\partial W_1}{\partial w_1}\,dw_1,$$

und durch Substitution in $\mathfrak{E}(z,w), \mathfrak{F}(z,w), \mathfrak{G}(z,w)$

$$\mathfrak{E}(z,w) \equiv \mathfrak{E}\{Z_1(z_1,w_1), W_1(z_1,w_1)\} \equiv \mathfrak{A}_1(z_1,w_1),$$
$$\mathfrak{F}(z,w) \equiv \mathfrak{F}\{Z_1(z_1,w_1), W_1(z_1,w_1)\} \equiv \mathfrak{B}_1(z_1,w_1),$$
$$\mathfrak{G}(z,w) \equiv \mathfrak{G}\{Z_1(z_1,w_1), W_1(z_1,w_1)\} \equiv \mathfrak{C}_1(z_1,w_1).$$

Zufolge der Substitution $II.^1$ nimmt das Bogenelement $I.$ die Form an:

$$I.^1 \begin{cases} ds^2 = \mathfrak{E}_1(z_1, w_1)\, dz_1^2 + 2\cdot\mathfrak{F}_1(z_1, w_1)\, dz_1\, dw_1 + \mathfrak{G}_1(z_1, w_1)\, dw_1^2, \text{ wo} \\ \mathfrak{E}_1(z_1, w_1) = \mathfrak{A}_1\cdot\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z_1}\right)^2 + 2\mathfrak{B}_1\cdot\frac{\partial Z_1}{\partial z_1}\frac{\partial W_1}{\partial z_1} + \mathfrak{C}_1\cdot\left(\frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right)^2, \\ \mathfrak{F}_1(z_1, w_1) = \mathfrak{A}_1\cdot\frac{\partial Z_1}{\partial z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial w_1} + \mathfrak{B}_1\cdot\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z_1}\frac{\partial W_1}{\partial w_1} + \frac{\partial Z_1}{\partial w_1}\frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right) + \mathfrak{C}_1\cdot\frac{\partial W_1}{\partial z_1}\frac{\partial W_1}{\partial w_1}, \\ \mathfrak{G}_1(z_1, w_1) = \mathfrak{A}_1\cdot\left(\frac{\partial Z_1}{\partial w_1}\right)^2 + 2\mathfrak{B}_1\cdot\frac{\partial Z_1}{\partial w_1}\frac{\partial W_1}{\partial w_1} + \mathfrak{C}_1\cdot\left(\frac{\partial W_1}{\partial w_1}\right)^2, \\ \text{während } \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}_1 \text{ die oben angegebene Bedeutung besitzen.} \end{cases}$$

Es soll nun die Bedingung aufgesucht werden, unter welcher die Substitution $II.^1$ den Übergang von einem beliebigen individuellen reellen Coordinatencurvensysteme mit reellen Massbeziehungen in sich auf vorgelegter reeller Oberfläche zu einem gleichfalls reellen, aber sonst ganz willkürlichen Coordinatencurvensysteme mit wiederum reellen und ebenso ganz willkürlichen Massbeziehungen in sich auf derselben Oberfläche vermittelt. In reellen Ausgangs- und Endvariabeln, bez. u, v und u_1, v_1, lautet die allgemeinste Coordinatentransformation auf vorgelegter Oberfläche offenbar $2.^1\, u = \Phi_1(u_1, v_1), v = \Psi_1(u_1, v_1)$, wobei Φ_1 und Ψ_1 ganz willkürliche und von einander unabhängige Functionen ihrer beiden reellen Argumente u_1 und v_1 sind. Geht man von den reellen Variabeln u, v und u_1, v_1 über zu den conjugiert-complexen, bez. z, w und z_1, w_1, so ist $u = z + w, v = -i(z - w), u_1 = z_1 + w_1, v_1 = -i(z_1 - w_1)$.

Wird nun die Transformation in conjugiert-complexen Variabeln bewirkt durch die Substitution $II.^1: z = Z_1(z_1, w_1), w = W_1(z_1, w_1)$, so ist weiter

$$u = \Phi_1(u_1, v_1) = \Phi_1\{z_1 + w_1, -i(z_1 - w_1)\} = Z_1(z_1, w_1) + W_1(z_1, w_1),$$
$$v = \Psi_1(u_1, v_1) = \Psi_1\{z_1 + w_1, -i(z_1 - w_1)\} = -i\{Z_1(z_1, w_1) - W_1(z_1, w_1)\}.$$

Da der Übergang des reellen Bogenelementes 1. in ein gleichfalls reelles Bogenelement mit den reellen Variabeln u_1, v_1 nur durch eine reelle Substitution $u = \Phi_1(u_1, v_1), v = \Psi_1(u_1, v_1)$ erzielt werden kann, sodass $\Phi_1(u_1, v_1)$ und $\Psi_1(u_1, v_1)$ reelle Functionen ihrer beiden reellen Variabeln sein müssen, so muss an die Functionen $Z_1(z_1, w_1) + W_1(z_1, w_1)$ und $-i\{Z_1(z_1, w_1) - W_1(z_1, w_1)\}$ die Anforderung gestellt werden, dass sie sich als Functionen zweier conjugiert-complexen Variabeln beide durch die Substitution $z_1 = {}^1/_2\,(u_1 + iv_1), w_1 = {}^1/_2\,(u_1 - iv_1)$ auf reelle Functionen der beiden reellen Variabeln u_1, v_1 reducieren. Es muss daher sein

$$Z_1(z_1, w_1, i) + W_1(z_1, w_1, i) \equiv Z_1(w_1, z_1, -i) + W_1(w_1, z_1, -i) \text{ und}$$
$$-i\{Z_1(z_1, w_1, i) - W_1(z_1, w_1, i)\} \equiv i\{Z_1(w_1, z_1, -i) - W_1(w_1, z_1, -i)\} \text{ oder}$$
$$Z_1(z_1, w_1, i) \equiv W_1(w_1, z_1, -i),\ W_1(z_1, w_1, i) \equiv Z_1(w_1, z_1, -i).^{*)}$$

Damit also die Substitution II.[1] von einem reellen Bogenelemente wiederum auf ein solches oder von einem reellen Ausgangscoordinatensysteme z, w auf reeller Oberfläche wiederum auf ein reelles Coordinatensystem z_1, w_1 führe, ist notwendig und hinreichend, dass dieselbe im besonderen die Form annehme:

$$(II.^1)\ z = Z_1(z_1, w_1, i), w = Z_1(w_1, z_1, -i),$$

wo $Z_1(x, y)$ eine ganz willkürliche, auch beliebig imaginäre oder reelle Function ihrer beiden Argumente x und y bedeutet.

*) Für eine ganz willkürliche Function $Z_1(z_1, w_1)$ sind die beiden Functionen $Z_1(z_1, w_1, i)$ und $Z_1(w_1, z_1, -i)$ offenbar conjugiert-complexe Functionen der beiden reellen Variabeln u_1 und v_1.

Für das reelle Ausgangscoordinatensystem x, w war $\mathfrak{E}(x, w, i) \equiv \mathfrak{G}(w, x, i)$, $\mathfrak{G}(x, w, i) \equiv \mathfrak{E}(w, x, -i)$, $\mathfrak{F}(x, w, i) \equiv \mathfrak{F}(w, x, -i)$. Diese Functionen gehen durch die Substitution *(II.¹)* über in
$\mathfrak{E}(x, w, i) = \mathfrak{E}\{Z_1(x_1, w_1, i), Z_1(w_1, x_1, -i), i\} \equiv \mathfrak{A}_1(x_1, w_1, i) \equiv \mathfrak{G}\{Z_1(w_1, x_1, -i), Z_1(x_1, w_1, i), -i\}$,
$\mathfrak{G}(x, w, i) = \mathfrak{G}\{Z_1(x_1, w_1, i), Z_1(w_1, x_1, -i), i\} \equiv \mathfrak{C}_1(x_1, w_1, i) \equiv \mathfrak{E}\{Z_1(w_1, x_1, -i), Z_1(x_1, w_1, i), -i\}$,
$\mathfrak{F}(x, w, i) = \mathfrak{F}\{Z_1(x_1, w_1, i), Z_1(w_1, x_1, -i), i\} \equiv \mathfrak{B}_1(x_1, w_1, i) \equiv \mathfrak{F}\{Z_1(w_1, x_1, -i), Z_1(x_1, w_1, i), -i\}$.

Vertauscht man nun in $\mathfrak{A}_1(x_1, w_1, i)$ x_1 und w_1 einerseits mit einander und i mit $-i$ andererseits, so folgt $\mathfrak{A}_1(w_1, x_1, -i) \equiv \mathfrak{G}\{Z_1(x_1, w_1, i), Z_1(w_1, x_1, -i), i\} \equiv \mathfrak{C}_1(x_1, w_1, i)$, analog folgt $\mathfrak{C}_1(w_1, x_1, -i) \equiv \mathfrak{A}_1(x_1, w_1, i)$, $\mathfrak{B}_1(x_1, w_1, i) \equiv \mathfrak{B}_1(w_1, x_1, -i)$.

Schreibt man nun zur Abkürzung die Substitution *(II.¹)* in der Form: $x = Z_1(x_1, w_1, i) = Z_1(x_1, w_1) = Z_1$, $w = Z_1(w_1, x_1, -i) = \overline{Z}_1(x_1, w_1) = \overline{Z}_1$, so ist für den besonderen Fall reeller geometrischer Träger des Transformationsproblems in I^1. für W_1 $\overline{Z}_1$ zu setzen, wodurch sich das Bogenelement in der Form giebt:

$$(I.^1)\quad \begin{cases} ds^2 = \mathfrak{E}_1(x_1, w_1)\, dx_1^2 + 2\,\mathfrak{F}_1(x_1, w_1)\, dx_1 dw_1 + \mathfrak{G}_1(x_1, w_1)\, dw_1^2, \text{ wo} \\ \mathfrak{E}_1(x_1, w_1) \equiv \mathfrak{A}_1 \cdot \left(\dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1}\right)^2 + 2\,\mathfrak{B}_1 \cdot \dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial \overline{Z}_1}{\partial x_1} + \mathfrak{C}_1 \cdot \left(\dfrac{\partial \overline{Z}_1}{\partial x_1}\right)^2, \\ \mathfrak{F}_1(x_1, w_1) \equiv \mathfrak{A}_1 \cdot \dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial Z_1}{\partial w_1} + \mathfrak{B}_1 \cdot \left(\dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial \overline{Z}_1}{\partial w_1} + \dfrac{\partial Z_1}{\partial w_1}\dfrac{\partial \overline{Z}_1}{\partial x_1}\right) + \mathfrak{C}_1 \cdot \dfrac{\partial \overline{Z}_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial \overline{Z}_1}{\partial w_1}, \\ \mathfrak{G}_1(x_1, w_1) \equiv \mathfrak{A}_1 \cdot \left(\dfrac{\partial Z_1}{\partial w_1}\right)^2 + 2\,\mathfrak{B}_1 \cdot \dfrac{\partial Z_1}{\partial w_1}\dfrac{\partial \overline{Z}_1}{\partial w_1} + \mathfrak{C}_1 \cdot \left(\dfrac{\partial \overline{Z}_1}{\partial w_1}\right)^2 \text{ und} \\ \mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{E}(Z_1, \overline{Z}_1), \mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{F}(Z_1, \overline{Z}_1), \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{G}(Z_1, \overline{Z}_1) \text{ ist.} \end{cases}$$

Ebenso wie durch die Vertauschung von x_1 mit w_1 und ausserdem von i mit $-i$ die Function Z_1 übergeht in $\overline{Z}_1$, ebenso geht durch diese Vertauschungen $\dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1}$ über in $\dfrac{\partial \overline{Z}_1}{\partial w_1}$ und $\dfrac{\partial Z_1}{\partial w_1}$ in $\dfrac{\partial \overline{Z}_1}{\partial x_1}$; ausserdem aber geht durch diese Vertauschungen in der Form *(I.¹)* des Bogenelementes $\mathfrak{A}_1$ über in $\mathfrak{C}_1$ und umgekehrt und $\mathfrak{B}_1(x_1, w_1, i)$ in $\mathfrak{B}_1(w_1, x_1, -i)$, d. h. es geht über $\mathfrak{E}_1$ in $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_1$ in $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{F}_1(x_1, w_1, i)$ in $\mathfrak{F}_1(w_1, x_1, -i)$. Die Functionen $\mathfrak{E}_1(x_1, w_1)$, $\mathfrak{F}_1(x_1, w_1)$, $\mathfrak{G}_1(x_1, w_1)$ in *(I.¹)* genügen also den Bedingungen für die Realität der durch das Bogenelement definierten Oberfläche, bez. des Coordinatencurvensystems, das diesem Bogenelemente zu Grunde liegt, nämlich den Bedingungen D'.

2.

Masstransformation eines beliebigen Coordinatensystems x, w in allgemeinster Weise in sich.

Diese Aufgabe wird in reellen Coordinaten gelöst durch eine Substitution

$$2.^{\text{II}}\quad u = \Phi_2(u_2),\ v = \Psi_2(v_2),$$

wobei Φ_2 und Ψ_2 zwei willkürliche und von einander unabhängige Functionen je ihres einen Argumentes sind.

Für den Übergang zu conjugiert-complexen Variabeln ist es nur erforderlich, hierin für $u + iv$ $2x$, für $u - iv$ $2w$ und andererseits für u_2 $x_2 + w_2$, für v_2 $-i(x_2 - w_2)$ zu setzen. Ersetzt man schliesslich noch die Functionszeichen Φ und Ψ bez. durch R und S, so wird unser Transformationsproblem in conjugiert-complexen Variabeln gelöst durch die Substitution

$$II.^2 \begin{cases} z = Z_2(z_2, w_2) = R_2(z_2 + w_2) + S_2[-i(z_2 - w_2)] \\ w = W_2(z_2, w_2) = R_2(z_2 + w_2) - S_2[-i(z_2 - w_2)],^{*)} \end{cases}$$

wobei die Faktoren $^1/_2$ und $i/_2$ in die Allgemeinheit der Functionen R_2 und S_2 mit aufgenommen worden sind, oder von der Form *1.* des Bogenelementes ausgehend durch die Substitution $u = R_2(z_2 + w_2)$, $v = S_2[-i(z_2 - w_2)]$.

Zum Zwecke der Ableitung der Form, die das Bogenelement auf Grund der Substitution $II.^2$ gewinnt, mögen diese Relationen total differentiiert werden:

$$dz = R'_2\, dz_2 + R'_2\, dw_2 - iS'_2\, dz_2 + iS'_2\, dw_2 = (R'_2 - iS'_2)\, dz_2 + (R'_2 + iS'_2)\, dw_2,$$
$$dw = R'_2\, dz_2 + R'_2\, dw_2 + iS'_2\, dz_2 - iS'_2\, dw_2 = (R'_2 + iS'_2)\, dz_2 + (R_2' - iS'_2)\, dw_2.$$

Das Bogenelement *I.* geht daher durch die Substitution $II.^2$ über in

$$ds^2 = \mathfrak{E}(z, w)\, dz^2 + 2\mathfrak{F}(z, w)\, dz\, dw + \mathfrak{G}(z, w)\, dw^2 = \mathfrak{E}(R_2 + S_2, R_2 - S_2) \cdot \{(R'_2 - iS'_2)\, dz_2$$
$$+ (R_2 + iS'_2)\, dw_2\}^2 + 2\mathfrak{F}(R_2 + S_2, R_2 - S_2) \cdot \{(R'_2 - iS'_2)\, dz_2 + (R'_2 + iS'_2)\, dw_2\}$$
$$\cdot\{(R'_2 + iS'_2)\, dz_2 + (R'_2 - iS'_2) dw_2\} + \mathfrak{G}(R_2 + S_2, R_2 - S_2) \cdot \{(R'_2 + iS'_2)\, dz_2 + (R'_2 - iS'_2)\, dw_2\}^2$$
$$= \mathfrak{E} \cdot \{(R'_2 - iS'_2)^2 dz_2^2 + 2(R'^2_2 + S'^2_2)\, dz_2\, dw_2 + (R'_2 + iS'_2)^2\, dw_2^2\} + 2\mathfrak{F} \cdot \{(R'^2_2 + S'^2_2)\, dz_2^2$$
$$+ 2(R'^2_2 - S'^2_2)\, dz_2\, dw_2 + (R'^2_2 + S'^2_2)\, dw_2^2\} + \mathfrak{G} \cdot \{(R_2' + iS'_2)^2\, dz_2^2 + 2(R'^2_2 + S'^2_2)\, dz_2\, dw_2$$
$$+ (R'_2 - iS'_2)^2 dw_2^2\} = \{\mathfrak{E} \cdot (R'_2 - iS'_2)^2 + 2\mathfrak{F} \cdot (R'^2_2 + S'^2_2) + \mathfrak{G} \cdot (R'_2 + iS'_2)^2\} dz_2^2 + 2[(\mathfrak{E} + \mathfrak{G})$$
$$\cdot (R'^2_2 + S'^2_2) + 2\mathfrak{F} \cdot (R'^2_2 - S'^2_2)]\, dz_2\, dw_2 + \{\mathfrak{E} \cdot (R'_2 + iS'_2)^2 + 2\mathfrak{F} \cdot (R'^2_2 + S'^2_2) + \mathfrak{G} \cdot (R_2' - iS'_2)^2\} dw_2^2,$$

also

$$I.^2 \begin{cases} ds^2 = \mathfrak{E}_2(z_2, w_2)\, dz_2^2 + 2\mathfrak{F}_2(z_2, w_2)\, dz_2\, dw_2 + \mathfrak{G}_2(z_2, w_2)\, dw_2^2, \text{ wo} \\ \mathfrak{E}_2(z_2, w_2) = \mathfrak{A}_2 \cdot \{R'_2(z_2 + w_2) - iS'_2[-i(z_2 - w_2)]\}^2 + 2\mathfrak{B}_2 \cdot \{R'^2_2(z_2 + w_2) + S'^2_2[-i(z_2 - w_2)]\} \\ \qquad + \mathfrak{C}_2 \cdot \{R'_2(z_2 + w_2) + iS'_2[-i(z_2 - w_2)]\}^2, \\ \mathfrak{F}_2(z_2, w_2) = (\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{C}_2) \cdot \{R'^2_2(z_2 + w_2) + S'^2_2[-i(z_2 - w_2)]\} + 2\mathfrak{B}_2 \cdot \{R'^2_2(z_2 + w_2) \\ \qquad - S'^2_2[-i(z_2 - w_2)]\}, \\ \mathfrak{G}_2(z_2, w_2) = \mathfrak{A}_2 \cdot \{R'_2(z_2 + w_2) + iS'_2[-i(z_2 - w_2)]\}^2 + 2\mathfrak{B}_2 \cdot \{R'^2_2(z_2 + w_2) + S'^2_2[-i(z_2 - w_2)]\} \\ \qquad + \mathfrak{C}_2 \cdot \{R'_2(z_2 + w_2) - iS'_2[-i(z_2 - w_2)]\}^2 \text{ ist und hierin wiederum} \\ \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2(z_2, w_2) = \mathfrak{E}\{R_2(z_2 + w_2) + S_2[-i(z_2 - w_2)], R_2(z_2 + w_2) - S_2[-i(z_2 - w_2)]\}, \\ \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_2(z_2, w_2) = \mathfrak{F}\{R_2(z_2 + w_2) + S_2[-i(z_2 - w_2)], R_2(z_2 + w_2) - S_2[-i(z_2 - w_2)]\}, \\ \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_2(z_2, w_2) = \mathfrak{G}\{R_2(z_2 + w_2) + S_2[-i(z_2 - w_2)], R_2(z_2 + w_2) - S_2[-i(z_2 - w_2)]\}, \\ R_2'(z_2 + w_2) = \dfrac{d\, R_2(z_2 + w_2)}{d\,(z_2 + w_2)},\ S_2'[-i(z_2 - w_2)] = \dfrac{d\, S_2[-i(z_2 - w_2)]}{d\,[-i(z_2 - w_2)]}. \end{cases}$$

