Ueber die Zusammensetzung kubischer Gleichungen.

In der folgenden Untersuchung habe ich mich bemüht die Frage zu beantworten: „Wie muß man die rationalen Coefficienten einer kubischen Gleichung $x^3 + Bx - C = o$ gestalten, damit die erste Wurzel derselben nach der Cardanischen Formel berechnet nicht blos einem gegebenen Werthe entspricht, sondern auch in dieser Formel die Quadratwurzel oder die Kubikwurzel oder beide zugleich rational werden.“ Bei Lösung dieser Aufgabe konnte vorausgesetzt werden, daß die Coefficienten ganze Zahlen sein, oder richtiger gesagt, die Form ganzer Zahlen haben müssen, da, wie bekannt, die Brüche aus den Coefficienten durch eine einfache Substitution leicht zu entfernen sind.

Am Schluß habe ich noch eine allgemeine Auflösung der kubischen Gleichungen hinzugefügt, die ich bei der Untersuchung der besonderen Fälle, in denen die Cardanische Formel sich algebraisch reduciren läßt, gefunden habe; diese Auflösung führt natürlich wieder zu der längst bekannten Formel, doch dürfte sie nicht ganz ohne Interesse sein, weil sie eine Analogie zur Behandlung der quadratischen Gleichungen darbietet.

§ 1.

Soll in der ersten Wurzel der Gleichung $x^3 + Bx - C = o$, worin B und C rationale ganze Zahlen sind,

$$x = \sqrt[3]{\frac{C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 + 4\left(\frac{B}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 + 4\left(\frac{B}{3}\right)^3}}$$

eine der beiden Wurzeln rational werden, so muß entweder der Radicand der Quadratwurzel ein Quadrat, oder der Radicand der Kubikwurzel ein Kubus sein. Sollen beide Wurzeln verschwinden, so müssen im ersteren Falle auch die Kubikwurzeln rational werden, während im zweiten Falle die Quadratwurzeln von selbst verschwinden.

Sei also $\sqrt{C^2 + 4\left(\frac{B}{3}\right)^3} = t$ einer rationalen Zahl, so folgt daraus $B = 3\sqrt[3]{\frac{t^2 - C^2}{4}}$; da aber B rational ist, so muß $\frac{t^2 - C^2}{4}$ ein vollständiger Kubus sein. Setzt man nun

$$t = 2y + C \text{ also } B = 3\sqrt[3]{y(y + C)}$$

so muß $y + C = p^3 y^2$ angenommen werden, woraus

$$B = 3py \text{ und } y = \frac{1 \pm \sqrt{4Cp^3 + 1}}{2p^3}$$

folgt. Da nun $t = 2y + C$ rational werden soll, so gilt dies auch von y, mithin ist $\sqrt{4\,Cp^3 + 1} = m$, einer rationalen Zahl zu setzen. Hieraus ergiebt sich

$$C = \frac{(m+1)\,(m-1)}{4p^3}.$$

Diesem Ausdruck ist die Form einer ganzen Zahl zu geben, weil C eine solche ist; mithin ist $m = 2np^3 \pm 1$ anzunehmen. Es genügt das obere Zeichen in dieser Form, da das untere zu demselben Resultat nur in etwas anderer Gestalt führt. Sei also $m = 2np^3 + 1$, so wird

$$C = n\,(np^3 + 1); \quad y = \begin{cases} \frac{np^3 + 1}{p^2} \\ -n \end{cases}$$

$$\text{und } B = \begin{cases} \frac{3\,(np^3 + 1)}{p^2} \\ -3np. \end{cases}$$

B und C sind aber ganze Zahlen; also hat der erste Werth von B und y nur Geltung 1) für $p = \pm 1$; dann aber stellt er nur den Fall des zweiten Werthes dar, wenn $p = \pm 1$ und $n = -n_1 \mp 1$ genommen wird, oder 2) wenn im ersten Fall die Bruchform beseitigt wird, für $n = vP^2$ und $p = \frac{1}{P}$, wodurch $B = 3P\,(P + v)$ und $C = vP\,(P + v)$ würde; dann giebt der zweite Fall dasselbe auf doppelte Weise, wenn nämlich $n = \begin{cases} P\,(v+P)^2 \\ -P^2(v+P) \end{cases}$ und $p = \begin{cases} -\frac{1}{v+P} \\ +\frac{1}{P} \end{cases}$ angenommen wird. Mithin kann der erste Fall gänzlich vernachlässigt werden.

Die Form einer kubischen Gleichung also, in welcher $\sqrt{C^2 + 4\left(\frac{B}{3}\right)^3}$ rational werden soll, ist daher:

1) $$x^3 - 3npx - n\,(np^3 + 1) = 0$$

wo, wie sich von selbst versteht, das Zeichen des absoluten Gliedes auch positiv genommen werden kann. Hierin ist

$$x = p\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n}.$$

Soll auch die Kubikwurzel rational werden, so ist $n = v^3$ zu setzen und

2) $$x^3 - 3v^3\,px - v^3\,(v^3\,p^3 + 1) = 0$$

ist daher die Form einer kubischen Gleichung, in deren Wurzel, durch die Cardanische Formel bestimmt, zuerst die Quadratwurzel und dann die Kubikwurzeln rational werden müssen.

Es ist hier nämlich $x = pv^2 + v$.

§ 2.

Es muß nun festgestellt werden, welche Werthe n und p in der gefundenen Gleichung annehmen können. Bei dieser Bestimmung ist zweierlei zu beachten: erstens, daß die Coefficienten 3np und $n\,(np^3 + 1)$ die Form ganzer rationaler Zahlen behalten, und zweitens, daß n in der Wurzel der Gleichung nicht ein Binom von der Form $A \pm \sqrt{B}$ werde, weil sonst die Bedingung, daß die Quadratwurzel verschwinden solle, wieder aufgehoben würde.

Zunächst ist klar, daß n und p jede beliebige ganze positive und negative Zahl sein können.

Sei z. B. $p = 1$, so ergiebt sich die Reihe:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } n = -3 \text{ wird} & x^3 + 9x - 6 = 0 & & x = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} \\
n = -2 \quad " & x^3 + 6x - 2 = 0 & & x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \\
n = -1 \quad " & x^3 + 3x \quad = 0 & & x = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{1} = 0 \\
n = 0 \quad " & x^3 + 0x \quad = 0 & & x = 0 \\
n = +1 \quad " & x^3 - 3x - 2 = 0 & & x = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 2 \\
n = +2 \quad " & x^3 - 6x - 6 = 0 & & x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} \\
n = +3 \quad " & x^3 - 9x - 12 = 0 & & x = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}
\end{array}$$

Oder für $p = -3$

$$\begin{array}{llll}
\text{und } n = -3 \text{ wird} & x^3 - 27x + 246 = 0 & & x = -3\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} \\
n = -2 \quad " & x^3 - 18x + 110 = 0 & & x = -3\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \\
n = -1 \quad " & x^3 - 9x + 28 = 0 & & x = -3\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{1} = -4 \\
n = 0 \quad " & x^3 + 0x \quad = 0 & & x = 0 \\
n = +1 \quad " & x^3 + 9x + 26 = 0 & & x = -3\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = -2 \\
n = +2 \quad " & x^3 + 18x + 106 = 0 & & x = -3\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} \\
n = +3 \quad " & x^3 + 27x + 240 = 0 & & x = -3\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}
\end{array}$$

Es muß also B stets eine durch 3 theilbare Zahl sein; die Coefficienten von x bilden für ein bestimmtes p eine arithmetische Reihe und die absoluten Glieder eine Progression der zweiten Ordnung.

Eben so lassen sich aus Form 2 leicht Gleichungen aufstellen, in denen nach einander Quadratwurzel und Kubikwurzel verschwinden. Sei

z. B. $p = 2$, so wird

$$\begin{array}{llll}
\text{für } v = -3 & x^3 + 162x - 5805 = 0 & & x = 15 \\
v = -2 & x^3 + 48x - 504 = 0 & & x = 6 \\
v = -1 & x^3 + 6x - 7 = 0 & & x = 1 \\
v = 0 & x^3 \quad = 0 & & x = 0 \\
v = +1 & x^3 - 6x - 9 = 0 & & x = 3 \\
v = +2 & x^3 - 48x - 520 = 0 & & x = 10 \\
v = +3 & x^3 - 162x - 5859 = 0 & & x = 21
\end{array}$$

Soll nun eine Gleichung aufgestellt werden, die als erste Wurzel einen vorher bestimmten Werth a darbietet, und ist a eine ganze positive oder negative Zahl, so muß

$$pv^2 + v = a$$

gesetzt werden, also $p = \frac{a - v}{v^2}$; hieraus ergiebt sich die Form

$$3) \quad \begin{cases} x^3 - 3v(a - v)x - \left((a - v)^3 + v^3\right) = 0 \text{ für } x = a \\ x^3 - 3v(a - v)x - (a^3 - 3a^2v + 3av^2) = 0 \end{cases}$$

Sei z. B. $a = 7$, so wird

$$\text{für } \left.\begin{array}{ll} v = +3 & x^3 - 36x - 91 = 0 \\ v = +2 & x^3 - 30x - 133 = 0 \\ v = +1 & x^3 - 18x - 217 = 0 \\ v = 0 & x^3 - 343 = 0 \\ v = -1 & x^3 + 24x - 511 = 0 \\ v = -2 & x^3 + 54x - 721 = 0 \\ v = -3 & x^3 + 90x - 873 = 0 \end{array}\right\} x = 7$$

in denen nach einander die beiden Wurzeln der Cardanischen Formel rational werden. Es giebt also unendlich viele Gleichungen, die für eine bestimmte Wurzel obigen Bedingungen Genüge leisten.

Abstrahirt man von der Rationalität der Kubikwurzel und verlangt, daß die Gleichung den Wurzelwerth $b\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}$ darbiete, so ist nur $p = b$ und $n = a$ in Gleichung 1 zu setzen, also wird

$$4) \qquad x^3 - 3abx - a(ab^3 + 1) = 0$$

sein müssen. Soll z. B. $x = -5\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7}$ werden, so wird $x^3 + 105x + 6118 = 0$ die gewünschte Gleichung sein; hier ist also nur auf eine einzige Art der Forderung Genüge zu leisten.

§ 3.

Es kann jedoch auch zweitens in der gefundenen Gleichung $x^3 - 3npx - n(np^3 + 1) = 0$ die Größe p ein Bruch sein, ohne daß die Coefficienten derselben aufhören ganze Zahlen zu bleiben. Setzt man nämlich $p = \frac{q}{\pi}$ und $n = \nu\pi^2$ so wird $3pn = 3q\nu\pi$ und $n(np^3 + 1) = \nu\pi(q^3\nu + \pi)$ und die Gleichung 1 geht in die Form über:

$$5) \qquad x^3 - 3q\nu\pi x - \nu\pi(q^3\nu + \pi) = 0$$

worin q, ν, π zunächst wieder ganze Zahlen sind, und deren Wurzel

$$x = \frac{q}{\pi}\sqrt[3]{\nu^2\pi^4} + \sqrt[3]{\nu\pi^2} = q\sqrt[3]{\nu^2\pi} + \sqrt[3]{\nu\pi^2}$$

ist. In dieser letzten Form ist also der Radicand der ersten Kubikwurzel nicht das Quadrat vom Radicand der zweiten Wurzel; nur macht das Produkt beider Radicanden einen vollständigen Kubus aus.

Setzen wir z. B. $q = 3$, $\nu = -2$, so wird

$$\text{für } \pi = +4;\quad x^3 + 72x - 400 = 0;\quad x = 3\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{32} = 6\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}$$

$$\pi = +3;\quad x^3 + 54x - 288 = 0;\quad x = 3\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18}$$

$$\pi = +2;\quad x^3 + 36x - 208 = 0;\quad x = 3\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{8} = 4$$

$$\pi = -3;\quad x^3 - 54x + 342 = 0;\quad x = -3\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18}$$

$$\pi = -4;\quad x^3 - 72x + 464 = 0;\quad x = -6\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}$$

$$\pi = -5;\quad x^3 - 90x + 590 = 0;\quad x = -3\sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50}$$

Setzen wir in Gleichung 5 statt ν und π ihre Kuben, so ergiebt sich die Form

$$6) \qquad x^3 - 3q\nu^3\pi^3 x - \nu^3\pi^3(q^3\nu^3 + \pi^3) = 0$$

worin $x = q\nu^2\pi + \nu\pi^2$, also die Quadratwurzel wieder verschwindet, und welche für $\pi = 1$ in die Form 2 übergeht.