Damit nun das Transformationsproblem ein reelles sei, d. h. die vorgegebene Oberfläche, auf derselben das Ausgangscoordinatensystem z, w und das erzielte Coordinatensystem z_2, w_2, sowie endlich die Substitution $II.^2$, welche diese Transformation bewirkt, sämtlich reell seien, ist nach Formel D' und nach $(II.^1)$ erforderlich, dass gleichzeitig

$$\mathfrak{E}(z, w, i) \equiv \mathfrak{G}(w, z, -i),\ \mathfrak{G}(z, w, i) \equiv \mathfrak{E}(w, z, -i),\ \mathfrak{F}(z, w, i) \equiv \mathfrak{F}(w, z, -i),$$
$$\mathfrak{E}_2(z_2, w_2, i) \equiv \mathfrak{G}_2(w_2, z_2, -i),\ \mathfrak{G}_2(z_2, w_2, i) \equiv \mathfrak{E}_2(w_2, z_2, -i),\ \mathfrak{F}_2(z_2, w_2, i) \equiv \mathfrak{F}_2(w_2, z_2, -i) \text{ und}$$
$$R_2(z_2 + w_2, i) - S_2[-i(z_2 - w_2), i] \equiv R_2(z_2 + w_2, -i) + S_2[-i(z_2 + w_2), -i]$$

sei. Aus der letzten Bedingung geht zufolge der Unabhängigkeit der beiden Variabeln

*) Hiernach ist $\dfrac{\partial Z_2}{\partial z_2} = R'_2 - iS'_2$, $\dfrac{\partial Z_2}{\partial w_2} = R'_2 + iS'_2$, $\dfrac{\partial W_2}{\partial z_2} = R'_2 + iS'_2$, $\dfrac{\partial W_2}{\partial w_2} = R'_2 - iS'_2$. Es ist also die allgemeinste Masstransformation eines beliebigen Coordinatensystems bewirkt durch eine Substitution, die dem linearen homogenen partiellen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung genügt: $\dfrac{\partial Z_2}{\partial z_2} = \dfrac{\partial W_2}{\partial w_2}$, $\dfrac{\partial Z_2}{\partial w_2} = \dfrac{\partial W_2}{\partial z_2}$.

Zur Gewinnung der Substitution II^2 vergl. auch Teil II Abschnitt 1 zu Ende.

$x_2 + w_2$ und $x_2 - w_2$ von einander hervor, dass gleichzeitig $R_2(x_2 + w_2, -i) \equiv R_2(x_2 + w_2, i)$ und $S_2[-i(x_2 - w_2), -i] \equiv -S_2[-i(x_2 - w_2), i]$, d. h. dass $R_2(x)$ eine reelle Function, $S_2(y)$ eine mit dem Coefficienten i behaftete reelle Function je ihres einen Argumentes bez. x und y seien.

3.

Transformation eines beliebigen Coordinatensystems x, w in ein beliebiges orthogonales Coordinatensystem x_3, w_3.

Damit das Coordinatensystem x_3, w_3 ein orthogonales sei, ist erforderlich, das $\vartheta = 90^0$, mithin $\cos\vartheta = O$ oder nach Formel $C.'$ $\mathfrak{E}_3(x_3, w_2) \equiv \mathfrak{G}_3(x_3, w_3)$ sei.

Das vorliegende Transformationsproblem wird daher gelöst durch die Substitution $II.^3$ $x = Z_3(x_3, w_3), w = W_3(x_3, w_3)$, sofern die Substitutionsfunctionen $Z_3(x_3, w_3), W_3(x_3, w_3)$ hinsichtlich ihrer beiden von einander unabhängigen Variabeln x_3 und w_3 identisch der partiellen Differentialgleichung genügen:

$$III.^3 \quad \mathfrak{A}_3 \cdot \left\{\left(\frac{\partial Z_3}{\partial x_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\right)^2\right\} + 2\mathfrak{B}_3 \cdot \left(\frac{\partial Z_3}{\partial x_3}\frac{\partial W_3}{\partial x_3} - \frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3}\right) + \mathfrak{C}_3 \cdot \left\{\left(\frac{\partial W_3}{\partial x_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial W_3}{\partial w_3}\right)^2\right\} \equiv O, \text{ wobei}$$

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_3(x_3, w_3) = \mathfrak{E}\{Z_3(x_3, w_3), W_3(x_3, w_3)\}, \mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_3(x_3, w_3) = \mathfrak{F}\{Z_3(x_3, w_3), W_3(x_3, w_3)\},$$
$$\mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_3(x_3, w_3) = \mathfrak{G}\{Z_3(x_3, w_3), W_3(x_3, w_3)\} \quad \text{ist.}$$

Durch die Substitution $II.^3$ in Verbindung mit der Bedingung III^3 gewinnt das Bogenelement $I.$ die Form:

$$I.^3 \left\{\begin{aligned} & ds^2 = \mathfrak{E}_3(x_3, w_3) \cdot (dx_3^2 + dw_3^2) + 2\mathfrak{F}_3(x_3, w_3) \cdot dx_3\, dw_3, \quad \text{wo} \\ & \mathfrak{E}_3(x_3, w_3) = \mathfrak{A}_3 \cdot \left(\frac{\partial Z_3}{\partial x_3}\right)^2 + 2\mathfrak{B}_3 \cdot \frac{\partial Z_3}{\partial x_3}\frac{\partial W_3}{\partial x_3} + \mathfrak{C}_3 \cdot \left(\frac{\partial W_3}{\partial x_3}\right)^2 \equiv \mathfrak{A}_3 \cdot \left(\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\right)^2 + 2\mathfrak{B}_3 \cdot \frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3} + \mathfrak{C}_3 \cdot \left(\frac{dW_3}{\partial w_3}\right)^2, \\ & \mathfrak{F}_3(x_3, w_3) = \mathfrak{A}_3 \cdot \frac{\partial Z_3}{\partial x_3}\frac{\partial Z_3}{\partial w_3} + \mathfrak{B}_3 \cdot \left(\frac{\partial Z_3}{\partial x_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3} + \frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\frac{\partial W_3}{\partial x_3}\right) + \mathfrak{C}_3 \cdot \frac{\partial W_3}{\partial x_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3} \quad \text{ist.} \end{aligned}\right.$$

4.

Transformation eines beliebigen Coordinatensystems x, w in ein beliebiges rhombisches Coordinatensystem x_4, w_4.

Unter einem rhombischen Coordinatensysteme versteht man ein solches Coordinatensystem, für welches die beiden Scharen von Coordinatencurven die Oberfläche in lauter kleine Rhomben zerlegen, oder für welches, in reellen Variabeln u, v, die Bogendifferentiale ds_u und ds_v der von einem beliebigen Flächenpunkte u, v ausgehenden beiden Coordinatencurven für diesen Flächenpunkt gleiche Werte erhalten, sofern man nur den Incrementen der Variabeln, d. i. du und dv, gleiche Werte erteilt. Sobald also ein rhombisches Coordinatensystem vorliegt, muss für jeden Flächenpunkt u, v $E(u, v)\, du^2 = G(u, v)\, dv^2$ (vergl. Formeln $A.$) sein, sofern $dv = du$ wird, oder es muss $E(u, v) \equiv G(u, v)$ sein. Bei Überführung der Form $I.$ des Bogenelementes in conjugiert-complexen Variabeln x, w auf die Form $1.$ desselben in reellen Variabeln u, v haben aber (vergl. Formeln $E.$) diese Functionen $E(u, v)$ und $G(u, v)$ in conjugiert-complexen Variabeln x, w die Darstellung gewonnen

$E(u,v) = {}^1/_4 \{2\mathfrak{F}(z,w) + [\mathfrak{E}(z,w) + \mathfrak{G}(z,w)]\}$, $G(u,v) = {}^1/_4 \{2\mathfrak{F}(z,w) - [\mathfrak{E}(z,w) + \mathfrak{G}(z,w)]\}$.
Die Bedingung dafür, dass das erstrebte Coordinatensystem z_4, w_4 ein rhombisches werde, lautet somit $\mathfrak{E}_4(z_4,w_4) + \mathfrak{G}_4(z_4,w_4) \equiv 0$ oder $\mathfrak{E}_4(z_4,w_4) \equiv -\mathfrak{G}_4(z_4,w_4)$.

Die Transformation des beliebigen Ausgangscoordinatensystems z, w in ein rhombisches Coordinatensystem z_4, w_4 wird nun bewirkt durch eine Substitution

$$II.^4 \quad z = Z_4(z_4,w_4),\ w = W_4(z_4,w_4),$$

in welcher die Functionen $Z_4(z_4,w_4)$ und $W_4(z_4,w_4)$ so zu wählen sind, dass sie hinsichtlich ihrer beiden Variabeln z_4 und w_4 identisch jener Bedingung genügen: $\mathfrak{E}_4(z_4,w_4) \equiv -\mathfrak{G}_4(z_4,w_4)$. Es gilt nun zunächst, die Functionen $\mathfrak{E}_4(z_4,w_4)$ und $\mathfrak{G}_4(z_4,w_4)$ für ein in keiner Weise beschränktes neues Coordinatensystem z_4, w_4 zu gewinnen, um sie alsdann jener Bedingung zu unterwerfen. Diese Aufgabe ist aber durch das Transformationsproblem *1.* gelöst worden, sodass (vergl. pag. 7 I^1) nach erfolgter Indexabänderung

$$\mathfrak{E}_4(z_4,w_4) = \mathfrak{A}_4 \cdot \left(\frac{\partial Z_4}{\partial z_4}\right)^2 + 2\mathfrak{B}_4 \cdot \frac{\partial Z_4}{\partial z_4}\frac{\partial W_4}{\partial z_4} + \mathfrak{C}_4 \cdot \left(\frac{\partial W_4}{\partial z_4}\right)^2,$$

$$\mathfrak{G}_4(z_4,w_4) = \mathfrak{A}_4 \cdot \left(\frac{\partial Z_4}{\partial w_4}\right)^2 + 2\mathfrak{B}_4 \cdot \frac{\partial Z_4}{\partial w_4}\frac{\partial W_4}{\partial w_4} + \mathfrak{C}_4 \cdot \left(\frac{\partial W_4}{\partial w_4}\right)^2 \text{ und hierin}$$

$\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}_4(z_4,w_4) = \mathfrak{E}\{Z_4(z_4,w_4), W_4(z_4,w_4)\}$, $\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_4(z_4,w_4) = \mathfrak{F}\{Z_4(z_4,w_4), W_4(z_4,w_4)\}$,
$\mathfrak{C}_4 = \mathfrak{C}_4(z_4,w_4) = \mathfrak{G}\{Z_4(z_4,w_4), W_4(z,w_4)\}$ ist.

Die Substitutionsfunctionen $Z_4(z_4,w_4), W_4(z_4,w_4)$ sind somit der Bedingung unterworfen, dass

$$III.^4 \quad \mathfrak{A}_4 \cdot \left\{\left(\frac{\partial Z_4}{\partial z_4}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_4}{\partial w_4}\right)^2\right\} + 2\mathfrak{B}_4 \cdot \left(\frac{\partial Z_4}{\partial z_4}\frac{\partial W_4}{\partial z_4} + \frac{\partial Z_4}{\partial w_4}\frac{\partial W_4}{\partial w_4}\right) + \mathfrak{C}_4 \cdot \left\{\left(\frac{\partial W_4}{\partial z_4}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_4}{\partial w_4}\right)^2\right\} \equiv 0 \text{ wird.}$$

Das Bogenelement erhält alsdann die Form:

$$I.^4 \quad \begin{cases} ds^2 = \mathfrak{E}_4(z_4,w_4)\cdot(dz_4^2 - dw_4^2) + 2\mathfrak{F}_4(z_4,w_4)\, dz_4\, dw_4, \text{ wo} \\ \mathfrak{E}_4(z_4,w_4) = \mathfrak{A}_4 \cdot \left(\frac{\partial Z_4}{\partial z_4}\right)^2 + 2\mathfrak{B}_4 \cdot \frac{\partial Z_4}{\partial z_4}\frac{\partial W_4}{\partial z_4} + \mathfrak{C}_4 \cdot \left(\frac{\partial W_4}{\partial z_4}\right)^2 \equiv -\mathfrak{A}_4 \cdot \left(\frac{\partial Z_4}{\partial w_4}\right)^2 - 2\mathfrak{B}_4 \cdot \frac{\partial Z_4}{\partial w_4}\frac{\partial W_4}{\partial w_4} - \mathfrak{C}_4 \cdot \left(\frac{\partial W_4}{\partial w_4}\right)^2, \\ \mathfrak{F}_4(z_4,w_4) = \mathfrak{A}_4 \cdot \frac{\partial Z_4}{\partial z_4}\frac{\partial Z_4}{\partial w_4} + \mathfrak{B}_4 \cdot \left(\frac{\partial Z_4}{\partial z_4}\frac{\partial W_4}{\partial w_4} + \frac{\partial Z_4}{\partial w_4}\frac{\partial W_4}{\partial z_4}\right) + \mathfrak{C}_4 \cdot \frac{\partial W_4}{\partial z_4}\frac{\partial W_4}{\partial w_4} \end{cases}$$

ist und $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{B}_4, \mathfrak{C}_4$ die oben angegebene Bedeutung besitzen, während $Z_4(z_4,w_4)$ und $W_4(z_4,w_4)$ der Bedingung $III.^4$ entsprechende, sonst aber willkürliche Functionen sind.

5.

Transformation eines beliebigen Coordinatensystems z, w bez. eines beliebigen orthogonalen Coordinatensystems z_3, w_3 in ein beliebiges isometrisches Coordinatensystem z_5, w_5.

Damit das durch eine Substitution $II.^5$ $z = Z_5(z_5,w_5)$, $w = W_5(z_5,w_5)$ erzielte Coordinatensystem z_5, w_5 ein isometrisches sei, d. h. die Coordinatencurven $z_5 + w_5 =$ const. und $z_5 - w_5 =$ const. die Oberfläche in lauter kleine Quadrate zerlegen, — wiederum wie beim rhombischen Coordinatensystem unter der Voraussetzung $dv = du$ oder, was dasselbe ist, $dw = -i\,dz$ —, ist für dieses Coordinatensystem die Bedingung des orthogonalen (vergl. Problem 3), d. i. $\mathfrak{E}_5(z_5,w_5) \equiv \mathfrak{G}_5(z_5,w_5)$, mit der des rhombischen Coordinatensystems (vergl. Problem 4), d. i. $\mathfrak{E}_5(z_5,w_5) \equiv -\mathfrak{G}_5(z_5,w_5)$ zu verbinden, sodass das isometrische Coordinatensystem z_5, w_5 definiert ist durch die Forderung $\mathfrak{E}_5(z_5,w_5) \equiv 0$, $\mathfrak{G}_5(z_5,w_5) \equiv 0$.

Es sind also die Substitutionsfunctionen $Z_5\,(x_5, w_5)$, $W_5\,(x_5, w_5)$ den beiden simultanen partiellen Differentialgleichungen zu unterwerfen

$$III.^5 \quad \mathfrak{A}_5 \cdot \left(\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\right)^2 + 2\mathfrak{B}_5 \cdot \frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\frac{\partial W_5}{\partial x_5} + \mathfrak{C}_5 \cdot \left(\frac{\partial W_5}{\partial x_5}\right)^2 \equiv O, \quad \mathfrak{A}_5 \cdot \left(\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\right)^2 + 2\mathfrak{B}_5 \cdot \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} + \mathfrak{C}_5 \cdot \left(\frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right)^2 \equiv O,^{*)}$$

wobei $\mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_5(x_5, w_5) = \mathfrak{E}\{Z_5(x_5, w_5), W_5(x_5, w_5)\}$, $\mathfrak{B}_5 = \mathfrak{B}_5(x_5, w_5) = \mathfrak{F}\{Z_5(x_5, w_5), W_5(x_5, w_5)\}$,

$\mathfrak{C}_5 = \mathfrak{C}_5(x_5, w_5) = \mathfrak{G}\{Z_5(x_5, w_5), W_5(x_5, w_5)\}$

ist. Die hieraus resultierende Form des Bogenelementes lautet

$$I.^5 \begin{cases} ds^2 = 2\mathfrak{F}_5\,(x_5, w_5)\,dx_5\,dw_5, \text{ wofür} \\ \mathfrak{F}_5\,(x_5, w_5) = \mathfrak{A}_5 \cdot \dfrac{\partial Z_5}{\partial x_5}\dfrac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \mathfrak{B}_5 \cdot \left(\dfrac{\partial Z_5}{\partial x_5}\dfrac{\partial W_5}{\partial w_5} + \dfrac{\partial Z_5}{\partial w_5}\dfrac{\partial W_5}{\partial x_5}\right) + \mathfrak{C}_5 \cdot \dfrac{\partial W_5}{\partial x_5}\dfrac{\partial W_5}{\partial w_5} \end{cases}$$

ist, während $\mathfrak{A}_5, \mathfrak{B}_5, \mathfrak{C}_5$ die soeben dargelegte Bedeutung besitzen und die Functionen $Z_5(x_5, w_5)$, $W_5\,(x_5\,w_5)$ beliebige dem Differentialgleichungssystem $III.^5$ genügende Functionen sind.

Im folgenden soll nun der besonders wichtige Fall seine Erledigung finden, dass das Ausgangscoordinatensystem für Gewinnung des isometrischen Coordinatensystems x_5, w_5 insbesondere ein orthogonales sei, d. h. dass $\mathfrak{E}_3\,(x_3, w_3) \equiv \mathfrak{G}_3\,(x_3, w_3)$ sei. Die beiden simultanen Differentialgleichungen $III.^5$, denen die allgemeinen Substitutionsfunctionen $Z_5\,(x_5, w_5)$, $W_5\,(x_5, w_5)$, falls $II.^{5'}$ $x_3 = Z_5(x_5, w_5)$, $w_3 = W_5(x_5, w_5)$ diese Substitution ist, genügen müssen, ziehen sich, da in denselben $\mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_5\,(x_5, w_5) = \mathfrak{E}_3\,\{Z_5\,(x_5, w_5), W\,(x_5, w_5)\} \equiv \mathfrak{G}_3\,\{Z_5\,(x_5, w_5), W_5\,(x_5, w_5)\}$ $\equiv \mathfrak{C}_5\,(x_5, w_5) = \mathfrak{C}_5$ ist, zusammen in

$$III._5' \quad \mathfrak{A}_5 \cdot \left\{\left(\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_5}{\partial x_5}\right)^2\right\} + 2\mathfrak{B}_5 \cdot \frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\frac{\partial W_5}{\partial x_5} \equiv O, \quad \mathfrak{A}_5 \cdot \left\{\left(\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right)\right\}^2 + 2\mathfrak{B}_5 \cdot \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} \equiv O,$$

wobei $\mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_5\,(x_5, w_5) = \mathfrak{E}_3\,\{Z_5(x_5, w_5), W_5\,(x_5, w_5)\} \equiv \mathfrak{G}_3\,\{Z_5\,(x_5, w_5), W_5\,(x_5, w_5)\}$,

$\mathfrak{B}_5 = \mathfrak{B}_5\,(x_5, w_5) = \mathfrak{F}_3\,\{Z_5\,(x_5, w_5), W_5\,(x_5, w_5)\}$ ist.

Diese beiden Differentialgleichungen lassen sich einzeln leicht auf lineare Form bringen. Nach der ersten Gleichung III$^{5'}$ ist $\mathfrak{A}_5 \cdot \left\{\left(\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_5}{\partial x_5}\right)^2\right\} \equiv -\,2\mathfrak{B}_5 \cdot \frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\frac{\partial W_5}{\partial x_5}$; addiert man auf beiden Seiten die Grösse $\pm\,2\mathfrak{A}_5 \cdot \frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\frac{\partial W_5}{\partial x_5}$, so folgt

$$\mathfrak{A}_5 \cdot \left(\frac{\partial Z_5}{\partial x_5} + \frac{\partial W_5}{\partial x_5}\right)^2 \equiv +\,2(\mathfrak{A}_5 - \mathfrak{B}_5) \cdot \frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\frac{\partial W_5}{\partial x_5}, \quad \mathfrak{A}_5 \cdot \left(\frac{\partial Z_5}{\partial x_5} - \frac{\partial W_5}{\partial x_5}\right)^2 \equiv -\,2(\mathfrak{A}_5 + \mathfrak{B}_5)\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\frac{\partial W_5}{\partial x_5}.$$

Es fragt sich zunächst, kann in der ursprünglichen, mithin auch in dieser noch quadratischen Form der Differentialgleichungen einer der partiellen Differentialquotienten identisch verschwinden? Wäre dies der Fall, so müsste nach diesen Differentialgleichungen auch der Differentialquotient der bez. andern Function nach derselben Variabeln gleichzeitig verschwinden, d. h. beide Substitutionsfunctionen Z_5 und W_5 wären Functionen von je nur einer und zwar ein und derselben Variabeln, ein Vorkommnis, das dem Sinne eines Transformationsproblemes zuwiderläuft, oder es wäre nach $III.^{5'}$ gleichzeitig $\mathfrak{A}_5 \equiv O$ und $\mathfrak{B}_5 \equiv O$, was ebenfalls nach der Bedeutung von $\mathfrak{A}_5$ und $\mathfrak{B}_5$ abzuweisen ist. Dass eine Substitution $x_3 = Z_5(x_5), w_3 = W_5(x_5)$ oder $x_3 = Z_5(w_5), w_3 = W_5(w_5)$ dem Sinne eines Transformationsproblemes zuwiderläuft, lässt sich daraus erkennen, dass durch Elimination der gemeinschaftlichen einen Variabeln beider Functionen Z_5 und W_5 aus dieser Substitution eine Relation $w_3 = F(x_3)$ hervorgeht, die ihrerseit keineswegs eine Transformation des Coordinatensystems x_3, w_3 auf der vorgelegten Oberfläche in ein neues Coordinatensystem

*) Reduction dieses Gleichungssystems auf lineare Form s. Teil II Abschnitt 3.

z_5, w_5 definiert, sondern vielmehr auf dieser Oberfläche den Verlauf einer Curve, bezogen auf das ursprüngliche Coordinatensystem z_3, w_3, festlegt, oder daraus, dass die beiden Relationen obiger Substitution nicht nach z_5 und w_5 einzeln auflösbar sind, sodass es nicht möglich ist, für einen beliebigen Flächenpunkt z_3, w_3 die neuen Coordinatenwerte anzugeben, offenbar die Fundamentalforderung für jedwede Coordinatentransformation.

Unter dementsprechenden Ausschlusse des Falles, dass einer der partiellen Differentialquotienten der beiden Substitutionsfunctionen identisch verschwindet, lassen sich die beiden letzten Gleichungen durch einander dividieren, und auf beiden Seiten der Gleichung lässt sich alsdann die Wurzel ziehen, wobei ein unbestimmter Vorzeichencoefficient ε_1 auftritt, sodass man erhält

$$\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5}\left(\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} + \frac{\partial W_5}{\partial z_5}\right) \equiv \varepsilon_1 \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\left(\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} - \frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right).$$

Analog ergiebt sich aus der zweiten Differentialgleichung *III.*$^{5'}$ die folgende lineare Differentialgleichung, welche ebenfalls einen, und zwar zunächst von ε_1 unabhängigen Vorzeichencoefficienten ε_2 enthält:

$$\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5}\left(\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right) \equiv \varepsilon_2 \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\left(\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} - \frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right).$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich einzeln zusammenziehen in

$$\left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} - \varepsilon_1 \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right)\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} + \left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} + \varepsilon_1 \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right)\frac{\partial W_5}{\partial z_5} \equiv O,$$

$$\left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} - \varepsilon_2 \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right)\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} + \varepsilon_2 \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right)\frac{\partial W_5}{\partial w_5} \equiv O.$$

Je nachdem nun angenommen wird, dass $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ $(= \varepsilon)$ oder dass $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ sei, ergeben sich für die Weiterbehandlung des Problemes zwei verschiedene Fälle, die getrennter Untersuchung bedürfen.

Wir behandeln zunächst die Annahme $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Multipliziert man unter dieser Voraussetzung die erste Gleichung mit dz_5, die zweite mit dw_5, und addiert alsdann beide Gleichungen, so erhält man:

$$\left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} - \varepsilon \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right)\left(\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} dz_5 + \frac{\partial Z_5}{\partial w_5} dw_5\right)$$

$$+ \left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} + \varepsilon \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right)\left(\frac{\partial W_5}{\partial z_5} dz_5 + \frac{\partial W_5}{\partial w_5} dw_5\right) \equiv O, \text{ oder}$$

$$\left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} - \varepsilon \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right) dZ_5 + \left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} + \varepsilon \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right) dW_5 \equiv O.$$

In dieser Relation sind $\mathfrak{B}_5$ und $\mathfrak{A}_5$ Functionen von Z_5 und W_5, nicht überdies auch noch von z_5 und w_5, es stellt also diese Gleichung eine Beziehung zwischen diesen beiden Functionen Z_5 und W_5 selbst her, deren Integral sich in die Form $W_5 = W_5(Z_5)$ bringen lässt. Alsdann lautet aber die Substitution *II.*$^{5'}$ $z_3 = Z_5, w_3 = W_5(Z_5)$. Aus diesen beiden Gleichungen lässt sich aber Z_5 eliminieren, wodurch sich eine Gleichung $w_3 = W_5(z_3)$ einstellt, die, wie wir nachgewiesen haben, die Bedeutung der Substitution *II.*$^{5'}$ als Vermittlerin einer Coordinatentransformation zerstören würde. Es ist mithin die Annahme $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ auszuschliessen, und es muss sein $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ oder $\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = -\varepsilon$.

Für $\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = -\varepsilon$ erhalten die beiden Differentialgleichungen die Form:

$$\left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} - \varepsilon \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right)\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} + \left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} + \varepsilon \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right)\frac{\partial W_5}{\partial z_5} \equiv O,$$

$$\left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} - \varepsilon \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right)\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \left(\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} - \varepsilon \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}\right)\frac{\partial W_5}{\partial w_5} \equiv O,$$

wobei beliebig entweder $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ genommen werden kann. Nimmt man einmal $\varepsilon = +1$ an, das andere mal $\varepsilon = -1$, so gehen die hierdurch dargestellten beiden Systeme von Differentialgleichungen identisch in einander über, sobald man in einem derselben die Variabeln x_5 und w_5 unter einander vertauscht. Diese Vertauschung der Variabeln x_5 und w_5 mit einander ist aber nichts anderes als eine andere Fixierung der von vorn herein vollständig willkürlichen Bezeichnungsweise für die neuen Coordinaten, d. h. beide Gleichungssysteme sind, abgesehen von der willkürlichen Bezeichnungsweise dieser Variabeln, an sich identisch, und es ist ohne Einschränkung der Allgemeinheit des Problems und der Untersuchung gestattet, ε als $+1$ festzusetzen.

Die in Verbindung mit der Substitution $II.^{5'}$ das Transformationsproblem definierenden Differentialgleichungen erhalten somit die endgiltige Form:

$$III_a'^5 \begin{cases} (\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} - \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}) \dfrac{\partial Z_5}{\partial x_5} + (\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} + \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}) \dfrac{\partial W_5}{\partial x_5} = O, \\ (\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} + \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}) \dfrac{\partial Z_5}{\partial w_5} + (\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} - \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}) \dfrac{\partial W_5}{\partial w_5} = O, \text{ wo} \end{cases}$$

$\mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_5 (x_5, w_5) \equiv \mathfrak{E}_3 \{Z_5 (x_5, w_5), W_5 (x_5, w_5)\}$, $\mathfrak{B}_5 = \mathfrak{B}_5 (x_5, w_5) \equiv \mathfrak{F}_3 \{Z_5 (x_5, w_5), W_5 (x_5, w_5)\}$ ist, oder die dieser äquivalente Form:

$$III_b'^5 \begin{cases} \dfrac{\partial Z_5}{\partial x_5} \equiv l (x_5, w_5) \dfrac{\partial W_5}{\partial x_5}, \dfrac{\partial Z_5}{\partial w_5} \equiv \dfrac{1}{l (x_5, w_5)} \dfrac{\partial W_5}{\partial w_5}, \text{ wo} \\ l (x_5, w_5) \equiv \dfrac{\sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5} + \sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5}}{\sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5} - \sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5}} \equiv -\dfrac{\mathfrak{B}_5}{\mathfrak{A}_5} - \sqrt{\left(\dfrac{\mathfrak{B}_5}{\mathfrak{A}_5}\right)^2 - 1} \text{ ist.} \end{cases}$$

In dem Systeme $III.^{5'}$, $III_a^{5'}$ und $III_b^{5'}$ ist, wie schon erörtert, der Fall von vorn herein ausgeschlossen, dass irgend einer der vier partiellen Differentialquotienten $\dfrac{\partial Z_5}{\partial x_5}, \dfrac{\partial Z_5}{\partial w_5}, \dfrac{\partial W_5}{\partial x_5}, \dfrac{\partial W_5}{\partial w_5}$ identisch Null sei. Damit aber die beiden Differentialgleichungen $III_a^{5'}$ bez. $III_b^{5'}$ gleichzeitig bestehen können, muss zwischen diesen vier partiellen Differentialquotienten, wie sich durch Multiplikation der beiden Gleichungen $III_b^{5'}$ mit einander ergiebt, die Identität bestehen

$$\frac{\partial Z_5}{\partial x_5} \frac{\partial Z_5}{\partial w_5} - \frac{\partial W_5}{\partial x_5} \frac{\partial W_5}{\partial w_5} \equiv O,$$

sodass das Transformationsproblem in vollständiger Weise auch definiert wird durch das System

$$III_c'^5 \begin{cases} \dfrac{\partial Z_5}{\partial x_5} \dfrac{\partial Z_5}{\partial w_5} - \dfrac{\partial W_5}{\partial x_5} \dfrac{\partial W_5}{\partial w_5} \equiv O, \\ (\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} - \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}) \dfrac{\partial Z_5}{\partial x_5} + (\sqrt{\mathfrak{B}_5 + \mathfrak{A}_5} + \sqrt{\mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_5}) \dfrac{\partial W_5}{\partial x_5} = O. \end{cases}$$

Die partielle Differentialgleichung $\dfrac{\partial Z_5}{\partial x_5} \dfrac{\partial Z_5}{\partial w_5} \equiv \dfrac{\partial W_5}{\partial x_5} \dfrac{\partial W_5}{\partial w_5}$, welche die Substitutionsfunctionen $Z_5 (x_5, w_5)$, $W_5 (x_5, w_5)$ unabhängig von den gegebenen Functionen $\mathfrak{E}_3 (x_3, w_3)$ und $\mathfrak{F}_3 (x_3, w_3)$, also in irgend welcher charakteristischen Struktureigenschaft oder Abhängigkeit von einander hinsichtlich ihrer beiden Variabeln festlegt, kann nun weder befriedigt werden durch die besondere Annahme $\dfrac{\partial Z_5}{\partial x_5} \equiv \dfrac{\partial W_5}{\partial x_5}, \dfrac{\partial Z_5}{\partial w_5} \equiv \dfrac{\partial W_5}{\partial w_5}$ noch durch die besondere Annahme $\dfrac{\partial Z_5}{\partial x_5} \equiv \dfrac{\partial W_5}{\partial w_5}, \dfrac{\partial Z_5}{\partial w_5} \equiv \dfrac{\partial W_5}{\partial x_5}$, ohne dass damit unserem eigentlichen Transformationsprobleme widersprochen würde. Aus der ersteren Annahme geht, indem man die erste Gleichung mit dx_5, die zweite mit dw_5 multipliziert und dann beide Gleichungen addiert, hervor $dZ_5 \equiv dW_5$, d. h. das einfache functionale Ver-

hältnis zwischen Z_5 und W_5: $W_5 \equiv Z_5 +$ const., was aber aus mehrfach angegebenem Grunde auszuschliessen ist. Die zweite besondere Annahme aber definiert eine blosse Masstransformation des Ausgangscoordinatensystems z_3, w_3 in sich, ein Fall, der hier gleichfalls ausgeschlossen sein soll und in einem späteren Probleme seine Erledigung finden wird (vergl. pag. 9 Bemerkung sub *).

Für das aus einem orthogonalen Ausgangscoordinatensysteme z_3, w_3 duch die Substitution $II.'^5$ gewonnene isometrische Coordinatensystem z_5, w_5, wobei die Substitutionsfunctionen $Z_5(z_5, w_5)$, $W_5(z_5, w_5)$ den Bedingungen $III_a{}^{5'}$ oder $III_b{}^{5'}$ oder $III_c{}^{5'}$ unterworfen sind, nimmt die eine Function $\mathfrak{F}_5(z_5, w_5)$, die jetzt sowohl die Oberfläche als auch das auf ihr liegende Coordinatensystem z_5, w_5 vollständig definiert, die Form an:

$$\mathfrak{F}_5(z_5, w_5) = \mathfrak{A}_5 \cdot \left(\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \frac{\partial W_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right) + \mathfrak{B}_5 \cdot \left(\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} + \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\right),$$

d. i. zunächst nach der ersten Gleichung $III_c{}'^5$

$$\mathfrak{F}_5(z_5, w_5) = 2\mathfrak{A}_5 \cdot \frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \mathfrak{B}_5 \cdot \left(\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} + \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\right)$$ und nach den Gleichungen $III_b{}'^5$

$$\mathfrak{F}_5(z_5, w_5) = 2\mathfrak{A}_5 \cdot \frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \mathfrak{B}_5 \cdot \left(l\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \frac{1}{l}\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\right) = 2\mathfrak{A}_5 \cdot \frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \mathfrak{B}_5 \cdot \frac{l^2+1}{l}\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}$$

$$= \left(2\mathfrak{A}_5 - 2\mathfrak{B}_5 \cdot \frac{\mathfrak{B}_5}{\mathfrak{A}_5}\right)\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} = 2\,\frac{\mathfrak{A}_5{}^2 - \mathfrak{B}_5{}^2}{\mathfrak{A}_5}\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}.$$

Es erhält somit das Bogenelement die Form:

$$I.^{5'} \quad ds^2 = 4\,\frac{\mathfrak{A}_5{}^2 - \mathfrak{B}_5{}^2}{\mathfrak{A}_5} \cdot \frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\,dz_5\,dw_5 = 4\,\frac{\mathfrak{A}_5{}^2 - \mathfrak{B}_5{}^2}{\mathfrak{A}_5}\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5}\,dz_5\,dw_5,$$ wobei

$\mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_5(z_5, w_5) = \mathfrak{E}_3\{Z_5(z_5, w_5), W_5(z_5, w_5)\}$, $\mathfrak{B}_5 = \mathfrak{B}_5(z_5, w_5) = \mathfrak{F}_3(Z_5(z_5, w_5), W_5(z_5, w_5)\}$ ist und $Z_5(z_5, w_5)$, $W_5(z_5, w_5)$ den Bedingungen $III_a{}^{5'}$ oder $III_b{}^{5'}$ oder $III_c{}^{5'}$ genügende Functionen sind.

6.