Wird z. B. $q = -5$, $\nu = 4$ und $\pi = 2$ angenommen, so wird

$$x^3 + 7680x + 4091904 = 0; \quad x = -144.$$

Soll nun für eine gegebene Wurzel a eine Gleichung nach der Form 6 gebildet werden, so reducirt sich dieselbe auf die Form 3; liefert also nichts Neues. Ist dagegen eine Wurzel von der Form $q\sqrt[3]{\nu^2\pi} + \sqrt[3]{\nu\pi^2} = \pi\left(q\sqrt[3]{\frac{\nu^2}{\pi^2}} + \sqrt[3]{\frac{\nu}{\pi}}\right)$ gegeben, z. B. $x = 4\sqrt[3]{63} + \sqrt[3]{147}$ so wird $q = 4$; $\nu^2\pi = 63$; $\nu\pi^2 = 147$ also $\nu = 3$ und $\pi = 7$ zu setzen sein und die einzige Gleichung, welche man erhält, ist:

$$x^3 - 252x - 4179 = 0$$

Es könnten in der Gleichung 5 π und q auch einfache Quadratwurzelgrößen sein, z. B. $\pi = \varrho\sqrt{\sigma}$ und $q = \tau\sqrt{\sigma}$, dann erhielte man die Form

$$x^3 - 3\nu\varrho\sigma\tau x - \nu\varrho\sigma(\nu\sigma\tau^3 + \varrho) = 0$$

die mit der Form 5 wieder identisch wird, wenn man $\nu\sigma = \bar{\nu}$, , $\tau = q$, , $\varrho = \pi$, setzt, so daß man aus ihr keinen besonderen Nutzen ziehen kann.

Ferner könnte $q = \alpha\sqrt[3]{\delta}$, $\nu = \beta\sqrt[3]{\delta}$, $\pi = \gamma\sqrt[3]{\delta}$ gesetzt werden; doch würde auch durch diese Substitution nicht mehr erreicht, als die Gleichung 5 schon bietet.

§ 4.

Betrachten wir nun in den gewonnenen Gleichungen die Coefficienten näher, und untersuchen wir die Frage, wenn B gegeben ist, welche und wie viel Werthe kann C annehmen, wenn zugleich die Quadratwurzel oder beide Wurzeln rational werden sollen; und die umgekehrte Frage, wenn C gegeben ist, wie viel und welche Werthe wird B erhalten können?

Es ist aus dem Vorangegangenen klar, daß B stets eine durch 3 theilbare ganze Zahl sein muß, ich werde daher im Folgenden stets

$$B = 3b$$

setzen können. Sei nun in Gleichung 2

$$-3\nu^3 p = 3b$$

also $p = -\frac{b}{\nu^3}$ so wird $C = -\frac{b^3}{\nu^3} + \nu^3$ (oder $C = -\frac{B^3}{27\nu^3} + \nu^3$, dieselbe Gleichung, welche in der Cardanischen Auflösung vorkommt).

Diese Form muß eine ganze Zahl werden; es muß also entweder $\nu = \pm 1$ sein, wodurch sich 2 Werthe ergeben $C = -b^3 + 1$ und $C = b^3 - 1$, die sich nur durch das Zeichen unterscheiden. Oder wenn b nicht eine Primzahl ist, muß ν einer der Factoren von b sein und dann kommt es eben darauf an, in wie viel derselben b sich zerlegen läßt, und zwar kann ν auch hier sowohl positiv als negativ genommen werden. Die Factoren, welche größer als $\sqrt{b}$ sind, geben aber denselben Werth, welchen die entsprechenden $< \sqrt{b}$ für das entgegengesetzte Zeichen darbieten. Zwei Beispiele mögen dies deutlich machen.

Sei $B = 21$ also $b = 7$, so gehört dazu nur

$$C = -b^3 + 1 = -342 \text{ und } C = +b^3 - 1 = 342$$

also nur ein Werth, wenn man vom Zeichen abstrahirt.

Ist aber $B = 36$, also $b = 12$, so sind außer 1 noch die Factoren 2, 3 zu beachten; also erhält man $C = \mp 1727$; $C = \mp 208$; $C = \mp 37$ drei Werthe.

Im Ganzen giebt es also für ein bestimmtes $B = 36$ so viel verschiedene Werthe von C als in b Factoren von 1 bis $\sqrt{b}$ enthalten sind, wenn beide Wurzeln rational werden sollen.

Wäre aber C gegeben, so entsteht die Bedingungsgleichung $b^3 = \nu^3 (\nu^3 - C)$, also $b = \nu\sqrt[3]{\nu^3 - C}$. Hieraus folgt zunächst, daß C niemals ein Kubus sein darf, da die Differenz zweier Kuben nicht wieder eine Potenz desselben Grades liefert. Ferner muß C eine Differenz zweier Kuben der natürlichen Zahlenreihe sein, also aus den Zahlen 7, 19, 26, 37, 56, 63 ꝛc. genommen werden, wenn die Aufgabe möglich sein soll, und auch unter dieser Beschränkung giebt es nur einen einzigen Werth für b oder B. Sei z. B. $C = 56$ gegeben, so ist $\nu^3 = 64$ und $\nu = 4$ zu wählen, also wird $B = 12\sqrt[3]{64 - 56} = 24$ werden.

Soll jedoch blos die Quadratwurzel, nicht auch die Kubikwurzel rational werden, so giebt es für ein beliebiges $B = 3b$ vielmehr Werthe für C. Es ist alsdann die Gleichung 1 zu benutzen; nach dieser ist nämlich

$$3b = -3pn \text{ also } p = -\frac{b}{n} \text{ und } C = -\frac{b^3}{n} + n$$

es muß also hier n ein Factor von b^3 sein, von 1 bis $\sqrt{b^3}$. Ist b eine Primzahl, so giebt es wie oben nur einen Werth für C, wenn vom Zeichen abstrahirt wird; ist b aber theilbar, so erhält man viel mehr Werthe als im vorigen Fall.

Ist wiederum $B = 36$ und $b = 12$, so wird

für $n = \pm 1$	$C = \mp 1727$	für $n = \pm 12$	$C = \mp 132$
$n = \pm 2$	$C = \mp 862$	$n = \pm 16$	$C = \mp 92$
$n = \pm 3$	$C = \mp 573$	$n = \pm 18$	$C = \mp 78$
$n = \pm 4$	$C = \mp 428$	$n = \pm 24$	$C = \mp 48$
$n = \pm 6$	$C = \mp 282$	$n = \pm 27$	$C = \mp 37$
$n = \pm 8$	$C = \mp 208$	$n = \pm 32$	$C = \mp 22$
$n = \pm 9$	$C = \mp 183$	$n = \pm 36$	$C = \mp 12$

Hiernach lassen sich für dasselbe B auch eine Menge kubischer Gleichungen aufstellen, bei deren Ausrechnung in der Cardanischen Formel die Quadratwurzel wegfällt. So giebt für obiges Beispiel

$$x^3 + 36x + 1727 = 0 \qquad x = -11$$

$$x^3 + 36x + 862 = 0 \qquad x = -6\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$$

$$x^3 + 36x + 573 = 0 \qquad x = -4\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}$$

$$x^3 + 36x + 428 = 0 \qquad x = -3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}$$

$$x^3 + 36x + 282 = 0 \qquad x = -2\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{6}$$

$$x^3 + 36x + 208 = 0 \qquad x = -4$$

$$x^3 + 36x + 183 = 0 \qquad x = -\sqrt[3]{9} + 4\sqrt[3]{3}$$

$$x^3 + 36x + 132 = 0 \qquad x = -2\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12}$$

$$x^3 + 36x + 92 = 0 \qquad x = -3\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$$

$$x^3 + 36x + 78 = 0 \qquad x = -2\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{18}$$
$$x^3 + 36x + 48 = 0 \qquad x = -2\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3}$$
$$x^3 + 36x + 37 = 0 \qquad x = -1$$
$$x^3 + 36x + 22 = 0 \qquad x = -3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}$$
$$x^3 + 36x + 12 = 0 \qquad x = -2\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{36}.$$

Wäre umgekehrt C gegeben und soll ein Werth von B gesucht werden, durch den $\sqrt{C^2 + 4b^3}$ rational wird, so gilt die Gleichung: $C = n(np^3 + 1)$, es kann also C nur ein dieser Form entsprechender Werth sein; daraus folgt $n = \frac{-1 \pm \sqrt{4Cp^3 + 1}}{2p^3}$, es wird mithin n im allgemeinen wenigstens zwei Werthe haben, und dadurch werden auch zwei Werthe für B sich ergeben. Man müßte sich nun eine Tabelle der möglichen Werthe von C aufstellen und die entsprechenden Werthe von n und p in $B = -3np$ einsetzen.

Würden endlich die beiden Bedingungen, daß die Gleichung eine bestimmte erste ganzzahlige Wurzel haben, und $B = 3b$ einer gegebenen Größe gleich sein soll, vereinigt, so ist in der Gleichung 3

$$x^3 - 3\nu(a - \nu)x - \left((a - \nu)^3 + \nu^3\right) = 0$$

$$-3\nu(a - \nu) = 3b, \text{ also } \nu = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \text{ und } a - \nu = \frac{a \mp \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

Diese Werthe geben zwar auch ein rationales letztes Glied, aber die Quadratwurzel in der Cardanischen Formel bliebe irrational; es muß daher $\sqrt{a^2 + 4b} = m$ gesetzt werden, wodurch $b = \frac{m^2 - a^2}{4}$ und $\nu = \frac{a \pm m}{2}$, $a - \nu = \frac{a \mp m}{2}$ und die Gleichung $x^3 + 3\frac{m^2 - a^2}{4}x - \frac{a(a^2 + 3m^2)}{4} = 0$ würde.

Es muß also, damit die Aufgabe möglich werde,

1) $a^2 + 4b$ ein vollständiges Quadrat sein;

2) muß die Wurzel aus diesem Quadrat zugleich mit a grade oder ungrade sein.

Ein Beispiel möge dies deutlich machen; sei $a = 5$ gegeben, so wird um der Bedingung $a^2 + 4b = m^2$ zu genügen, zu setzen sein

$$25 + 4 \,.\, 6 = 7^2 \text{ also } \nu = \frac{5 \pm 7}{2} = 6 \text{ oder } -1\,;\ b = 6\,;\ C = 215$$
$$25 + 4 \,.\, 14 = 9^2 \text{ also } \nu = \frac{5 \pm 9}{2} = 7 \text{ oder } -2\,;\ b = 14\,;\ C = 335$$
$$25 + 4 \,.\, 24 = 11^2 \text{ also } \nu = \frac{5 \pm 11}{2} = 8 \text{ oder } -3\,;\ b = 24\,;\ C = 485$$
$$25 + 4 \,.\, 36 = 13^2 \text{ also } \nu = \frac{5 \pm 13}{2} = 9 \text{ oder } -4\,;\ b = 36\,;\ C = 665$$

Hiernach kann also für ein gegebenes a, nicht jedes beliebige b gewählt werden, wenn die Quadratwurzel rational werden soll.

§ 5.

Gehen wir nun zur Betrachtung des zweiten Hauptfalles, wenn nämlich die Kubikwurzel allein rational wird; abstrahiren wir also zunächst von der Rationalität der Quadratwurzel, so muß der Ausdruck $\frac{C}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{C^2 + 4\left(\frac{B}{3}\right)^3}$ ein vollständiger Kubus werden; setzen wir ihn also gleich $\left(\frac{z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{y}\right)^3$, so wird

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{z+\sqrt{y}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{z-\sqrt{y}}{2}\right)^3} = \frac{z+\sqrt{y}}{2} + \frac{z-\sqrt{y}}{2} = z$$

Dann verschwinden also die Quadratwurzeln von selbst und z wird als Wurzel der Gleichung $x^3 + Bx - C = 0$ jedenfalls in C als Factor enthalten sein müssen, d. h. $\frac{C}{z}$ muß eine ganze Zahl geben, auch wenn z ein Bruch sein sollte.

Ist also $\frac{C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 + 4\left(\frac{B}{3}\right)^3} = \left(\frac{z+\sqrt{y}}{2}\right)^3$

und $\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 + 4\left(\frac{B}{3}\right)^3} = \left(\frac{z+\sqrt{y}}{2}\right)^3$

so muß $\frac{C}{2} = \frac{z^3 + 3zy}{2}$ oder $4C = z^3 + 3zy$

und $\frac{1}{2}\sqrt{C^2 + 4\left(\frac{B}{3}\right)^3} = \frac{(3z^2 + y)\sqrt{y}}{8}$ oder $4\sqrt{C^2 + 4\left(\frac{B}{3}\right)^3} = (3z^2 + y)\sqrt{y}$ sein.

Aus der ersten Gleichung folgt

$$y = \frac{4C - z^3}{3z}$$

und in die zweite substituirt:

$$\frac{(C + 2z^3)^2\,(4C - z^3)}{z^3} = 27C^2 + 4B^3$$

Die rechte Seite ist eine ganze Zahl, also gilt dies auch von der linken, und dies ist in Uebereinstimmung mit dem oben Gesagten, daß z ein Factor von C sein muß. Es könnte aber auch z^2 oder z^3, oder, wenn $z = \zeta\vartheta$ gesetzt wird $\zeta^2\vartheta$, $\zeta^3\vartheta$, $\zeta^3\vartheta^2$ in C enthalten sein, und alle diese Fälle werden besondere Modificationen derjenigen Gleichung darbieten, die durch die Annahme $C = mz$ erhalten wird.