Masstransformation eines orthogonalen Coordinatensystems z_3, w_3 in sich in ein isometrisches Coordinatensystem z_6, w_6.

Als Specialfall der Probleme 2. und 5. wird dieses Transformationsproblem durch eine Substitution von der Form $II.^2$ gelöst, d. i. durch eine Substitution

$$II._6 \begin{cases} z_3 = Z_6(z_6, w_6) = R_6(z_6 + w_6) + S_6[-i(z_6 - w_6)], \\ w_3 = W_6(z_6, w_6) = R_6(z_6 + w_6) - S_6[-i(z_6 + w_6)], \end{cases}$$

in welcher die Functionen $R_6(z_6 + w_6)$ und $S_6[-i(z_6 - w_6)]$ der Bedingung $III_c{}^{5'}$ unterworfen sind, d. i. nach $\frac{\partial Z_6}{\partial z_6} = R_6'(z_6 + w_6) - i\,S_6'[-i(z_6 - {}_6)]$, $\frac{\partial W_6}{\partial z_6} = R_6'(z_6 + w_6) + S_6[-i(z_6 - w_6)]$:

$$(\sqrt{\mathfrak{B}_6 + \mathfrak{A}_6} - \sqrt{\mathfrak{B}_6 - \mathfrak{A}_6}) \cdot \{R'_6(z_6 + w_6) - i\,S'_6[-i(z_6 - w_6)]\}$$
$$+ (\sqrt{\mathfrak{B}_6 + \mathfrak{A}_6} + \sqrt{\mathfrak{B}_6 - \mathfrak{A}_6}) \cdot \{R'_6(z_6 + w_6) + i\,S'_6[-i(z_6 - w_6)]\} \equiv 0,$$

wobei $\mathfrak{B}_6$ und $\mathfrak{A}_6$ den Functionen $\mathfrak{B}_5$ und $\mathfrak{A}_5$ (vergl. pag. 14) analoge Bedeutung besitzen; die erste Gleichung $III_c{}^{5'}$ aber wird identisch erfüllt durch irgend welche Functionen $Z_6(z_6, w_6)$, $W_6(z_6, w_6)$ der oben angegebenen Form, wie aus den Relationen $\frac{\partial Z_6}{\partial z_6} = \frac{\partial W_6}{\partial w_6}$, $\frac{\partial Z_6}{\partial w_6} = \frac{\partial W_6}{\partial z_6}$ hervorgeht. Die obige Bedingungsgleichung für die Functionen $R_6(z_6 + w_6)$ und $S_6[-i(z_6 - w_6)]$ reduciert sich nun auf $\sqrt{\mathfrak{B}_6 + \mathfrak{A}_6} \cdot R'_6(z_6 + w_6) + i\sqrt{\mathfrak{B}_6 - \mathfrak{A}_6}\; S'_6[-i(z_6 - w_6)] \equiv 0$ oder

$$\frac{\mathfrak{B}_6+\mathfrak{A}_6}{\mathfrak{B}_6-\mathfrak{A}_6}=-\frac{S'^2_6[-i(z_6-w_6)]}{R'^2_6(z_6+w_6)} \text{ oder } \frac{\mathfrak{B}_6}{\mathfrak{A}_6}=\frac{S'^2_6[-i(z_6-w_6)]-R'^2_6(z_6+w_6)}{S'^2_6[-i(z_6-w_6)]+R'^2_6(z_6+w_6)}.$$

Bezeichnen wir kurz $S'^2_6[-i(z_6-w_6)]=H(z_6-w_6)$, $R'^2_6(z_6+w_6)=-K(z_6+w_6)$, so ist

$$\frac{\mathfrak{B}_6}{\mathfrak{A}_6}=\frac{\mathfrak{F}_3\{Z_6(z_6,w_6),W_6(z_6,w_6)\}}{\mathfrak{E}_3\{Z_6(z_6,w_6),W_6(z_6,w_6)\}}=\frac{H(z_6-w_6)+K(z_6+w_6)}{H(z_6-w_6)-K(z_6+w_6)}.$$

Hieraus ergiebt sich für die Ausgangsfunctionen $\mathfrak{F}_3\{Z_6(z_6,w_6),W_6(z_6,w_6)\}$, $\mathfrak{E}_3\{Z_6(z_6,w_6),W_6(z_6,w_6)\}$, dass

$$\mathfrak{F}_3\{Z_6(z_6,w_6),W_6(z_6,w_6)\}\equiv\{H(z_6-w_6)+K(z_6+w_6)\}\cdot J(z_6,w_6),$$
$$\mathfrak{E}_3\{Z_6(z_6,w_6),W_6(z_6,w_6)\}\equiv\{H(z_6-w_6)-K(z_6+w_6)\}\cdot J(z_6,w_6)$$

sein muss. Es war nun $z_3=R_6(z_6+w_6)+S_6[-i(z_6-w_6)]$, $w_3=R_6(z_6+w_6)-S_6[-i(z_6-w_6)]$, sodass $z_3+w_3=2R_6(z_6+w_6)$, $z_3-w_3=2S_6[-i(z_6-w_6)]$ und durch Umkehrung dieser Functionen: $z_6+w_6=P(z_3+w_3)$, $z_6-w_6=Q(z_3-w_3)$, also

$$z_6={}^1/_2\{P(z_3+w_3)+Q(z_3-w_3)\},\ w_6={}^1/_2\{P(z_3+w_3)-Q(z_3-w_3)\} \text{ ist.}$$

Substituiert man nun in die Relationen

$$\mathfrak{F}_3\{Z_6(z_6,w_6),W_6(z_6,w_6)\}\equiv\{H(z_6-w_6)+K(z_6+w_6)\}J(z_6,w_6),$$
$$\mathfrak{E}_3\{Z_6(z_6,w_6),W_6(z_6,w_6)\}\equiv\{H(z_6-w_6)-K(z_6+w_6)\}J(z_6,w_6)$$

für z_3, w_6 die ursprünglichen Coordinatenvariabeln z_3, w_3 nach den eben entwickelten Darstellungen $z_6+w_6=P(z_3+w_3)$, $z_6-w_6=Q(z_3-w_3)$ und nach $Z_6(z_6,w_6)=z_3$, $W_6(z_6,w_6)=w_3$, und schreibt man kurz $H[Q(z_3-w_3)]=H_3(z_3-w_3)$, $K[P(z_3+w_3)]=K_3(z_3+w_3)$,

$$J\{{}^1/_2[P(z_3+w_3)+Q(z_3-w_3)],\ {}^1/_2[P(z_3+w_3)-Q(z_3-w_3)]\}=J_3(z_3,w_3),$$

so ergeben obige Relationen für die Ausgangsfunctionen $\mathfrak{F}_3(z_3,w_3)$, $\mathfrak{E}_3(z_3,w_3)$ die Darstellung

$$IV.^6\quad\begin{cases}\mathfrak{F}_3(z_3,w_3)=\{H_3(z_3-w_3)+K_3(z_3+w_3)\}\cdot J_3(z_3,w_3),\\ \mathfrak{E}_3(z_3,w_3)=\{H_3(z_3-w_3)-K_3(z_3+w_3)\}\cdot J_3(z_3,w_3),\end{cases}$$

wodurch zugleich diese Ausgangsfunctionen $\mathfrak{F}_3(z_3,w_3)$ und $\mathfrak{E}_3(z_3,w_3)$ als von ganz besonderer Struktur in ihren Variabeln z_3, w_3 erkannt sind.

Wenn also das Ausgangscoordinatensystem z_3, w_3 auf der vorgelegten Oberfläche durch blosse Masstransformation in sich in ein isometrisches Coordinatensystem z_6, w_6 verwandelbar sein soll, so ist erforderlich und hinreichend, dass die das orthogonale Ausgangscoordinatensystem z_3, w_3 und seinen geometrischen Träger, die vorgelegte Oberfläche, definierenden Functionen $\mathfrak{E}_3(z_3,w_3)$ und $\mathfrak{F}_3(z_3,w_3)$ die in $IV.^6$ dargelegte ganz spezielle Struktur hinsichtlich ihrer beiden Variabeln z_3, w_3 besitzen.

Diese besondere Struktur $IV.^6$ der Functionen $\mathfrak{E}_3(z_3,w_3)$ und $\mathfrak{F}_3(z_3,w_3)$ lässt sich aber auch noch durch eine partielle Differentialgleichung, welcher jene beiden Functionen unterworfen sind, definieren, nämlich durch

$$IV_a.^6\quad\left(\frac{\partial^2}{\partial z_3^2}-\frac{\partial^2}{\partial w_3^2}\right)\log\frac{\mathfrak{F}_3(z_3,w_3)+\mathfrak{E}_3(z_3,w_3)}{\mathfrak{F}_3(z_3,w_3)-\mathfrak{E}_3(z_3,w_3)}=0.$$

Die Substitutionsfunctionen $R_6(z_6+w_6)$ und $S_6[-i(z_6-w_6)]$ bestimmen sich alsdann durch die Bedingungsgleichung (siehe oben)

$$\frac{R'_6(z_6+w_6)}{S'_6[-i(z_6-w_6)]}=-i\sqrt{\frac{\mathfrak{B}_6-\mathfrak{A}_6}{\mathfrak{B}_6+\mathfrak{A}_6}},\ \text{wo}$$

$\mathfrak{B}_6=\mathfrak{B}_6(z_6,w_6)=\mathfrak{F}_3\{Z_6(z_6,w_6),W_6(z_6,w_6)\}$, $\mathfrak{A}_6=\mathfrak{A}_6(z_6,w_6)=\mathfrak{E}_3\{Z_6(z_6,w_6),W_6(z_6,w_6)\}$ ist, oder

$$\mathfrak{B}_6=\mathfrak{F}_3(z_3,w_3),\ \mathfrak{A}_6=\mathfrak{E}_3(z_3,w_3),\ \frac{\mathfrak{B}_6-\mathfrak{A}_6}{\mathfrak{B}_6+\mathfrak{A}_6}=\frac{K_3(z_3+w_3)}{H_3(z_3-w_3)} \text{ (nach } IV.^6\text{) und}$$

$$z_3+w_3=2R_6(z_6+w_6),\ z_3-w_3=2S_6[-i(z_6-w_6)] \text{ ist.}$$

Die Bestimmungsgleichung für die Substitutionsfunctionen $R_6(z_6+w_6)$, $S_6[-i(z_6-w_6)]$ nimmt somit die Form an $\frac{R'_6(z_6+w_6)}{S'_6(z_6-w_6)}=\sqrt{\frac{K_3\{2R_6(z_6+w_6)\}}{H_3\{2S_6[-i(z_6-w_6)]\}}}$.

In dieser Relation sind aber $z_6+w_6=x$ und $z_6-w_6=y$ von einander ganz unabhängige Variabele, sodass diese Relation in die beiden totalen Differentialgleichungen zur Bestimmung der beiden Functionen $R_6(z_6+w_6)$ und $S_6[-i(z_6-w_6)]$ zerfällt:

$$III.^6 \quad R'_6(z_6+w_6)=\sqrt{K_3\{2R_6(z_6+w_6)\}},\quad S'_6[-i(z_6-w_6)]=\sqrt{H_3\{2S_6[-i(z_6-w_6)]\}},$$

worin K_3 und H_3 nach $IV.^6$ diejenigen Functionen sind, in welche, abgesehen vom Proportionalitätsfactor $J_3(z_3,w_3)$ die gegebenen Functionen $\mathfrak{F}_3(z_3,w_3)$ und $\mathfrak{E}_3(z_3,w_3)$ für das orthogonale Ausgangscoordinatensystem z_3, w_3 additiv zerfallen, falls letzteres überhaupt durch blosse Masstransformation in sich in ein isometrisches Coordinatensystem überführbar sein soll.

Nach $I.^{5'}$ nimmt das Bogenelement die Form an:

$$ds^2=4\frac{\mathfrak{A}_6^2-\mathfrak{B}_6^2}{\mathfrak{A}_6}\frac{\partial Z_6}{\partial z_6}\frac{\partial Z_6}{\partial w_6}dz_6\,dw_6. \quad \text{Hierin ist}$$

$$\mathfrak{A}_6=[\mathfrak{E}_3(z_3,w_3)]_{z_3=Z_6(z_6,w_6),\,w_3=W_6(z_6,w_6)}=[H_3\{2S_6[-i(z_6-w_6)]\}-K_3\{2R_6(z_6+w_6)\}]$$
$$\cdot J_3\{R_6(z_6+w_6)+S_6[-i(z_6-w_6)].\,R_6(z_6+w_6)-S[-i(z_6-w_6)]\},$$
$$\mathfrak{B}_6=[\mathfrak{F}_3(z_3,w_3)]_{z_3=Z_6(z_6,w_6),\,w_3=W_6(z_6,w_6)}=[H_3\{2S_6[-i(z_6-w_6)]\}+K_3\{2R_6(z_6+w_6)\}]$$
$$\cdot J_3\{R_6(z_6+w_6)+S_6[-i(z_6-w_6)]\},R_6(z_6+w_6)-S_6[-i(z_6-w_6)]\}, \text{ mithin}$$
$$\mathfrak{A}_6^2-\mathfrak{B}_6^2=-4H_3\{2S_6[-i(z_6-w_6)]\}\cdot K_3\{2R_6(z_6+w_6)\}$$
$$\cdot J_3^2\{R_6(z_6+w_6)+S_6[-i(z_6-w_6)],R_6(z_6+w_6)-S_6[-i(z_6-w_6)]\}.$$

Weiter ist nach $II.^6$ und $III.^6$

$$\frac{\partial Z_6}{\partial z_6}=R'_6(z_6+w_6)-iS'_6[-i(z_6-w_6)],\qquad \frac{\partial Z_6}{\partial w_6}=R'_6(z_6+w_6)+iS'_6[-i(z_6-w_6)],$$
$$\frac{\partial Z_6}{\partial z_6}\cdot\frac{\partial Z_6}{\partial w_6}=R'^2_6(z_6+w_6)+S'^2_6[-i(z_6-w_6)]=K_3\{2R_6(z_6+w_6)\}+H_3\{2S_6[-i(z_6-w_6)]\}.$$

Somit erhält aber das Bogenelement die endgiltige Form:

$$I.^6 \quad ds^2=16K_3\{2R_6(z_6+w_6)\}\cdot H_3\{2S_6[-i(z_6-w_6)]\}\cdot J_3\{R_6(z_6+w_6)+S_6[-i(z_6-w_6)],$$
$$R_6(z_6+w_6)-S_6[-i(z_6-w_6)]\}\cdot\frac{K_3\{2R_6(z_6+w_6)\}+H_3\{2S_6[-i(z_6-w_6)]\}}{K_3\{2R_6(z_6+w_6)\}-H_3\{2S_6[-i(z_6-w_6)]\}}dz_6\,dw_6.$$

7.

Transformation eines beliebigen isometrischen Coordinatensystems z_5, w_5 in ein beliebiges anderes, mithin in das allgemeine isometrische Coordinatensystem z_7, w_7 auf der beliebigen vorgelegten Fläche.

Für das orthogonale Ausgangscoordinatensystem z_3, w_3 in Problem 5. ist nach der Voraussetzung des Problems 7. die Bedingung erfüllt:

$$\mathfrak{A}_5=\mathfrak{E}_3\{Z_5(z_5,w_5),W_5(z_5,w_5)\}\equiv\mathfrak{G}_3\{Z_5(z_5,w_5),W_5(z_5,w_5)\}\equiv 0,$$

sodass sich die partiellen Differentialgleichungen $III_a^{5'}$, durch welche die Substitutionsfunctionen $Z_5(z_5,w_5)$ und $W_5(z_5,w_5)$ festgelegt werden, für unser Problem auf $\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\equiv 0, \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\equiv 0$ reducieren, welche die Integrale besitzen: $Z_5=Z_5(z_5)$, $W_5=W_5(w_5)$, wobei $Z_5(z_5)$ und $W_5(w_5)$ ganz willkürliche, von einander unabhängige Functionen je ihres einen Argumentes sind.

Die Transformation eines beliebigen isometrischen Coordinatensystems z_5, w_5 auf beliebig vorgegebener Fläche in ein beliebiges anderes, d. h. unter Ausschluss einer blossen Masstransformation innerhalb des Ausgangscoordinatensystems in das allgemeinste isometrische Coordinatensystem z_7, w_7 auf der vorgelegten Oberfläche wird somit bewirkt durch eine Substitution $II.^7$ $z_5 = Z_7(z_7), w_5 = W_7(w_7)$, wo $Z_7(z_7)$ und $W_7(w_7)$ zwei willkürliche, von einander unabhängige Functionen je ihres einen Argumentes sind.

Die Substitution $II.^7$ ergiebt nun $dz_5 = Z'_7(z_7)\,dz_7, dw_5 = W'_7(w_7)\,dw_7$; es geht also die Form $ds^2 = 2\mathfrak{F}_5(z_5, w_5)\,dz_5\,dw_5$, welche das Bogenelement der beliebig vorgelegten Oberfläche in Bezug auf das beliebige, aber individuelle isometrische Ausgangscoordinatensystem z_5, w_5 besitzt, für das gewonnene allgemeine isometrische Coordinatensystem z_7, w_7 auf dieser Oberfläche über in

$I.^7$ $ds^2 = 2\mathfrak{F}_7(z_7, w_7)\cdot dz_7\cdot dw_7$, wo $\mathfrak{F}_7(z_7, w_7) \equiv \mathfrak{F}_5\{Z_7(z_7), W_7(w_7)\}\cdot Z'_7(z_7)\cdot W'_7(w_7)$

ist und $Z_7(z_7), W_7(w_7)$ wie in der Substitution $II.^7$ zwei willkürliche, von einander unabhängige Functionen je ihres einen Argumentes sind.

Soll nun das Transformationsproblem im besonderen ein reelles sein, sollen das Ausgangs- und das Endcoordinatensystem auf reeller Oberfläche gelegen und beide mit der vermittelnden Substitution reell sein, so muss die Bedingung erfüllt sein (vergl. Formel $D.'$) $\mathfrak{F}_5(z_5, w_5, i) = \mathfrak{F}_5(w_5, z_5, -i)$, während die Substitution lautet $(II.^7)$ $z_5 = Z_7(z_7, i), w_5 = Z_7(w_7, -i)$ und das Bogenelement die Form annimmt:

$$(I^7)\quad ds^2 = 2\cdot\mathfrak{F}_5\{Z_7(z_7, i), Z_7(w_7, -i)\}\cdot Z'_7(z_7, i)\cdot Z'_7(w_7, -i)\cdot dz_7\cdot dw_7.$$

8.