Gemäß dieser Substitution wird obige Gleichung übergehen in

$$(m + 2z^2)^2\,(4m - z^2) = 27C^2 + 4B^3$$

Und wenn man auch rechts mz für C substituirt,

$$\text{in } m^3 - 3m^2z^2 + 3mz^4 - z^6 = B^3$$

also ist $B = m - z^2$ zu setzen und die Gleichung hat die Form

$$7) \qquad x^3 + (m - z^2)\,x - mz = 0$$

Hier ist $x = z$ die erste Wurzel (die sich auch ergiebt, wenn man die Gleichung in die Form $x\,(x^2 - z^2) + m\,(x - z) = 0$ bringt) und $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{4C - z^3}{3z}} = \sqrt{\frac{4m - z^2}{3}}$. Man erhält dieselbe Gleichung auch durch Multiplication von

$$(x + \alpha)\,(x + \beta)\,\big(x - (\alpha + \beta)\big) = x^3 + \big(\alpha\beta - (\alpha + \beta)^2\big)\,x - \alpha\beta\,(\alpha + \beta) = 0$$

wenn $\alpha\beta = m$ und $\alpha + \beta = z$ gesetzt wird; es ist also m das Product zweier Wurzeln und z die dritte Wurzel, was $C = mz$ ebenfalls ergiebt.

Was nun die Werthe anlangt, welche m und z in Gleichung 7 annehmen können, so ist klar, daß dies weder Brüche noch eingliedrige irrationale Zahlen sein können, weil zugleich $m - z^2$ und mz ganze rationale Zahlen bleiben müssen. Es sind hiernach m und z entweder ganze Zahlen oder irrationale Binome.

Betrachten wir den ersten Fall, so wird für ein negatives m stets der sogenannte irreducible Fall eintreten, während für ein positives m dies nur Statt findet für $4m < z^2$; wird $4m = z^2$, so verschwindet die Quadratwurzel, und die drei Wurzeln der Gleichung sind $x_1 = z$, $x_{2,3} = -\frac{z}{2}$ doch

werden in diesem Falle, wenn nicht z eine grade Zahl ist, die Coeffizienten Brüche bleiben. Wird endlich $4m > z^2$, so tritt der reducible Fall ein, und giebt zugleich $4m - z^2$ ein Quadrat, so muß die Gleichung **2** wieder zum Vorschein kommen.

§ 6.

Ist eine Wurzel $\pm a$ gegeben, so wird die Gleichung die Gestalt

8) $$x^3 + (m - a^2)\,x \mp am = 0$$ annehmen.

Sei z. B. $a = +5$, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l}
\text{für } m = 9\ ;\ x^3 - 16x - 45 = 0\ ;\ x = \sqrt[3]{\left(\frac{5+\sqrt{\frac{11}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{5-\sqrt{\frac{11}{3}}}{2}\right)^3} \\
m = 8\ ;\ x^3 - 17x - 40 = 0\ ;\ x = \sqrt[3]{\left(\frac{5+\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{5-\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}\right)^3} \\
m = 7\ ;\ x^3 - 18x - 35 = 0\ ;\ x = \sqrt[3]{\left(\frac{5+1}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{5-1}{2}\right)^3} \\
m = 6\ ;\ x^3 - 19x - 30 = 0\ ;\ x = \sqrt[3]{\left(\frac{5+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{5-\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} \\
m = 5\ ;\ x^3 - 20x - 25 = 0\ ;\ x = \sqrt[3]{\left(\frac{5+\sqrt{-\frac{5}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{5-\sqrt{-\frac{5}{3}}}{2}\right)^3}
\end{array}\right\} = +5$$

und für $a = -5$ dieselben Gleichungen nur mit umgekehrtem Zeichen des absoluten Gliedes.

Ist dagegen B bestimmt und die Wurzel beliebig, so wird $m - z^2 = B$, also $m = B + z^2$ und $C = z^3 + Bz$, mithin

9) $$x^3 + Bx - (z^3 + Bz) = 0$$

wozu $x = z$ und $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{4m - z^2}{3}} = \sqrt{\frac{4B + 3z^2}{3}}$ gehören.

Nur wenn B negativ und $< 3z^2$ angenommen wird, kann der irreducible Fall eintreten, übrigens ist die Zahl der Gleichungen unbegrenzt.

Sei z. B. $B = -11$, so wird

$$\text{für } z = +5\ ;\ x^3 - 11x - 70 = 0\ ;\ x = \sqrt[3]{\left(\frac{+5+\sqrt{\frac{31}{3}}}{2}\right)^3} = \sqrt[3]{\left(\frac{+5-\sqrt{\frac{31}{3}}}{2}\right)^3} = 5$$

$$z = +4\ ;\ x^3 - 11x - 20 = 0\ ;\ x = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3} = 4$$

$$z = +3\ ;\ x^3 - 11x + 6 = 0\ ;\ x = \sqrt[3]{\left(\frac{3+\sqrt{-\frac{17}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3-\sqrt{-\frac{17}{3}}}{2}\right)^3} = 3$$

$$z = +2\ ;\ x^3 - 11x + 14 = 0\ ;\ x = \sqrt[3]{\left(1+2\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(1-2\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)^3} = 2$$

Werden beide Bedingungen vereinigt, also $z = a$ und $m - z^2 = B$ gesetzt, so erhält man die ganz bestimmte Form:

$$x^3 + Bx - (a^3 + Ba) = 0$$

Wäre drittens C gegeben, also $mz = C$, mithin $m = \frac{C}{z}$, so wird $B = \frac{C}{z} - z^2$ und die Gleichung

$$10) \qquad x^3 + \left(\frac{C}{z} - z^2\right) x - C = 0$$

worin $x = z$ und $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{4C - z^3}{3z}}$. Da hier $\frac{C}{z} - z^2$ eine ganze Zahl sein soll, so kommt es auf die Factoren an, in welche sich C zerlegen läßt; ist $C = \alpha^v \beta^w \gamma^u \ldots$ so werden $(v + 1)(w + 1)(u + 1) \ldots$ Fälle möglich sein.

Sei z. B. $C = 24 = 2^3 . 3^1$, so sind $4 . 2 = 8$ Gleichungen mit ganzen Coefficienten aufzustellen; nämlich:

$$\text{für } z = 1 ; x^3 + 23x - 24 = 0 . x = \sqrt[3]{\left(\frac{1+\sqrt{\frac{95}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{1-\sqrt{\frac{95}{3}}}{2}\right)^3}$$

$$z = 2 ; x^3 + 8x - 24 = 0 . x = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{\tfrac{11}{3}})^3} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{\tfrac{11}{3}})^3}$$

$$z = 3 ; x^3 - x - 24 = 0 . x = \sqrt[3]{\left(\frac{3+\sqrt{\frac{23}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3-\sqrt{\frac{23}{3}}}{2}\right)^3}$$

$$z = 4 ; x^3 - 10x - 24 = 0 . x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{\tfrac{2}{3}})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{\tfrac{2}{3}})^3}$$

$$z = 6 ; x^3 - 32x - 24 = 0 . x = \sqrt[3]{(3+\sqrt{-\tfrac{5}{3}})^3} + \sqrt[3]{(3-\sqrt{-\tfrac{5}{3}})^3}$$

$$z = 8 ; x^3 - 61x - 24 = 0 . x = \sqrt[3]{(4+\sqrt{-\tfrac{13}{3}})^3} + \sqrt[3]{(4-\sqrt{-\tfrac{13}{3}})^3}$$

$$z = 12 . x^3 - 142x - 24 = 0 . x = \sqrt[3]{(6+\sqrt{-\tfrac{34}{3}})^3} + \sqrt[3]{(6-\sqrt{-\tfrac{34}{3}})^3}$$

$$z = 24 . x^3 - 575x - 24 = 0 . x = \sqrt[3]{(12+\sqrt{-\tfrac{143}{3}})^3} + \sqrt[3]{(12-\sqrt{-\tfrac{143}{3}})^3}$$

§ 7.

Soll endlich die Quadratwurzel $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{4m - z^2}{3}}$ einen bestimmten Wurzelwerth $\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ nach Absonderung des quadratischen Factors darbieten, soll also

$$\sqrt{\frac{4m - z^2}{3}} = \pi \sqrt{\frac{\alpha}{3}} \text{ sein,}$$

so wird $m = \frac{\pi^2\alpha + z^2}{4}$ und die Gleichung:

$$11) \qquad x^3 + \left(\frac{\pi^2\alpha - 3z^2}{4}\right) x - z \left(\frac{\pi^2\alpha + z^2}{4}\right) = 0$$

sich ergeben. Setzt man hierin $\alpha = 3\nu^2$, so wird die Quadratwurzel rational, und die Gleichung

$$x^3 + 3\left(\frac{\pi^2\nu^2 - z^2}{4}\right)x - z\left(\frac{3\pi^2\nu^2 + z^2}{4}\right) = 0$$

muß, da für dieselbe beide Wurzeln in der Cardanischen Formel verschwinden, identisch mit der früher gefundenen Gleichung

$$x^3 - 3pq^3x - q^3(p^3q^3 + 1) = 0$$

sein. Dies läßt sich so nachweisen: Sollen beide Gleichungen dieselben Werthe für x darbieten, so muß

$$-pq^3 = \frac{\pi^2\nu^2 - z^2}{4} \text{ und } q^3(p^3q^3 + 1) = z\left(\frac{3\pi^2\nu^2 + z^2}{4}\right)$$

mithin $\pi^2\nu^2 = z^2 - 4pq^3$ und

$$z^3 - 3pq^3z - q^3(p^3q^3 + 1) = 0$$

werden. Da aber $z = x$ ist, so ergiebt sich zur Bestimmung von z die bereits früher besprochene Gleichung.

Ist aber $\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ nicht rational, so müssen die Coefficienten der Gleichung **11** in die Form ganzer Zahlen gebracht werden. Dies ist aber allgemein nur möglich, wenn π und z grade Zahlen sind, und nur wenn $\alpha = 4n - 1$ dürfen π und z ungrade Zahlen oder wenn $\alpha = 4n$ darf blos z eine grade Zahl sein. Es hat also z für ein beliebiges α nicht auch einen beliebigen Werth, und nur, wenn $\alpha = 4n - 1$ hört jede Einschränkung auf. Da aber $\sqrt{\frac{\alpha}{3}} = \sqrt{\frac{4n}{3}} = 2\sqrt{\frac{n}{3}}$ die Zahl π grade macht, so sind blos zwei Fälle zu untersuchen, wenn nämlich α beliebig, π und z aber grade, oder wenn alle drei Zahlen ungrade sind, wobei α durch $4n - 1$ auszudrücken ist. (Dagegen können für $\alpha = 4n + 1$ π und z nur grade sein.)

Im ersteren Falle sei $\pi = 2p$ und $z = 2\zeta$, so erhält man die Gleichung

12) $$x^3 + (p^2\alpha - 3\zeta^2)x - 2\zeta(p^2\alpha + \zeta^2) = 0$$

in welcher $x = 2\zeta$ und $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{4m - z^2}{3}} = \pi\sqrt{\frac{\alpha}{3}} = 2p\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ ist.

Sei z. B. $\alpha = -10$ und $x = 2$, also $\zeta = 1$, so wird, wenn

$$\left.\begin{array}{l}
p = \pm 1;\ x^3 - 13x + 18 = 0;\ x = \sqrt[3]{(1 - \sqrt{-\frac{10}{3}})^3} + \sqrt[3]{(1 + \sqrt{-\frac{10}{3}})^3} \\
p = \pm 2;\ x^3 - 43x + 78 = 0;\ x = \sqrt[3]{(1 - 2\sqrt{-\frac{10}{3}})^3} + \sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{-\frac{10}{3}})^3} \\
p = \pm 3;\ x^3 - 93x + 178 = 0;\ x = \sqrt[3]{(1 - 3\sqrt{-\frac{10}{3}})^3} + \sqrt[3]{(1 + 3\sqrt{-\frac{10}{3}})^3} \\
p = \pm 4;\ x^3 - 163x + 318 = 0;\ x = \sqrt[3]{(1 - 4\sqrt{-\frac{10}{3}})^3} + \sqrt[3]{(1 + 4\sqrt{-\frac{10}{3}})^3}
\end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ \sqrt{y} = \pi\sqrt{-\frac{10}{3}} \end{array}$$

und für $\alpha = +10$; $x = 2$, wenn

$$\left.\begin{array}{l}
p = \pm 1;\ x^3 + 7x - 22 = 0;\ x = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{\frac{10}{3}})^3} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{\frac{10}{3}})^3} \\
p = \pm 2;\ x^3 + 37x - 82 = 0;\ x = \sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{\frac{10}{3}})^3} + \sqrt[3]{(1 - 2\sqrt{\frac{10}{3}})^3} \\
p = \pm 3;\ x^3 + 87x - 182 = 0;\ x = \sqrt[3]{(1 + 3\sqrt{\frac{10}{3}})^3} + \sqrt[3]{(1 - 3\sqrt{\frac{10}{3}})^3} \\
p = \pm 4;\ x^3 + 157x - 322 = 0;\ x = \sqrt[3]{(1 + 4\sqrt{\frac{10}{3}})^3} + \sqrt[3]{(1 - 4\sqrt{\frac{10}{3}})^3}
\end{array}\right\} x = 2;\ \sqrt{y} = \pi\sqrt{\frac{10}{3}}$$