Masstransformation eines beliebigen isometrischen Coordinatensystems z_5, w_5 in allgemeinster Weise in sich in ein anderes isometrisches Coordinatensystem z_8, w_8.

Dieses Transformationsproblem wird als Verknüpfung der Probleme *6.* und *7.* durch eine Substitution von der Form II^6

$$z_5 = Z_8(z_8, w_8) = R_8(z_8 + w_8) + S_8[-i(z_8 - w_8)], w_5 = W_8(z_8, w_8) = R_8(z_8 + w_8) - S_8[-i(z_8 - w_8)]$$

gelöst, für welche nach $II.^7$ $\dfrac{\partial Z_8}{\partial w_8} = \dfrac{\partial W_8}{\partial z_8} = R'_8(z_8 + w_8) + i\,S'_8[-i(z_8 - w_8)] \equiv 0$, d. i. $R'_8(z_8 + w_8) \equiv -i\,S'_8[-i(z_8 - w_8)]$ ist. Da aber $R'_8(z_8 + w_8)$ und $S'_8[-i(z_8 - w_8)]$ Functionen von einander ganz unabhängiger Variabeln: $z_8 + w_8$ und $-i(z_8 - w_8)$ sind, so kann diese Identität nur dann erfüllt sein, wenn sich die beiden Functionen $R'_8(z_8 + w_8)$ und $-i\,S'_8[-i(z_8 - w_8)]$ je auf dieselbe Constante a_8 reducieren: $R'_8(z_8 + w_8) \equiv a_8$, $S'_8[-i(z_8 - w_8]) \equiv ia_8$, woraus durch Integration folgt $R_8(z_8 + w_8) \equiv a_8(z_8 + w_8) + b_8$, $S_8[-i(z_8 - w_8)] \equiv a_8(z_8 - w_8) + c_8$. Die Substitution, welche die geforderte Masstransformation innerhalb des isometrischen Ausgangscoordinatensystems z_5, w_5 vermittelt, lautet somit $z_5 = 2a_8 z_8 + (b_8 + c_8)$, $w_5 = 2a_8 z_8 + (b_8 - c_8)$. Führt man anstatt der Integrationsconstanten b_8 und c_8 $b_8 + c_8$ und $b_8 - c_8$ als willkürliche Constanten ein, die erstere wiederum mit b_8, die letztere mit c_8 bezeichnend, und schreibt alsdann anstatt $2a_8$ a_8, so nimmt die Substitution, welche das vorliegende Transformationsproblem löst, endgiltig die Form an: $II.^8$ $z_5 = a_8 z_8 + b_8$, $w_5 = a_8 w_8 + c_8$.

Das auf das isometrische Coordinatensystem z_5, w_5 bezogene Bogenelement

$$ds^2 = 2\mathfrak{F}_5(z_5, w_5)\,dz_5\,dw_5$$

wird durch diese Substitution $II.^8$ übergeführt in:

$$I.^8\quad ds^2 = 2a_8^2\,\mathfrak{F}_5(a_8 z_8 + b_8, a_8 w_8 + c_8)\,dz_8\cdot dw_8.$$

Soll das Transformationsproblem 8. ein reelles sein, sollen also die vorgelegte Oberfläche, das auf derselben beliebig gegebene isometrische Ausgangscoordinatencurvensystem $z_5 + w_5 = const.$ und $z_5 - w_5 = const.$ mit der ursprünglichen Massbeziehung innerhalb desselben und soll auch die neugewonnene Massbeziehung innerhalb desselben doppelten Curvensystems und schliesslich auch die die Transformation vermittelnde Substitution $II.^8$ reell sein, so muss

$$\mathfrak{F}_5(z_5, w_5, i) \equiv \mathfrak{F}_5(w_5, z_5, -i)$$

sein, und es müssen die Constanten b_8 und c_8, unbeschadet sonstiger Willkürlichkeit, conjugiert-complexe, bez. beide reelle Zahlenwerte, a_8 aber notwendig einen reellen Zahlenwert darstellen. Um nun schliesslich dieses reelle Transformationsproblem auch in reellen Coordinaten bez. u_5, v_5 und u_8, v_8 darzustellen, sei in der Substitution $II.^8$ für z_5 $^1/_2(u_5 + iv_5)$, für w_5 $^1/_2(u_5 - iv_5)$, für z_8 $^1/_2(u_8 + iv_8)$, für w_8 $^1/_2(u_8 - iv_8)$ gesetzt und gemäss der soeben gegebenen Darlegungen für a_8 $\mathfrak{a}_8$ und für b_8 $^1/_2(\mathfrak{b}_8 + i\mathfrak{c}_8)$, für c_8 $^1/_2(\mathfrak{b}_8 - i\mathfrak{c}_8)$. Dann lautet aber die Substitution $II.^8$ $u_5 + iv_5 = \mathfrak{a}_8(u_8 + iv_8) + (\mathfrak{b}_8 + i\mathfrak{c}_8)$, $u_5 - iv_5 = \mathfrak{a}_8(u_8 - iv_8) + (\mathfrak{b}_8 - i\mathfrak{c}_8)$, woraus sich ergiebt

$$(II.^8) \quad u_5 = \mathfrak{a}_8 u_8 + \mathfrak{b}_8,\ v_5 = \mathfrak{a}_8 v_8 + \mathfrak{c}_8.$$

II.

Transformation eines gegebenen Coordinatensystems auf gegebener Oberfläche in ein durch seine analytische Definition als doppelte Curvenschar auf dieser Oberfläche gleichfalls gegebenes anderes Coordinatensystem.

1.

Transformation eines beliebigen Coordinatensystems z, w in ein durch eine beliebige doppelte Curvenschar festgelegtes Coordinatensystem z_1, w_1.

Im folgenden soll die Aufgabe gelöst werden, ein gegebenes Coordinatensystem z, w auf beliebiger Oberfläche in ein anderes Coordinatensystem z_1, w_1 zu transformieren, welch letzteres als eine bestimmte doppelte Curvenschar auf dieser Oberfläche in Bezug auf das Ausgangscoordinatensystem z, w analytisch durch zwei Gleichungen:

$$V. \quad \varphi(z, w, \alpha) = 0,\ \psi(z, w, \beta) = 0$$

definiert ist. In den beiden Gleichungen $V.$ bedeuten α und β zwei von einander unabhängige Parameter, und jeder individuelle Wert von α legt eine individuelle Curve $\varphi = 0$, jeder individuelle Wert von β eine individuelle Curve $\psi = 0$, jedes individuelle Wertepaar α, β also einen individuellen Punkt z, w der Fläche fest, sodass α, β selbst als Coordinatenwerte für das neueinzuführende Coordinatensystem z_1, w_1 mit den Coordinatencurven $\varphi = 0, \psi = 0$ gewählt werden könnten.

Die Bedeutung der beiden Grössen α und β als zweier Parameter für die folgenden analytischen Entwicklungen lässt sich noch folgendermassen klarlegen. Indem jeder beliebige Flächenpunkt sowohl durch ein individuelles Wertepaar z, w, bezogen auf das Ausgangscoordinatensystem, als auch durch ein individuelles Wertepaar α, β festgelegt wird, sind α und β als Functionen der Variabeln z und w aufzufassen und zwar $\alpha = \alpha(z, w)$ als Auflösung der Gleichung $\varphi(z, w, \alpha) = 0$ nach α, $\beta = \beta(z, w)$ als Auflösung der Gleichung $\psi(z, w, \beta) = 0$ nach β.

Es sind demgemäss in allen Entwicklungen, in denen neben den Variabeln z und w noch die beiden Parameter α und β auftreten, sofern dabei nicht gerade eine individuelle Curve $\varphi(z, w, \alpha) = 0$ oder $\psi(z, w, \beta) = 0$ ins Auge gefasst wird, diese Grössen α und β als die oben näher bezeichneten Functionen von z und w aufzufassen und zu berücksichtigen, oder es sind, in anderer Darstellung des soeben Gesagten, die Ergebnisse aller Entwicklungen, in denen die Grössen α und β zunächst als willkürliche Constanten behandelt werden, zu verbinden mit den beiden Gleichungen $\varphi(z, w, \alpha) = 0$ und $\psi(z, w, \beta) = 0$; diese Endergebnisse erhalten erst dann Bedeutung und Giltigkeit, wenn für dieselben jene Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ berücksichtigt werden.

Sollen nun die beiden Coordinatensysteme z, w und z_1, w_1, wie im vorliegenden Probleme vorausgesetzt ist, beide ganz beliebig sein, charakteristischer Eigenschaften entbehren, so treten die Entwicklungen des Problems *1.* des ersten Hauptteiles dieser Arbeit in Kraft, es wird die Transformation daher bewirkt durch eine Substitution:

$$\Pi.^1 \quad z = Z_1(z_1, w_1), w = W_1(z_1, w_1),$$

wodurch die Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ in Bezug auf das neue Coordinatensystem z_1, w_1 die analytische Definition gewinnen:

$$\varphi\{Z_1(z_1, w_1), W_1(z_1, w_1), \alpha\} \equiv \varphi_1(z_1, w_1, \alpha) = 0, \psi\{Z_1(z_1, w_1), W_1(z_1, w_1), \beta\} \equiv \psi_1(z_1, w_1, \beta) = 0.$$

Die Curven $\varphi_1 = 0$, d. h. die Curven $\varphi = 0$, sollen aber für das neue Coordinatensystem z_1, w_1 Coordinatencurven $z_1 + w_1 = const.$ sein, wobei der Wert jener Constanten für $z_1 + w_1$ durch den individuell gewählten Wert von α bestimmt wird. Es ist daher die Substitution $\Pi.^1$ der Bedingung zu unterwerfen, dass durch dieselbe die Gleichung $\varphi(z, w, \alpha) = 0$ übergeführt werde in eine Relation: $\varphi_1(z_1, w_1, \alpha) \equiv \mu_1(z_1 + w_1, \alpha) = 0$, analog die Gleichung $\psi(z, w, \beta) = 0$ in eine Relation: $\psi_1(z_1, w_1, \beta) \equiv \nu_1(z_1 - w_1 \beta) = 0$.

In endlicher Weise wird die Substitution $\Pi.^1$ gewonnen durch Elimination einerseits der Grösse α aus $\varphi(z, w, \alpha) = 0$ und $\mu_1(z_1 + w_1, \alpha) = 0$, andererseits der Grösse β aus $\psi(z, w, \beta) = 0$ und $\nu_1(z_1 - w_1, \beta) = 0$ und darauf durch Auflösung der beiden so entstandenen Gleichungen zwischen den 4 Grössen z, w, z_1, w_1 nach z und w als zwei Unbekannten. Hierbei ist der Willkürlichkeitsgrad für die Substitutionsfunctionen $Z_1(z_1, w_1)$, $W_1(z_1, w_1)$ bedingt durch die Willkürlichkeit der Functionen μ_1 und ν_1. Gleichzeitig lässt sich aber die Aufsuchung der Substitution $\Pi.^1$ auf differentielle Weise durchführen, was wegen späterer Untersuchungen von Belang ist.

Functionen der besonderen Struktur $\mu_1(z_1 + w_1, \alpha)$ hinsichtlich ihrer beiden Variabeln z_1, w_1 werden definiert durch die Differentialgleichung: $\frac{\partial \mu_1}{\partial z_1} - \frac{\partial \mu_1}{\partial w_1} = 0$, während für Functionen der besonderen Struktur $\nu_1(z_1 - w_1, \beta)$ die Differentialgleichung gilt: $\frac{\partial \nu_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \nu_1}{\partial w_1} = 0$. Die Substitutionsfunctionen $Z_1(z_1, w_1)$, $W_1(z_1, w_1)$ sind somit den beiden simultanen linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung unterworfen:

$$\left\{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\frac{\partial Z_1}{\partial z_1} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right]\frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right\} - \left\{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\frac{\partial Z_1}{\partial w_1} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right]\frac{\partial W_1}{\partial w_1}\right\} = 0,$$

$$\left\{\left[\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]\frac{\partial Z_1}{\partial z_1} + \left[\frac{\partial \psi}{\partial w}\right]\frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right\} + \left\{\left[\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]\frac{\partial Z_1}{\partial w_1} + \left[\frac{\partial \psi}{\partial w}\right]\frac{\partial W_1}{\partial w_1}\right\} = 0, \text{ oder}$$

$$VI.^1 \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z_1} - \frac{\partial Z_1}{\partial w_1}\right) + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right]\left(\frac{\partial W_1}{\partial z_1} - \frac{\partial W_1}{\partial w_1}\right) = 0, \left[\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z_1} + \frac{\partial Z_1}{\partial w_1}\right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial w}\right]\left(\frac{\partial W_1}{\partial z_1} + \frac{\partial W_1}{\partial w_1}\right) = 0,$$

wobei die Symbole $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right], \left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right], \left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]$ und $\left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]$ andeuten mögen, dass bez. in den Functionen $\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial w}, \frac{\partial\psi}{\partial z}$ und $\frac{\partial\psi}{\partial w}$ für z $Z_1(z_1, w_1)$, für w $W_1(z_1, w_1)$ substituiert worden ist, nachdem schon vorher in diesen Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial w}, \frac{\partial\psi}{\partial z}, \frac{\partial\psi}{\partial w}$ die durch $\alpha = \alpha(z, w)$, $\beta = \beta(z, w)$ (vergl. pag. 19.) angedeuteten Substitutionen ausgeführt worden sind. Die Willkürlichkeit der Massbeziehungen innnerhalb des neuen Coordinatensystems z_1, w_1 ist hierbei ausgesprochen durch den noch verbleibenden Willkürlichkeitsgrad der Functionen $Z_1(z_1, w_1)$, $W_1(z_1, w_1)$, welche aus den Gleichungen *VI.*[1] hervorgehen.

Aus den Bedingungsgleichungen *VI.*[1] lässt sich nun auch mit Leichtigkeit ohne Zurückgehen auf reelle Coordinaten u, v das allgemeine Problem der Masstransformation innerhalb eines beliebig gegebenen Coordinatensystems z, w erledigen. Um das Problem der Masstransformation dem allgemeinen Transformationsprobleme II1. unterzuordnen, ist letzteres dahin zu specialisieren, dass die Curven $\varphi(z, w, \alpha) = 0$ und $\psi(z, w, \beta) = 0$ zugleich Coordinatencurven im Ausgangscoordinatensysteme z, w seien, dass also jene Gleichungen die allgemeine Form besitzen: $\varphi(z + w, \alpha) = 0$, $\psi(z - w, \beta) = 0$, oder dass in *VI.*[1] $\frac{\partial\varphi}{\partial w} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \frac{\partial\psi}{\partial w} = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$ sei. Hiermit fallen aber die Functionen $\varphi(z, w, \alpha)$ und $\psi(z, w, \beta)$ ganz aus den Gleichungen *VI.*[1] heraus und diese Gleichungen *VI.*[1] nehmen, unter Abänderung der Indexbezeichnung (gemäss Problem I2.), die Form an:

$$\frac{\partial Z_2}{\partial z_2} - \frac{\partial Z_2}{\partial w_2} + \frac{\partial W_2}{\partial z_2} - \frac{\partial W_2}{\partial w_2} \equiv 0, \quad \frac{\partial Z_2}{\partial z_2} + \frac{\partial Z_2}{\partial w_2} - \frac{\partial W_2}{\partial z_2} - \frac{\partial W_2}{\partial w_2} \equiv 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich einzeln schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial z_2}(Z_2 + W_2) - \frac{\partial}{\partial w_2}(Z_2 + W_2) \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial z_2}(Z_2 - W_2) + \frac{\partial}{\partial w_2}(Z_2 - W_2) \equiv 0$$

und ergeben die Integrale $Z_2 + W_2 = R_2(z_2 + w_2)$, $Z_2 - W_2 = S_2(z_2 - w_2)$. Letztere aber führen auf die das allgemeine Problem der Masstransformation lösende Substitution

$$z = Z_2(z_2, w_2) \equiv {}^1/_2\{R_2(z_2 + w_2) + S_2(z_2 - w_2)\}, \quad w = W_2(z_2, w_2) = {}^1/_2\{R_2(z_2 + w_2) - S_2(z_2 - w_2)\},$$

unter R_2 und S_2 zwei willkürliche und von einander unabhängige Functionen je ihres einen Argumentes bez. $z_2 + w_2$ und $z_2 - w_2$ verstanden. Durch additive und subtractive Verbindung der ursprünglichen Differentialgleichungen (siehe oben) mit einander ergeben sich die beiden weiteren Differentialgleichungen $\frac{\partial Z_2}{\partial z_2} - \frac{\partial W_2}{\partial w_2} \equiv 0$, $\frac{\partial Z_2}{\partial w_2} - \frac{\partial W_2}{\partial z_2} = 0$ als Kriterium für eine Masstransformation eines beliebigen Coordinatensystems z, w in sich.

2.

Transformation eines beliebigen Coordinatensystems z, w in ein durch eine geeignete doppelte Curvenschar festgelegtes orthogonales Coordinatensystem z_3, w_3.