Im zweiten Falle ist $\pi = 2p + 1$, $z = 2\zeta + 1$ und $\alpha = 4n - 1$ zu setzen, wodurch die Gleichung

13) $$x^3 + [p(4n - 1)(p + 1) - 3\zeta(\zeta + 1) + n - 1]x - (2\zeta + 1)[p(p + 1)(4n - 1) + \zeta(\zeta + 1) + n] = 0$$

(Oder bequemer zum Ausrechnen

$$x^3 + \left[\frac{(2p+1)^2(4n-1) - 3(2\zeta+1)^2}{4}\right] x - (2\zeta+1)\left[\frac{(2p+1)^2(4n-1) + (2\zeta+1)^2}{4}\right] = 0)$$

sich herausstellt, in welcher

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{2\zeta+1+(2p+1)\sqrt{\frac{4n-1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{2\zeta+1-(2p+1)\sqrt{\frac{4n-1}{3}}}{2}\right)^3} = 2\zeta+1$$

ist. Sei z. B. $\frac{4n-1}{3} = \frac{7}{3}$ also $n = 2$ und dazu $2\zeta + 1 = x = -5$ also $\zeta = -3$ gegeben, so ist für

$$\left.\begin{array}{l}
p = 0 \text{ oder } -1;\ x^3 - 17x + 40 = 0;\ x = \sqrt[3]{\left(\frac{-5+\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-5-\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}\right)^3} \\
p = +1 \text{ oder } -2;\ x^3 - 3x + 110 = 0;\ x = \sqrt[3]{\left(\frac{-5+3\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-5-3\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}\right)^3} \\
p = +2 \text{ oder } -3;\ x^3 + 25x + 250 = 0;\ x = \sqrt[3]{\left(\frac{-5+5\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-5-5\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}\right)^3} \\
p = +3 \text{ oder } -4;\ x^3 + 67x + 460 = 0;\ x = \sqrt[3]{\left(\frac{-5+7\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-5-7\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}\right)^3}
\end{array}\right\} = -5$$

§ 8.

In der Gleichung 7 können m und z auch irrationale Binome von der Form $M \pm \sqrt{N}$ sein. Um die Gestalt derselben näher zu bestimmen, setzen wir $m = \mu(\alpha \mp \gamma\sqrt{\beta})$ und $z = \alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}$, so wird zwar mz rational, aber

$$m - z^2 = \mu\alpha \mp \mu\gamma\sqrt{\beta} - \alpha^2 \mp 2\alpha\gamma\sqrt{\beta} - \beta\gamma^2,$$

es ist also $\mu = -2\alpha$ zu setzen, so daß $m = -2\alpha(\alpha \mp \gamma\sqrt{\beta})$ wird. Die Form der Gleichung ist also:

$$14) \qquad x^3 - (3\alpha^2 + \beta\gamma^2)\,x + 2\alpha(\alpha^2 - \beta\gamma^2) = 0$$

Hierin ist also $x = \alpha \pm \gamma\beta$ und $\sqrt{y_{2,3}} = \sqrt{\frac{4m-z}{3}} = (3\alpha \mp \gamma\sqrt{\beta})\sqrt{-\frac{1}{3}}$; man erhält sonach durch diese Substitution zugleich die zweite und dritte Wurzel der Gleichung, und damit auch die erste Wurzel -2α, da in Gleichung 10 das zweite Glied fehlt. Für diese erste Wurzel ist noch $\sqrt{y_1}$ zu bestimmen. Sucht man nach der Cardanischen Formel x in obiger Gleichung, so erhält man

$$x = \sqrt[3]{-\alpha(\alpha^2 - \beta\gamma^2) + \frac{\gamma}{3}(9\alpha^2 - \beta\gamma^2)\sqrt{-\frac{\beta}{3}}} + \sqrt[3]{-\alpha(\alpha^2 - \beta\gamma^2) - \frac{\gamma}{3}(9\alpha^2 - \beta\gamma^2)\sqrt{-\frac{\beta}{3}}}$$

Und setzt man nun das Binom

$$-\alpha(\alpha^2 - \beta\gamma^2) \pm \frac{\gamma}{3}(9\alpha^2 - \beta\gamma^2)\sqrt{-\frac{\beta}{3}} = \left(-\alpha \pm v\sqrt{-\frac{\beta}{3}}\right)^3$$

so ergiebt sich $v = \gamma$ als genügender Werth. Es hat somit obige Gleichung die drei Wurzeln

$$x_1 = \sqrt[3]{\left(-\alpha + \gamma\sqrt{-\frac{\beta}{3}}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(-\alpha - \gamma\sqrt{-\frac{\beta}{3}}\right)^3} = -2\alpha$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha + \gamma\sqrt{\beta} + (3\alpha - \gamma\sqrt{\beta})\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha + \gamma\sqrt{\beta} - (3\alpha - \gamma\sqrt{\beta})\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = \alpha + \gamma\sqrt{\beta}$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha - \gamma\sqrt{\beta} + (3\alpha + \gamma\sqrt{\beta})\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha - \gamma\sqrt{\beta} - (3\alpha + \gamma\sqrt{\beta})\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = \alpha - \gamma\sqrt{\beta}$$

Diese Zerlegung der Cardanischen Formel auf dreifache Weise hat bereits Prof. Dr. Büchner 1849 im Programm des Gymnasiums zu Hildburghausen auf anderem Wege dargethan. In Uebereinstimmung mit demselben folgt aus den aufgestellten Formen von x_1, x_2, x_3, daß Allgemein

$$x_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{x_1 + (x_2 - x_3)\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{x_1 - (x_2 - x_3)\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\left(\frac{x_2 + (x_3 - x_1)\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{x_2 - (x_3 - x_1)\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3}$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\left(\frac{x_3 + (x_1 - x_2)\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{x_3 - (x_1 - x_2)\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3}$$

die möglichen Zerlegungen der Cardanischen Formel angeben.

§ 9.

Die Größen α, β, γ in obiger Gleichung können nun beliebige ganze positive und negative Zahlen sein. Ist β eine Quadratzahl, so werden alle drei Wurzeln der Gleichung rationale ganze Zahlen.