Das vorliegende Transformationsproblem wird gelöst durch eine Substitution

$$II.^3 \quad z = Z_3(z_3, w_3), \; w = W_3(z_3, w_3).$$

Unter $\varphi(z, w, \alpha) = 0$, $\psi(z, w, \beta) = 0$ sei, analytisch bezogen auf das beliebige Ausgangscoordinatensystem z, w das gegebene in sich orthogonale doppelte Curvensystem verstanden, auf welches das beliebige Ausgangscoordinatensystem z, w transformiert werden soll. Demzufolge ist die Substitution *II.*[3] sowohl den Bedingungen *VI.*[1], die unter erforderlicher Indexabänderung lauten:

$$VI.^2 \quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}-\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\right)+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]\left(\frac{\partial W_3}{\partial z_3}-\frac{\partial W_3}{\partial w_3}\right)=0, \quad \left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}+\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\right)+\left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]\left(\frac{\partial W_3}{\partial z_3}+\frac{\partial W_3}{\partial w_3}\right)=0,$$

als auch den Bedingungen $III.^3$ (pag. 10)

$$\mathfrak{A}_3\cdot\left\{\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\right)^2-\left(\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\right)^2\right\}+2\mathfrak{B}_3\cdot\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\frac{\partial W_3}{\partial z_3}-\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3}\right)+\mathfrak{C}_3\cdot\left\{\left(\frac{\partial W_3}{\partial z_3}\right)^2-\left(\frac{\partial W_3}{\partial w_3}\right)^2\right\}=0$$

unterworfen. Aus geeigneter Multiplikation der beiden Gleichungen $VI.^2$ mit einander ergiebt sich

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]\cdot\left\{\left(\frac{\partial W_3}{\partial z_3}\right)^2-\left(\frac{\partial W_3}{\partial w_3}\right)^2\right\}=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\cdot\left\{\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\right)^2-\left(\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\right)^2\right\},$$

sodass sich die Gleichung $III.^3$ vereinfacht in

$$\left\{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]\cdot\mathfrak{A}_3+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\cdot\mathfrak{C}_3\right\}\cdot\left\{\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\right)^2-\left(\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\right)^2\right\}+2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]\cdot\mathfrak{B}_3\cdot\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\frac{\partial W_3}{\partial z_3}-\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3}\right)=0.$$

Es gelingt nun mit Hilfe der beiden Gleichungen $VI.^2$, noch eine zweite lineare homogene Gleichung zwischen den beiden Ausdrücken $\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\right)^2-\left(\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\right)^2$ und $\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\frac{\partial W_3}{\partial z_3}-\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3}$ herzustellen. Zu diesem Zwecke multipliziert man die erste Gleichung $VI.^2$ mit $\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}+\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}$, die zweite Gleichung $VI.^2$ hingegen mit $\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}-\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}$; dann ergiebt sich

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\cdot\left\{\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\right)^2-\left(\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\right)^2\right\}=-\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]\cdot\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\frac{\partial W_3}{\partial z_3}-\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3}-\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3}+\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\frac{\partial W_3}{\partial z_3}\right),$$

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\cdot\left\{\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\right)^2-\left(\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\right)^2\right\}=-\left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]\cdot\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\frac{\partial W_3}{\partial z_3}-\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3}+\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3}-\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3}\right).$$

Multipliciert man nun noch die erste dieser beiden Relationen mit $\left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]$, die zweite mit $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]$ und addiert alsdann beide Gleichungen, so ergiebt sich jene zweite lineare homogene Gleichung in der Form

$$\left\{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\right\}\cdot\left\{\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\right)^2-\left(\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\right)^2\right\}=-2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]\cdot\left(\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\frac{\partial W_3}{\partial z_3}-\frac{\partial Z_3}{\partial w_3}\frac{\partial W_3}{\partial w_3}\right).$$

Durch das Zusammenbestehen dieser Gleichung mit der aus $III.^3$ abgeleiteten Gleichung folgt aber die weitere Relation:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]\cdot\mathfrak{A}_3+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\cdot\mathfrak{C}_3=\left\{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]\cdot\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\right\}\cdot\mathfrak{B}_3.$$

In dieser Relation bedeuten nun $\mathfrak{A}_3, \mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{B}_3$ bez. die das Ausgangscoordinatensystem z, w und zugleich die beliebige vorgelegte Oberfläche fixierenden Functionen $\mathfrak{E}(z, w)$, $\mathfrak{G}(z, w)$ und $\mathfrak{F}(z,w)$, jedoch nach Ausführung der Substitution $II.^3$ in diesen Functionen. Die soeben erzielte Identität ist also eine solche zwischen Functionen der beiden Variabeln z, w nach Ausführung irgend einer Substitution, der Substitution $II.^3$, zweier neuen Variabeln z_3, w_3 an Stelle der ursprünglichen Variabeln z, w. Diese Identität muss Geltung besitzen ebenso für die ursprünglichen Variabeln z, w wie für die durch die Substitution $II.^3$ eingeführten neuen Variabeln z_3, w_3, sie lässt sich daher auch in der Form wiedergeben:

$$VII.^2 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\psi}{\partial w}\cdot\mathfrak{E}(z, w)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\mathfrak{G}(z, w)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial w}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\cdot\mathfrak{F}(z, w).$$

Insofern nun aus dieser Relation $VII.^2$ die Substitution $II.^3$ vollständig eliminiert ist, und in ihr nur die Functionen $\varphi(z, w, \alpha)$, $\psi(z, w, \beta)$, welche durch ihr Verschwinden die vor-

gegebenen neuen Coordinatencurven in Bezug auf das Ausgangscoordinatensystem z, w analytisch definieren, mit den dieses Ausgangscoordinatensystem und zugleich auch die vorgelegte Oberfläche fixierenden Functionen $\mathfrak{E}(z, w)$, $\mathfrak{G}(z, w)$, $\mathfrak{F}(z, w)$ verknüpft werden, stellt sich uns diese Relation *VII.*² dar als Kriterium für die Zulässigkeit der doppelten Curvenschar $\varphi = O$, $\psi = O$, als ein neues und zwar orthogonales Coordinatensystem, d. h. als Kriterium für die Orthogonalität der Curven $\varphi = O$, $\psi = O$ gegen einander. Nach den Darlegungen über den Parametercharakter der Grössen α und β (siehe pag. 19 u. f.) hat die Relation *VII.*² für sich allein nur Giltigkeit, sofern man in ihr, d. h. nach Ausführung der angedeuteten Differentiationen, die Substitution $\alpha = \alpha(z, w)$, $\beta = \beta(z, w)$ ausführt. Ohne vorhergegangene Ausführung dieser Substitution ist die Relation *VII.*² nicht als Identität hinsichtlich der beiden von einander unabhängigen Variabeln z, w anzusehen, sondern nur als eine Gleichung zwischen diesen Variabeln z und w, die sich als mit dem Zusammenbestehen der beiden Gleichungen $\varphi(z, w, \alpha) = O$, $\psi(z, w, \beta) = O$ identisch erweisen muss, durch letztere beiden Gleichungen jederzeit verificiert werden kann.

Die Relation *VII.*² kann nun in Verbindung mit der Gleichung $\varphi(z, w, \alpha) = O$ auch dazu dienen, zu einer irgendwie gegebenen Curvenschar $\varphi(z, w, \alpha) = O$ die orthogonalen Trajectorien $\psi(z, w, \beta) = O$ festzulegen, sie kann also als Bestimmungsgleichung für eine der beiden zu einander orthogonalen Curvenscharen benutzt werden, wenn die andere gegeben ist.

Ist für das vorliegende allgemeine Transformationsproblem II2. das Ausgangscoordinatensystem im besonderen ein orthogonales, z_3, w_3, so vereinfacht sich die Bedingungsgleichung *VII.*² für die Orthogonalität der beiden Curvenscharen $\varphi(z_3, w_3, \alpha) = O$, $\psi(z_3, w_3, \beta) = O$ zu einander in

$$VII_a.^2 \quad \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial w_3}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial w_3} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_3}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial z_3}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_3}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial w_3} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial w_3}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial z_3}} = \frac{\mathfrak{F}_3(z_3, w_3)}{\mathfrak{E}_3(z_3, w_3)}.$$

3.

Transformation eines beliebigen Coordinatensystems z, w in ein durch eine geeignete doppelte Curvenschar festgelegtes isometrisches Coordinatensystem z_5, w_5.

Die beiden Curvenscharen $\varphi(z, w, \alpha) = O$, $\psi(z, w, \beta) = O$, auf welche als neues Coordinatensystem z_5, w_5 das beliebige Ausgangscoordinatensystem z, w transformiert werden soll, seien nach vorliegendem Probleme so gewählt, dass sie, in geeigneter Zählung zu einander bezogen, die Oberfläche, welche sie in doppelter Weise vollständig überdecken, in lauter unendlich kleine Quadrate zerlegen. Die Substitution *II.*⁵ $z = Z_5(z_5, w_5)$, $w = W_5(z_5, w_5)$, welche diese Coordinatentransformation bewirkt, ist alsdann gleichzeitig den Bedingungen *VI.*, in erforderlicher Indexänderung:

$$VI.^3 \quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\left(\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} - \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\right) + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]\left(\frac{\partial W_5}{\partial z_5} - \frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right) \equiv O, \quad \left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\left(\frac{\partial Z_5}{d z_5} + \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\right) + \left[\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]\left(\frac{\partial W_5}{\partial z_5} + \frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right) \equiv O,$$

und den Bedingungen *III.*⁵ (pag. 12)

$$\mathfrak{A}_5\cdot\left(\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\right)^2 + 2\mathfrak{B}_5\cdot\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial z_5} + \mathfrak{C}_5\cdot\left(\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\right)^2 \equiv O, \quad \mathfrak{A}_5\cdot\left(\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\right)^2 + 2\mathfrak{B}_5\cdot\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\cdot\frac{\partial W_5}{\partial w_5} + \mathfrak{C}_5\cdot\left(\frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right)^2 \equiv O$$

unterworfen. Die erste dieser Gleichungen *III.*⁵ kann als quadratische Bestimmungsgleichung

für den Quotienten $\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}:\frac{\partial W_5}{\partial x_5}$, die zweite als ebensolche Gleichung für $\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}:\frac{\partial W_5}{\partial w_5}$ betrachtet werden. Beide Gleichungen ergeben nun wegen ihrer vollständigen Übereinstimmung mit einander in den übrigen Grössen, nämlich in $\mathfrak{A}_5, \mathfrak{B}_5, \mathfrak{C}_5$, offenbar dieselben Wurzelpaare für jene beiden Quotienten. Es fragt sich nur, in welcher Combination diese Wurzelwerte, die für jede der beiden Gleichungen mit x_1 und x_2 bezeichnet seien, weiterhin Verwendung finden sollen oder dürfen, ob in der Combination:

$$\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}:\frac{\partial W_5}{\partial x_5}=x_1,\ \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}:\frac{\partial W_5}{\partial w_5}=x_1,\ \text{bez.}\ \frac{\partial Z_5}{\partial x_5}:\frac{\partial W_5}{\partial x_5}=x_2,\ \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}:\frac{\partial W_5}{\partial w_5}=x_2$$

oder in der anderen Combination:

$$\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}:\frac{\partial W_5}{\partial x_5}=x_1,\ \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}:\frac{\partial W_5}{\partial w_5}=x_2,\ \text{bez.}\ \frac{\partial Z_5}{\partial x_5}:\frac{\partial W_5}{\partial x_5}=x_2,\ \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}:\frac{\partial W_5}{\partial w_5}=x_1.$$

Indem es zunächst noch ganz freigelassen ist, welche der beiden Wurzeln obiger Gleichungen mit x_1 und welche mit x_2 bezeichnet werde, sind offenbar je die beiden in eine Linie gestellten Fälle möglicher Combinationen der Wurzelwerte als ein und dieselbe Combination zu betrachten.

Der erste der beiden von einander zu unterscheidenden Fälle der Wurzelcombinationen, für welchen also

$$\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}:\frac{\partial W_5}{\partial x_5}\equiv\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}:\frac{\partial W_5}{\partial w_5}\ \text{oder}\ \frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5}-\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\frac{\partial W_5}{\partial x_5}\equiv O$$

ist, ist aber schon für das einfache Transformationsproblem I5. im allgemeinen auszuschliessen. Denn substituiert man nach dieser Combination in die erste Gleichung *III.*[5] für $\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\ x_1\cdot\frac{\partial W_5}{\partial x_5}$ und in die zweite Gleichung *III.*[5] für $\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\ x_1\cdot\frac{\partial W_5}{\partial w_5}$ und subtrahiert die letztere Gleichung von der ersteren, so ergiebt sich nach Hebung des gemeinschaftlichen Factors $\left(\frac{\partial W_5}{\partial x_5}\right)^2-\left(\frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right)^2$ sämtlicher Glieder $\mathfrak{A}_5\cdot x_1{}^2+\mathfrak{C}_5=O$ oder $x_1{}^2+\frac{\mathfrak{C}_5}{\mathfrak{A}_5}=O$, oder da $x_1\cdot x_2=\frac{\mathfrak{C}_5}{\mathfrak{A}_5}$ ist, $x_1\cdot(x_1+x_2)=O$, d. h. entweder $x_1=O$, mithin $\mathfrak{C}_5=O$, oder $x_1+x_2=-\frac{2\mathfrak{B}_5}{\mathfrak{A}_5}=O$, mithin $\mathfrak{B}_5=O$. Aus $x_1=O$ folgt, dass sowohl $\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\equiv O$ als auch $\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\equiv O$ sei, also die Substitution die Form besitzen müsste: $x=const.,\ w=W_5(x_5,w_5)$, womit die Möglichkeit $x_1=O$ aber sofort zurückgewiesen ist. Nach der andern Möglichkeit für die erste Wurzelcombination x_1, x_1, nach $x_1+x_2=O$ oder $\mathfrak{B}_5=O$ ergiebt sich durch Subtraction der zweiten Gleichung *III.*[5] von der ersten

$$\mathfrak{A}_5\cdot\left\{\left(\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}\right)^2-\left(\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\right)^2\right\}+\mathfrak{C}_5\cdot\left\{\left(\frac{\partial W_5}{\partial x_5}\right)^2-\left(\frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right)^2\right\}\equiv O.$$

Multipliziert man die erste Gleichung *VI.*[3] mit $\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}+\frac{\partial W_5}{\partial w_5}$, so ergiebt sich aus der Verbindung der so erhaltenen Gleichung mit der soeben aus *III.*[5] abgeleiteten Gleichung nach Weghebung des heraustretenden Factors $\frac{\partial W_5}{\partial x_5}-\frac{\partial W_5}{\partial w_5}$

$$-\mathfrak{A}_5\cdot\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right]\cdot\left(\frac{\partial Z_5}{\partial x_5}+\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\right)+\mathfrak{C}_5\cdot\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\cdot\left(\frac{\partial W_5}{\partial x_5}+\frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right)\equiv O,$$

also auf Grund der Annahme $\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} = x_1 \cdot \frac{\partial W_5}{\partial z_5}, \frac{\partial Z_5}{\partial w_5} = x_1 \cdot \frac{\partial W_5}{\partial w_5} \quad - x_1 \cdot \mathfrak{A}_5 \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right] + \mathfrak{C}_5 \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] = 0,$

was nach $x_1 = \pm \sqrt{-\frac{\mathfrak{C}_5}{\mathfrak{A}_5}}$ und nach früheren Darlegungen über den Wegfall der Substitution neuer Variabeln (siehe pag. 22) auch geschrieben werden kann

$$\mp \sqrt{-\mathfrak{E}(z, w) \cdot \mathfrak{G}(z, w)} \cdot \frac{\partial \varphi(z, w)}{\partial w} + \mathfrak{G}(z, w) \cdot \frac{\partial \varphi(z, w)}{\partial z} = 0.$$

Multipliziert man die zweite Gleichung *VI.*³ mit $\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} - \frac{\partial Z_5}{\partial w_5}$, so ergiebt sich durch analoges Verfahren

$$\mp \sqrt{-\mathfrak{E}(z, w) \cdot \mathfrak{G}(z, w)} \cdot \frac{\partial \psi(z, w)}{\partial w} + \mathfrak{G}(z, w) \cdot \frac{\partial \psi(z, w)}{\partial z} = 0.$$

Hiermit, durch Aufstellung je einer Differentialgleichung als Bestimmungsgleichung für die beiden Curvenscharen, welche das neue isometrische Coordinatensystem bilden sollen, ist die Zulässigkeit der Annahme $\mathfrak{B}_5 = 0$, d. h. der Wurzelcombination $\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} : \frac{\partial W_5}{\partial z_5} = x_1, \frac{\partial Z_5}{\partial w_5} : \frac{\partial W_5}{\partial w_5} = x_1$ unter der weiteren Voraussetzung $x_1 + x_2 = 0$ nachgewiesen. Ein Ausgangscoordinatensystem z, w, für welches die $\mathfrak{B}_5$ entsprechende Function $\mathfrak{F}(z, w)$ verschwindet, ist aber sicher nicht reell, wie aus den Formeln *A'* (pag. 6.) hervorgeht. Für $\mathfrak{F}(z, w) = 0$ nämlich wird nach diesen Formeln

$$\left(\frac{ds_u}{ds_v}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = \left(\frac{du + idv}{du - idv}\right)^2,$$

d. h. das Verhältnis der Bogenelemente auf den Coordinatencurven ist nicht reell. Insofern nun dieses besondere isometrische Transformationsproblem sicher kein reelles ist, soll es hier auch nicht weiter verfolgt werden.

Unsern weiteren Entwicklungen, die also auch zugleich den allgemeinen Fall des Transformationsproblems treffen, ist somit die Annahme zu Grunde zu legen

$$a. \quad \frac{\partial Z_5}{\partial z_5} = x_1 \cdot \frac{\partial W_5}{\partial z_5}, \quad \frac{\partial Z_5}{\partial w_5} = x_2 \cdot \frac{\partial W_5}{\partial w_5}.$$

Diese Annahme führt die Gleichungen *VI.*³ über in

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\left(x_1 \frac{\partial W_5}{\partial z_5} - x_2 \frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right) + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right]\left(\frac{\partial W_5}{\partial z_5} - \frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right) = 0, \quad \left[\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]\left(x_1 \frac{\partial W_5}{\partial z_5} + x_2 \frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial w}\right]\left(\frac{\partial W_5}{\partial z_5} + \frac{\partial W_5}{\partial w_5}\right) = 0,$$

oder in anderer Schreibweise in

$$VI_a^3 \quad \left[x_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right]\frac{\partial W_5}{\partial z_5} - \left[x_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{d\varphi}{\partial w}\right]\frac{\partial W_5}{\partial w_5} = 0, \quad \left[x_1 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\right]\frac{\partial W_5}{\partial z_5} + \left[x_2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\right]\frac{\partial W_5}{\partial w_5} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich durch Elimination des Quotienten $\frac{\partial W_5}{\partial z_5} : \frac{\partial W_5}{\partial w_5}$ die Gleichung

$$2x_1 \cdot x_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} + (x_1 + x_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial w} = 0,$$

d. i. aber nach $x_1 \cdot x_2 = \frac{\mathfrak{C}_5}{\mathfrak{A}_5} = \frac{\mathfrak{G}(z, w)}{\mathfrak{E}(z, w)}$ und $x_1 + x_2 = -\frac{2\mathfrak{B}_5}{\mathfrak{A}_5} = -\frac{2\mathfrak{F}(z, w)}{\mathfrak{E}(z, w)}$ die Gleichung *VII.*², welche die Orthogonalität der beiden Curvenscharen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zu einander ausspricht. Um nun aber den Charakter des Curvensystems $\varphi = 0$, $\psi = 0$ als eines isometrischen analytisch zu fixieren, ist es erforderlich, die Gleichungen VI_a^3 noch weiter zu differentiieren, worauf die Einführungsgleichungen *a.* dieser Grössen x_1 und x_2 selbst schon hinweisen.

Um die Rechnung einfacher zu gestalten, ist es jedoch empfehlenswert, die oben angedeutete Weiterführung des Problems vorläufig fallen zu lassen, dafür aber das aus ihm

erwachsende besondere Problem durchzuführen, ein beliebiges isometrisches Ausgangscoordinatensystem z_5, w_5 auf ein beliebiges anderes isometrisches Coordinatensystem z_7, w_7 zu transformieren, für welch letzteres ein geeignetes Curvensystem $\varphi_1(z_5, w_5, a) = 0$, $\psi_1(z_5, w_5, \beta) = 0$, analytisch auf das Ausgangscoordinatensystem z_5, w_5 bezogen, als geometrischer Träger gegeben ist. Nach Problem I 7. wird diese Transformation bewirkt durch eine Substitution der besonderen Form: II^7. $z_5 = Z_7(z_7)$, $w_5 = W_7(w_7)$, wobei Z_7 und W_7 irgend zwei von einander unabhängige Functionen je ihres einen Argumentes sind. Durch diese Substitution vereinfachen sich aber die Gleichungen VI_a^3 in

$$VI_b^3 \quad \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_5}\right] Z'_7(z_7) - \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial w_5}\right] W'_7(w_7) \equiv 0. \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial z_5}\right] Z'_7(z_7) + \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial w_5}\right] W'_7(w_7) \equiv 0.$$

Aus diesen beiden Relationen ergiebt sich zunächst durch Elimination des Quotienten $Z'_7(z_7) : W'_7(w_7)$ als Bedingung für die Zusammengehörigkeit der beiden Curvenscharen $\varphi_1(z_5, w_5, a) \equiv 0$, $\psi_1(z_5, w_5, \beta) \equiv 0$, beide analytisch auf ein und dasselbe, aber beliebige isometrische Ausgangscoordinatensystem z_5, w_5 bezogen, zu einem isometrischen Curvensysteme:

$$VII^3. \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_5}\frac{\partial \psi_1}{\partial w_5} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial w_5}\frac{\partial \psi_1}{\partial z_5} \equiv 0,$$

eine Relation, die sich auch aus $VII.^2$ durch die besondere Annahme $\mathfrak{E}(z, w) = 0$, $\mathfrak{G}(z, w) = 0$, d. h. dass das Ausgangscoordinatensystem ein isometrisches sei, sofort einstellt. Die besondere Eigenart jeder der beiden Curvenscharen $\varphi_1(z_5, w_5, a) = 0$. $\psi_1(z_5, w_5, \beta) = 0$ einzeln für sich, also abgesehen von ihrer Orthogonalität und ihrer geeignet gewählten zählungsweisen Zuordnung zu einander, die sie befähigt, je als das eine Glied eines isometrischen Curvensystems zu dienen, ist aber durch folgende Entwicklungen zu erschliessen:

Man wende das Problem so, dass für die Substitution $II.^7$ die Functionen $Z_7(z_7), W_7(w_7)$ gegeben seien und mit Hilfe derselben nach den Gleichungen VI_b^3 die Functionen $\varphi_1(z_5, w_5, a)$, $\psi_1(z_5, w_5, \beta)$ bestimmt werden sollen, welche, bezogen auf das beliebige isometrische Ausgangscoordinatensystem z_5, w_5, durch ihr Verschwinden die neuen isometrischen Coordinatencurven analytisch definieren. Demgemäss löse man die Gleichungen $II.^7$ nach z_7 und w_7 auf, was durch b. $z_7 = S(z_5)$, $w_7 = T(w_5)$ angedeutet sei. Dann besitzt das isometrische Curvensystem $\varphi_1(z_5, w_5, a) = 0$. $\psi_1(z_5, w_5, \beta) = 0$, das geometrischer Träger des neuen isometrischen Coordinatensystems z_7, w_7 ist, in Bezug auf letzteres die analytische Definition

$z_7 + w_7 + a = 0$, $z_7 - w_7 + \beta = 0$, d. i. nach b. $S(z_5) + T(w_5) + a = 0$, $S(z_5) - T(w_5) + \beta = 0$.

Es ist aber hiermit, ohne dass die Substitution zu jener Transformation selbst gegeben ist, die allgemeine Form zweier Curvenscharen gefunden, beide auf ein beliebiges isometrisches Ausgangscoordinatensystem z_5, w_5 bezogen, welche zusammen ein isometrisches Curvensystem bilden, nämlich

$$VIII_a^3 \quad \varphi_1(z_5, w_5, a) = S(z_5) + T(w_5) + a = 0, \psi_1(z_5, w_5, \beta) = S(z_5) - T(w_5) + \beta = 0,$$

wobei $S(z_5)$ und $T(w_5)$ zwei beliebige, von einander unabhängige Functionen je ihres einen Argumentes z_5 und w_5, a und β aber zwei willkürliche und von einander unabhängige Constanten sind, oder für jede der beiden Curvenscharen $\varphi_1 = 0$ und $\psi_1 = 0$ muss die Differentialgleichung erfüllt sein

$$VIII_b^3 \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_5 \partial w_5} \equiv 0 \text{ bez. } \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z_5 \partial w_5} \equiv 0.$$

Auch kann man umgekehrt, falls die Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$ der beiden auf ein beliebiges isometrisches Ausgangscoordinatensystem z_5, w_5 bezogenen Curvenscharen, welche ein isometrisches Curvensystem bilden, gemäss der oben verzeichneten allgemeinen Form VIII_a^3 gegeben sind,

wenn also die Functionen $S(z_5)$ und $T(w_5)$ individuell, aber beliebig gegeben sind, die Substitution $II.^7$ bestimmen, welche das Ausgangscoordinatensystem z_5, w_5 auf jenes isometrische Curvensystem $\varphi_1 = 0, \psi_1 = 0$ als neues isometrisches Coordinatensystem z_7, w_7 transformiert, und zwar ergeben sich diese Substitutionsfunctionen offenbar vermittels Auflösung der beiden Gleichungen $S(z_5) = z_7$, $T(w_5) = w_7$ bez. nach z_5 und nach w_5, da nach solcher Bestimmung von z_5 als Function von z_7 und von w_5 als Function von w_7 die Gleichungen $VIII_a{}^3$ in $z_7 + w_7 + \alpha = 0$ und $z_7 - w_7 + \beta = 0$ übergeführt werden.

Von der Bedingungsgleichung $VIII_b{}^3$ aus, welcher jede der beiden Curvenscharen $\varphi_1 = 0, \psi_1 = 0$, beide auf ein beliebiges isometrisches Coordinatensystem z_5, w_5 bezogen, genügen müssen, falls sie einzeln geeignet sein sollen, die eine Schar eines isometrischen Curvensystems zu bilden, lässt sich nun ohne Schwierigkeit die analoge Bedingung für ein ganz beliebiges, nicht-isometrisches Ausgangscoordinatensystem z, w entwickeln, womit wir zur Behandlung des allgemeinen Problems *3.* zurückkehren.

Die beliebige individuelle Curvenschar, welche geeignet sein soll, mit ihren orthogonalen Trajectorien ein isometrisches Curvensystem zu bilden, besitze in Bezug auf ein beliebiges, also nicht-isometrisches Coordinatensystem die analytische Definition $\varphi(z, w, \alpha) = 0$, die andere Schar, die Schar der orthogonalen Trajectorien zu $\varphi(z, w, \alpha) = 0$, die Gleichung $\varphi(z, w, \beta) = 0$. Transformiert man nun dieses Ausgangscoordinatensystem z, w vermittels einer Substitution $II.^5$ $z = Z_5(z_5, w_5), w = W_5(z_5, w_5)$, welche den Bedingungen $III.^5$ genügt, in ein isometrisches Coordinatensystem z_5, w_5, so geht die Function $\varphi(z, w, \alpha)$ über in

$$\varphi\{Z_5(z_5, w_5), W_5(z_5, w_5, \alpha)\} = \varphi_1(z_5, w_5, \alpha),$$

und diese Function $\varphi_1(z_5, w_5, \alpha)$ ist alsdann der Bedingung $VIII_b{}^3$: $\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_5 \partial w_5} \equiv 0$ unterworfen. Es ist nun:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_5} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial W_5}{\partial z_5}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_5 \partial w_5} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w}\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 Z_5}{\partial z_5 \partial w_5}$$
$$+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\frac{\partial W_5}{\partial z_5} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2}\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial^2 W_5}{\partial z_5 \partial w_5}.$$

Durch Differentiation der aus $III.^5$ hervorgehenden Substitution *a.* (pag. 25.) ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 Z_5}{\partial z_5 \partial w_5} = \frac{\partial x_1}{\partial w_5}\frac{\partial W_5}{\partial z_5} + x_1 \frac{\partial^2 W_5}{\partial z_5 \partial w_5} = \frac{\partial x_1}{\partial z}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}\frac{\partial W_5}{\partial z_5} + \frac{\partial x_1}{\partial w}\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} + x_1 \frac{\partial^2 W_5}{\partial z_5 \partial w_5}$$
$$= \left(x_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial x_1}{\partial w}\right)\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} + x_1 \frac{\partial^2 W_5}{\partial z_5 \partial w_5} = \frac{\partial x_2}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} + x_2 \frac{\partial^2 W_5}{\partial z_5 \partial w_5} = \frac{\partial x_2}{\partial z}\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} + \frac{\partial x_2}{\partial w}\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5}$$
$$+ x_2 \frac{\partial^2 W_5}{\partial z_5 \partial w_5} = \left(x_1 \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial x_2}{\partial w}\right)\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} + x_2 \frac{\partial^2 W_5}{\partial z_5 \partial w_5}, \text{ oder}$$

$$c. \quad (x_2 - x_1)\frac{\partial^2 W_5}{\partial z_5 \partial w_5} = \left(x_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial x_1}{\partial w} - \frac{\partial x_2}{\partial w}\right)\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5}, \text{ und hiernach}$$

$$d. \quad \frac{\partial^2 Z_5}{\partial z_5 \partial w_5} = \left\{\left(x_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial x_1}{\partial w}\right) + \frac{x_1}{x_2 - x_1}\left(x_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial x_1}{\partial w} - \frac{\partial x_2}{\partial w}\right)\right\}\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\frac{\partial W_5}{\partial w_5}.$$

Durch die Relationen *a. c.* und *d.* geht aber die Gleichung $\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_5 \partial w_5} \equiv 0$ nach oben gegebener Darstellung von $\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_5 \partial w_5}$ über in die folgende:

$$x_1 \cdot x_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \frac{\partial W_5}{\partial z_5} \frac{\partial W_5}{\partial w_5} + x_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w} \frac{\partial W_5}{\partial z_5} \frac{\partial W_5}{\partial w_5} + \left\{ \left(x_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial x_1}{\partial w} \right) + \frac{x_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(x_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial z} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial x_1}{\partial w} - \frac{\partial x_2}{\partial w} \right) \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial W_5}{\partial z_5} \frac{\partial W_5}{\partial w_5} + x_2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w} \frac{\partial W_5}{\partial z_5} \frac{\partial W_5}{\partial w_5} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} \frac{\partial W_5}{\partial z_5} \frac{\partial W_5}{\partial w_5} + \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \left(x_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial z} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial x_1}{\partial w} - \frac{\partial x_2}{\partial w} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial W_5}{\partial z_5} \frac{\partial W_5}{\partial w_5} = 0,$$

d. i. aber, unter Weghebung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors $\frac{\partial W_5}{\partial z_5} \frac{\partial W_5}{\partial w_5}$, eine Bedingungsgleichung für die Function $\varphi(z, w, a)$ in den Variabeln z, w, den Coordinaten des beliebigen, nicht-isometrischen Ausgangscoordinatensystems z, w; in diese Bedingungsgleichung für die Function $\varphi(z, w, a)$ sind die in den Ausdrücken für x_1 und x_2 enthaltenen, das Ausgangscoordinatensystem z, w und zugleich die vorgelegte Oberfläche definierenden Functionen $\mathfrak{E}(z, w)$, $\mathfrak{G}(z, w)$ und $\mathfrak{F}(z, w)$ mit hereingezogen worden. Diese Bedingungsgleichung für die Function $\varphi(z, w, a)$ lässt sich noch in einfacherer Form schreiben

$$e. \quad x_1 \cdot x_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (x_1 + x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} + \frac{1}{x_2 - x_1} \left(x_2^2 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial z} - x_1^2 \frac{\partial x_2}{\partial z} + x_2 \frac{\partial x_1}{\partial w} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial w} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{x_2 - x_1}$$

$$\cdot \left(x_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial x_1}{\partial w} - \frac{\partial x_2}{\partial w} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0.$$

Es gilt nun, in dieser Gleichung an Stelle der Grössen x_1 und x_2 die Functionen $\mathfrak{E}(z, w)$, $\mathfrak{G}(z, w)$ und $\mathfrak{F}(z, w)$ selbst einzuführen. Hierfür ist nach der die Grössen x_1 und x_2 definierenden quadratischen Gleichung, einer der beiden Gleichungen *III.*[5] $\mathfrak{A}_5 \cdot x^2 + 2\mathfrak{B}_5 \cdot x + \mathfrak{C}_5 = 0$,

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\mathfrak{C}_5}{\mathfrak{A}_5} = \frac{\mathfrak{G}(z, w)}{\mathfrak{E}(z, w)} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}, \quad x_1 + x_2 = -\frac{2\mathfrak{B}_5}{\mathfrak{A}_5} = -\frac{2\mathfrak{F}(z, w)}{\mathfrak{E}(z, w)} = -\frac{2\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}},$$

$$x_{1,2} = -\frac{\mathfrak{B}_5}{\mathfrak{A}_5} \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{B}_5^2}{\mathfrak{A}_5^2} - \frac{\mathfrak{C}_5}{\mathfrak{A}_5}} = -\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}} \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2} - \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}} = \frac{1}{\mathfrak{E}} \left(-\mathfrak{F} \pm \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}} \right).$$

Hieraus ergiebt sich

$$x_{1,2}^2 = \frac{1}{\mathfrak{E}^2} \left(2\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G} \mp 2\mathfrak{F}\sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}} \right), x_2 - x_1 = -\frac{2}{\mathfrak{E}} \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}},$$

und durch partielle Differentiation und nach einigen sich sofort darbietenden Umformungen:

$$\frac{\partial x_{1,2}}{\partial z} = \frac{1}{\mathfrak{E}^2 \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}} \left\{ \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} - \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right) \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}} \pm \mathfrak{E}\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \mp \mathfrak{F}^2 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} \mp {}^1/_2\, \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z} \pm {}^1/_2\, \mathfrak{E}\mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} \right\},$$

$$\frac{\partial x_{1,2}}{\partial w} = \frac{1}{\mathfrak{E}^2 \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}} \left\{ \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial w} - \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w} \right) \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}} \pm \mathfrak{E}\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w} \mp \mathfrak{F}^2 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial w} \mp {}^1/_2\, \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial w} \pm {}^1/_2\, \mathfrak{E}\mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial w} \right\},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial w} - \frac{\partial x_2}{\partial w} = \frac{1}{\mathfrak{E}^2 \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}} \left\{ 2\mathfrak{F} \left(\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w} - \mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial w} \right) - \mathfrak{E} \left(\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial w} - \mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial w} \right) \right\},$$

$$x_2 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial z} = \frac{1}{\mathfrak{E}^3 \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}} \left(-\mathfrak{F} - \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}} \right) \cdot \left\{ \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} - \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right) \cdot \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}} + \mathfrak{E}\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} - \mathfrak{F}^2 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} - {}^1/_2\, \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z} \right.$$

$$\left. + {}^1/_2\, \mathfrak{E}\mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} \right\}, \quad x_1 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial z} = \frac{1}{\mathfrak{E}^3 \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}} \left(-\mathfrak{F} + \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}} \right) \cdot \left\{ \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} - \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right) \cdot \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}} - \mathfrak{E}\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right.$$

$$\left. + \mathfrak{F}^2 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} + {}^1/_2\, \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z} - {}^1/_2\, \mathfrak{E}\mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} \right\}, \quad x_2 \frac{\partial x_1}{\partial z} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial z} = \frac{1}{\mathfrak{E}^2 \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}} \left\{ \mathfrak{F} \left(\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z} + \mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z} \right) - 2\, \mathfrak{E}\mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right\},$$

analog $x_2 \frac{\partial x_1}{\partial w} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial w} = \frac{1}{\mathfrak{E}^2 \sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}} \left\{ \mathfrak{F} \left(\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial w} + \mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial w} \right) - 2\, \mathfrak{E}\mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w} \right\}.$ Weiter ist

$$x_2^2\frac{\partial x_1}{\partial z}=\frac{1}{\mathfrak{E}^2\sqrt{\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G}}}\left\{\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}-\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}\right)\sqrt{\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G}}+\mathfrak{F}\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}-\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}\right)+{}^1/_2\,\mathfrak{G}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}-\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}\right)\right\},$$

$$x_1^2\frac{\partial x_2}{\partial z}=\frac{1}{\mathfrak{E}^2\sqrt{\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G}}}\left\{\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}-\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}\right)\sqrt{\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G}}+\mathfrak{F}\left(\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}-\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}\right)+{}^1/_2\,\mathfrak{G}\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}-\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}\right)\right\},$$

$$x_2^2\frac{\partial x_1}{\partial z}-x_1^2\frac{\partial x_2}{\partial z}=\frac{1}{\mathfrak{E}^2\sqrt{\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G}}}\left\{2\mathfrak{F}\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}-\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}\right)+\mathfrak{G}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}-\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}\right)\right\},$$

$$x_2^2\frac{\partial x_1}{\partial z}-x_1^2\frac{\partial x_2}{\partial z}+x_2\frac{\partial x_1}{\partial w}-x_1\frac{\partial x_2}{\partial w}=\frac{1}{\mathfrak{E}^2\sqrt{\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G}}}\left\{2\mathfrak{F}\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}-\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}\right)+\mathfrak{G}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}-\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}\right)\right.$$

$$\left.+\mathfrak{F}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial w}+\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial w}\right)-2\,\mathfrak{E}\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w}\right\},\qquad x_2\frac{\partial x_1}{\partial z}-x_1\frac{\partial x_2}{\partial z}+\frac{\partial x_1}{\partial w}-\frac{\partial x_2}{\partial w}=\frac{1}{\mathfrak{E}^2\sqrt{\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G}}}\left\{\mathfrak{F}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}+\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}\right)\right.$$

$$\left.-2\,\mathfrak{E}\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}+2\mathfrak{F}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w}-\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial w}\right)+\mathfrak{E}\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial w}-\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial w}\right)\right\},\qquad\frac{1}{x_2-x_1}\left(x_2^2\frac{\partial x_1}{\partial z}-x_1^2\frac{\partial x_2}{\partial z}+x_2\frac{\partial x_1}{\partial w}-x_1\frac{\partial x_2}{\partial w}\right)$$

$$=-\frac{1}{2\,\mathfrak{E}(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})}\left\{2\mathfrak{F}\cdot\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}-\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}\right)+\mathfrak{G}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}-\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}\right)+\mathfrak{F}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial w}+\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial w}\right)-2\,\mathfrak{E}\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w}\right\},$$

$$\frac{1}{x_2-x_1}\left(x_2\frac{\partial x_1}{\partial z}-x_1\frac{\partial x_2}{\partial z}+\frac{\partial x_1}{\partial w}-\frac{\partial x_2}{\partial w}\right)=-\frac{1}{2\,\mathfrak{E}(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})}\left\{2\mathfrak{F}\cdot\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w}-\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial w}\right)+\mathfrak{E}\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial w}-\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial w}\right)\right.$$

$$\left.+\mathfrak{F}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}+\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}\right)-2\,\mathfrak{E}\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}\right\}.$$

Hiernach aber nimmt die Bedingungsgleichung *e.* für die Function $\varphi(z,w,a)$ die definitive Form an

$$\textit{VIII.}^3\quad 2\,\mathfrak{G}(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-4\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial w}+2\,\mathfrak{E}(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}-\left\{2\mathfrak{F}\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}-\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}\right)\right.$$

$$\left.+\mathfrak{G}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}-\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}\right)+\mathfrak{F}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial w}+\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial w}\right)-2\,\mathfrak{E}\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\left\{2\mathfrak{F}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial w}-\mathfrak{F}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial w}\right)+\mathfrak{E}\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial w}-\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial w}\right)\right.$$

$$\left.+\mathfrak{F}\left(\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}+\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z}\right)-2\,\mathfrak{E}\mathfrak{G}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial w}=0.$$

Hinsichtlich der äusseren Form dieser Bedingungsgleichung ist noch darauf hinzuweisen, dass sie symmetrisch in den Ableitungen nach z und w einerseits und in den Functionen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ andererseits ist, d. h. diese Gleichung ändert sich nicht, wenn man die Ableitungen nach z und nach w und gleichzeitig die Functionen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ mit einander vertauscht.

Ist im besonderen das Ausgangscoordinatensystem z, w ein orthogonales, z_3, w_3, also $\mathfrak{E}\equiv\mathfrak{G}$, so nimmt die Bedingungsgleichung für die Function $\varphi(z_3, w_3, a)$ die einfachere Form an:

$$\textit{VIII}_c^3\qquad(\mathfrak{F}_3^2-\mathfrak{E}_3^2)\left\{\mathfrak{E}_3\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_3^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w_3^2}\right)-2\mathfrak{F}_3\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_3\,\partial w_3}\right\}-\left\{\mathfrak{F}_3\left(\mathfrak{E}_3\frac{\partial\mathfrak{F}_3}{\partial z_3}-\mathfrak{F}_3\frac{\partial\mathfrak{E}_3}{\partial z_3}\right)\right.$$

$$\left.-\mathfrak{E}_3\left(\mathfrak{E}_3\frac{\partial\mathfrak{F}_3}{\partial w_3}-\mathfrak{F}_3\frac{\partial\mathfrak{E}_3}{\partial w_3}\right)\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}-\left\{\mathfrak{F}_3\left(\mathfrak{E}_3\frac{\partial\mathfrak{F}_3}{\partial w_3}-\mathfrak{F}_3\frac{\partial\mathfrak{E}_3}{\partial w_3}\right)-\mathfrak{E}_3\left(\mathfrak{E}_3\frac{\partial\mathfrak{F}_3}{\partial z_3}-\mathfrak{F}_3\frac{\partial\mathfrak{E}_3}{\partial z_3}\right)\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial w_3}=0.$$

Um nun zu der durch die Gleichung VIII.^{3} bez. VIII$_c^3$ definierten Curvenschar $\varphi(z, w, a)=0$ die orthogonalen Trajectorien $\psi(z, w, \beta)=0$ in bequemer Weise zu bestimmen, gehen wir zu den Gleichungen VIII$_a^3$ (pag. 26) zurück. Aus ihnen ergiebt sich:

$$\varphi_1(z_5, w_5, a)+\psi_1(z_5, w_5, \beta)=2\,S(z_5)+(a+\beta),\quad \varphi_1(z_5, w_5, a)-\psi_1(z_5, w_5, \beta)=2\,T(w_5)+(a-\beta),$$

mithin

$$f.\quad\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_5}-\frac{\partial\psi_1}{\partial z_5}=0,\quad\frac{\partial\varphi_1}{\partial w_5}+\frac{\partial\psi_1}{\partial w_5}=0.$$

Bilden nun also, bezogen auf ein beliebiges, nicht-isometrisches Coordinatensystem z, w, die beiden Curvenscharen $\varphi(z, w, a)=0$, $\psi(z, w, \beta)=0$ ein isometrisches Curvensystem, und transformiert die Substitution II.^{5} das Ausgangscoordinatensystem z, w auf ein beliebiges isometrisches

Coordinatensystem z_5, w_5, wobei jene Gleichungen $\varphi(z, w, a) = 0$, $\psi(z, w, \beta) = 0$ übergeführt werden mögen in $\varphi_1(z_5, w_5, a) = 0$ und $\psi_1(z_5, w_5, \beta) = 0$, so haben zunächst die beiden Functionen $\varphi(z, w, a)$ und $\psi(z, w, \beta)$*) einzeln der Bedingungsgleichung *VIII.*[3] bez. VIII_c^3 zu genügen, dann aber noch gleichzeitig den beiden Bedingungen $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_5} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z_5}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial w_5} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial w_5}$.

Es ist aber
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_5} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial W_5}{\partial z_5} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z_5} = \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial W_5}{\partial z_5}.$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial w_5} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial W_5}{\partial w_5} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial w_5} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} - \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial W_5}{\partial w_5}, \text{ oder}$$
$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\frac{\partial Z_5}{\partial z_5} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}\right)\frac{\partial W_5}{\partial z_5} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\frac{\partial Z_5}{\partial w_5} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\right)\frac{\partial W_5}{\partial w_5} = 0,$$
d. i. nach den Gleichungen *a.* (pag. 25)
$$g. \quad x_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}\right) = 0, \quad x_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\right) = 0.$$
Hieraus aber ergiebt sich $\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{x_2 - x_1}\left\{(x_1 + x_2)\frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}}\left(-\mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{E}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)$,
$$\frac{\partial \psi}{\partial w} = \frac{1}{x_2 - x_1}\left\{2x_1x_2\frac{\partial \varphi}{\partial z} + (x_1 + x_2)\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}}\left(-\mathfrak{G}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right),$$
sodass sich die Function $\psi(z, w, \beta)$ nach $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z}dz + \frac{\partial \psi}{\partial w}dw$ aus der Function $\varphi(z, w, a)$ und den Functionen $\mathfrak{E}(z, w)$, $\mathfrak{G}(z, w)$ und $\mathfrak{F}(z, w)$ durch blosse Integration bestimmen lässt als
$$VIII_d^3 \quad \psi(z, w, \beta) = \int \frac{-\mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{E}\frac{\partial \varphi}{\partial w}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}}dz + \int \frac{-\mathfrak{G}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial w}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}}dw + \beta,$$
wobei β eine willkürliche Integrationsconstante ist.

Dass die so gewonnene Curvenschar $\psi(z, w, \beta) = 0$ auch der Bedingung der Orthogonalität zur Curvenschar $\varphi(z, w, a) = 0$ genügt, geht daraus hervor, dass die Substitution von
$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}}\left(-\mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{E}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) \text{ und } \frac{\partial \psi}{\partial w} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}}\left(-\mathfrak{G}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)$$
in die Gleichungen *VII*[2] diese Gleichung zur formalen Identität macht:
$$\mathfrak{E}\frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{-\mathfrak{G}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial w}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}} + \mathfrak{G}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{-\mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{E}\frac{\partial \varphi}{\partial w}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}} = \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{-\mathfrak{G}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial w}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{-\mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{E}\frac{\partial \varphi}{\partial w}}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}}}\right\} \cdot \mathfrak{F}$$
oder
$$\left(-\mathfrak{G}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)\left(\mathfrak{E}\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) + \left(-\mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{E}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) \cdot \left(\mathfrak{G}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) = 0.$$

Dass die Function $\psi(z, w, \beta)$ derselben partiellen Differentialgleichung *VIII.*[3] wie die Function $\varphi(z, w, a)$ unterworfen ist, lässt sich dadurch erweisen, dass man die Gleichungen *g.*

---

*) Wie die Bedingungsgleichung VIII.[3] für die Function $\varphi(z, w, a)$ lediglich aus der ersten Gleichung VIII_b^3: $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_5 \partial w_5} = 0$ und den Gleichungen *a.* hervorgegangen ist, so geht aus der zweiten Gleichung VIII_b^3, d. i. aus $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z_5 \partial w_5} = 0$ in Verbindung mit denselben Gleichungen *a.* für die Function $\psi(z, w, \beta)$ eine ganz analoge Bedingungsgleichung hervor, die sich von VIII.[3] nur durch das Functionszeichen ψ, das an die Stelle von φ zu treten hat, unterscheiden kann.

nach $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial w}$ auflöst und durch diese Auflösungen, nach erforderlicher weiterer partieller Differentiation nach z und nach w, in der Gleichung *VIII.*[3] die Function φ durch die Function ψ ersetzt. Bei dieser Substitution ändert die Gleichung *VIII.*[3] ihre Form nur insoweit, als in ihr das Functionszeichen φ durch das Zeichen ψ ersetzt wird. Die hier angedeutete umständliche Rechnung, die sachlich nichts Neues und Wichtiges bietet, sei, um Raum zu ersparen, hier nicht wiedergegeben. Durch diesen Übergang der Gleichung *VIII.*[3] in ganz dieselbe Gleichung für $\psi(z, w, \beta)$ vermittels jener Substitution ist aber zugleich eine Probe für die Richtigkeit der abgeleiteten Gleichung *VIII.*[3] geliefert.

Für die Substitution *II.*[5] endlich, welche die Transformation des ganz beliebigen, nicht-isometrischen Coordinatensystems z_5, w_5 bewirkt, dessen Coordinatencurven in Bezug auf das Ausgangscoordinatensystem z, w definiert sind durch Nullsetzung der den Gleichungen *VIII.*[3] und VIII_d^3 genügenden Functionen $\varphi(z, w, \alpha)$, $\psi(z, w, \beta)$ gelten die Bestimmungsgleichungen *VI.*[3'] (s. pag. 30.)

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}-\frac{\partial\psi}{\partial w}\right]\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\equiv 0 \text{ und } \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial w}+\frac{z\psi}{\partial w}\right]\frac{\partial W_5}{\partial w_5}\equiv 0.$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich in der Form schreiben:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}(\varphi-\psi)\right]\frac{\partial Z_5}{\partial z_5}+\left[\frac{\partial}{\partial w}(\varphi-\psi)\right]\frac{\partial W_5}{\partial z_5}\equiv 0, \left[\frac{\partial}{\partial z}(\varphi+\psi)\right]\frac{\partial Z_5}{\partial w_5}+\left[\frac{\partial}{\partial w}(\varphi+\psi)\right]\frac{\partial W_5}{\partial w_5}\equiv 0,$$

mithin auf Grund der Substitution *II.*[5] $z = Z_5(z_5, w_5)$, $w = W_5(z_5, w_5)$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\varphi-\psi)\cdot\frac{\partial z}{\partial z_5}+\frac{\partial}{\partial w}(\varphi-\psi)\cdot\frac{\partial w}{\partial z_5}\equiv 0, \frac{\partial}{\partial z}(\varphi+\psi)\cdot\frac{\partial z}{\partial w_5}+\frac{\partial}{\partial w}(\varphi+\psi)\cdot\frac{\partial w}{\partial w_5}\equiv 0, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_5}[\varphi(z, w)-\psi(z, w)]\equiv 0, \frac{\partial}{\partial w_5}[\varphi(z, w)+\psi(z, w)]\equiv 0,$$

Aus diesen beiden Differentialgleichungen folgen sofort die Integrale

$$[\varphi(z, w)-\psi(z, w)]\equiv 2\mu(w_5)+(\alpha-\beta), \quad [\varphi(z, w)+\psi(z, w)]\equiv 2\lambda(z_5)+(\alpha+\beta), \text{ oder}$$

$$[\varphi(z, w)]\equiv\lambda(z_5)+\mu(w_5)+\alpha, \quad [\psi(z, w)]\equiv\lambda(z_5)-\mu(w_5)+\beta,$$

wo $\lambda(z_5)$ und $\mu(w_5)$ zunächst zwei willkürliche und von einander unabhängige Functionen je ihres einen Argumentes bez z_5 und w_5 sind, α und β zwei willkürliche, von einander unabhängige Parameterwerte. Die so gefundenen Darstellungen der Functionen $\varphi(z, w)$, $\psi(z, w)$ haben aber auch den ungeänderten Gleichungen *VI.*[3] zu genügen, die sich in der Form wiedergeben lassen $\frac{\partial\psi}{\partial z_5}-\frac{\partial\varphi}{\partial w_5}\equiv 0, \frac{\partial\psi}{\partial z_5}+\frac{\partial\psi}{\partial w_5}\equiv 0.$ Nun ist nach Vorangehendem

$$\frac{\partial\psi}{\partial z_5}=\lambda'(z_5), \frac{\partial\varphi}{\partial w_5}=\mu'(w_5), \frac{\partial\psi}{\partial z_5}=\lambda'(z_5), \frac{\partial\psi}{\partial w_5}=-\mu'(w_5), \text{ also muss sein}$$

$\lambda'(z_5)\equiv\mu'(w_5)\equiv a$, wo a eine willkürliche Constante ist. Hieraus aber bestimmen sich die beiden Functionen $\lambda(z_5)$ und $\mu(w_5)$ zu $\lambda(_5)=az_5+b$, $\mu(w_5)=aw_5+c$, wobei wiederum b und c zwei willkürliche und von einander unabhängige, ebenso von a unabhängige Constanten sind. Wir erhalten somit zur Bestimmung der Substitutionsfunctionen $z = Z_5(z_5, w_5)$, $w = W_5(z_5, w_5)$ die Relationen $[\varphi(z, w)]\equiv a(z_5+w_5)+(b+c+\alpha)$, $[\psi(z, w)]\equiv a(z_5-w_5)+(b-c+\beta)$, d. h. die Substitution *II.*[5] bestimmt sich durch Auflösung des Gleichungssystems

$$II_a^5 \quad \varphi(z, w)=z_5+w_5+\alpha, \psi(z, w)=z_5-w_5+\beta$$

nach den beiden Variabeln z und w als Unbekannten. In diesen beiden Bestimmungsgleichungen sind zunächst die beiden willkürlichen Constanten $b+c+\alpha$ und $b-c+\beta$, weil von einander

unabhängig, mit den einheitlichen Grössenzeichen α und β belegt, ausserdem ist aber die nach Früherem willkürliche Constante a als der bestimmte Zahlenwert 1 angenommen worden. Letzteres bedeutet insofern keine Specialisierung des Transformationsproblems, als sich dieser Coefficient a bei Nullsetzung der Functionen $\varphi(x, w, a)$ und $\psi(x, w, \beta)$ in der Definition der neuen Coordinatencurven wegheben und mit in die allgemeinen Parametergrössen α und β aufnehmen lässt. Immerhin deuten die willkürlichen Constanten a, b, c den für das neue isometrische Coordinatensystem x_5, w_5 noch verbleibenden Willkürlichkeitsgrad der Massbeziehungen innerhalb desselben an (vergl. I.8, pag. 18 u. folg.)

Das Ergebnis hinsichtlich der Gewinnung der Substitution $x = Z_5(x_5, w_5)$, $W_5(x_5, w_5)$ durch Auflösung der beiden endlichen Gleichungen II_a^5 nach x und w als zwei unbekannten Grössen ist von vorn herein evident und hat allgemein Geltung auch für die vorangehenden Probleme II1. und II2., und zwar auf Grund des gemeinsamen Zieles aller dieser Untersuchungen, durch eine geeignete Coordinatentransformation die beiden Curvenscharen $\varphi(x, w, a) = 0$, $\psi(x, w, \beta) = 0$ in Coordinatencurven $x_5 + w_5 + \alpha = 0$, $x_5 - w_5 + \beta = 0$ überzuführen.

Was schliesslich die Aufstellung der Bedingungsgleichung $VIII.^3$ bezüglich VIII_c^3 (pag. 29.) anbelangt, so kann dieselbe vom rein analytischen Standpunkte aus als ein Schritt betrachtet werden in der Auflösung der partiellen Differentialgleichungssysteme $III.^5$ (pag. 12.) bez. $III_a^{5'}$ (pag. 14.) nach den beiden Substitutionsfunctionen $Z_5(x_5, w_5)$, $W_5(x_5, w_5)$ bei Verfolgung des Transformationsproblemes I5, und zwar als Ersetzung der beiden zu bestimmenden Functionen $Z_5(x_5, w_5)$ und $W_5(x_5, w_5)$ durch eine einzige zu bestimmende Hilfsfunction $\varphi(x, w, a)$, aus welcher dann nach VIII_d^3 die Function $\psi(x, w, \beta)$ durch blosses Integrationsverfahren entwickelt wird, während die beiden ursprünglich gesuchten Functionen $Z_5(x_5, w_5)$, $W_5(x_5, w_5)$ aus jenen beiden Functionen $\varphi(x, w, a)$, $\psi(x, w, \beta)$ wiederum durch blosse Auflösung der beiden endlichen Gleichungen II_a^5 nach den beiden Unbekannten x und w gefunden werden.

Bernh. Chemnitzer.