Sei z. B. $\alpha = +5$ und $\beta = -7$, so erhält man, wenn man der Reihe nach $\gamma = \pm 1$, ± 2, ± 3, ± 4 setzt:

$$\left.\begin{array}{l}
x^3 - 68x + 320 = 0\,;\ \sqrt{y_1} = \sqrt{\tfrac{7}{3}}\,;\ \sqrt{y_{2,3}} = (15 \mp \sqrt{-7})\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\,;\ x_{2,3} = 5 \pm \sqrt{-7} \\
x^3 - 47x + 530 = 0\,;\ \sqrt{y_1} = 2\sqrt{\tfrac{7}{3}}\,;\ \sqrt{y_{2,3}} = (15 \mp 2\sqrt{-7})\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\,;\ x_{2,3} = 5 \pm 2\sqrt{-7} \\
x^3 - 12x + 880 = 0\,;\ \sqrt{y_1} = 3\sqrt{\tfrac{7}{3}}\,;\ \sqrt{y_{2,3}} = (15 \mp 3\sqrt{-7})\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\,;\ x_{2,3} = 5 \pm 3\sqrt{-7} \\
x^3 - 37x + 1370 = 0\,;\ \sqrt{y_1} = 4\sqrt{\tfrac{7}{3}}\,;\ \sqrt{y_{2,3}} = (15 \mp 4\sqrt{-7})\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\,;\ x_{2,3} = 5 \pm 4\sqrt{-7}
\end{array}\right\}\ x_1 = -10$$

ist aber $\alpha = +5$ und $\beta = +7$, so wird

$$\left.\begin{array}{l}
x^3 - 82x + 180 = 0\,.\ \sqrt{y_1} = \sqrt{-\tfrac{7}{3}}\,;\ \sqrt{y_{2,3}} = (15 \mp \sqrt{7})\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\,;\ x_{2,3} = 5 \pm \sqrt{7} \\
x^3 - 103x - 30 = 0\,.\ \sqrt{y_1} = 2\sqrt{-\tfrac{7}{3}}\,;\ \sqrt{y_{2,3}} = (15 \mp 2\sqrt{7})\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\,;\ x_{2,3} = 5 \pm 2\sqrt{7} \\
x^3 - 138x - 380 = 0\,.\ \sqrt{y_1} = 3\sqrt{-\tfrac{7}{3}}\,;\ \sqrt{y_{2,3}} = (15 \mp 3\sqrt{7})\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\,;\ x_{2,3} = 5 \pm 3\sqrt{7} \\
x^3 - 187x - 870 = 0\,.\ \sqrt{y_1} = 4\sqrt{-\tfrac{7}{3}}\,;\ \sqrt{y_{2,3}} = (15 \mp 4\sqrt{7})\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\,;\ x_{2,3} = 5 \pm 4\sqrt{7}
\end{array}\right\}\ x_1 = -10$$

Ist ferner $\beta = +\delta^2$ ein positives Quadrat, so wird die Gleichung

$$15)\ \left\{\begin{array}{l}
x^3 - (3\alpha^2 + \gamma^2\delta^2)\,x + 2\alpha\,(\alpha^2 + \gamma^2\delta^2) = 0, \text{ oder} \\
x^3 - (3\alpha^2 + \varepsilon^2)\,x + 2\alpha\,(\alpha^2 - \varepsilon^2) = 0 \text{ wenn } \varepsilon = \gamma\delta
\end{array}\right.$$

die allgemeine Form einer kubischen Gleichung sein, in welcher alle drei Wurzeln ganze rationale Zahlen sind. Diese sind nämlich

$$x_1 = -2\alpha\ ;\ x_2 = \alpha + \varepsilon\ ;\ x_3 = \alpha - \varepsilon$$

und es muß mindestens eine derselben eine grade Zahl sein. Die zugehörigen Formen von $\sqrt{y}$ sind

$$\sqrt{y_1} = \varepsilon\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\ ;\ \sqrt{y_2} = (3\alpha - \varepsilon)\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\ ;\ \sqrt{y_3} = (3\alpha + \varepsilon)\sqrt{-\tfrac{1}{3}}.$$

Ist nun eine Wurzel a gegeben, so setze man sie $= \alpha + \varepsilon$ (oder $= \alpha - \varepsilon$, oder, wenn a eine grade Zahl ist $= -2\alpha$). Es ist also $\alpha + \varepsilon = a \quad \alpha = a - \varepsilon$ mithin die Gleichung

$$16) \qquad x^3 - \left(3\,(a-\varepsilon)^2 + \varepsilon^2\right) + 2\,(a-\varepsilon)\left[(a-\varepsilon)^2 - \varepsilon^2\right] = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$x_1 = \sqrt[3]{\left(-(a-\varepsilon) + \varepsilon\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(-(a-\varepsilon) - \varepsilon\sqrt{-\tfrac{1}{3}}\right)^3} = -2\,(a-\varepsilon)$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\left(\frac{a + (3a-4\varepsilon)\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{a - (3a-4\varepsilon)\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = a$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\left(\frac{a - 2\varepsilon + (3a-2\varepsilon)\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{a - 2\varepsilon + (3a-2\varepsilon)\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = a - 2\varepsilon$$

Um an bestimmten Zahlenbeispielen die drei möglichen Zersetzungen zu zeigen, sei $a = 3$, so wird

$$\text{für } \varepsilon = 0\,;\ x^3 - 27x + 54 = 0 \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{(-3)^3} + \sqrt[3]{(-3)^3} = -6 \\ x_2 = \sqrt[3]{\left(\frac{3 + 9\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3 - 9\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = 3 \\ x_3 = \sqrt[3]{\left(\frac{3 + 9\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3 - 9\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = 3 \end{cases}$$

$$\text{für } \varepsilon = +1\,;\ x^3 - 13x + 12 = 0 \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{(-2+\sqrt{-\frac{1}{3}})^3} + \sqrt[3]{(-2-\sqrt{-\frac{1}{3}})^3} = -4 \\ x_2 = \sqrt[3]{\left(\frac{3 + 5\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3 - 5\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = 3 \\ x_3 = \sqrt[3]{\left(\frac{1 + 7\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{1 - 7\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = 1 \end{cases}$$

$$\text{für } \varepsilon = +2\,;\ x^3 - 7x - 6 = 0 \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{(-1+2\sqrt{-\frac{1}{3}})^3} + \sqrt[3]{(-1-2\sqrt{-\frac{1}{3}})^3} = -2 \\ x_2 = \sqrt[3]{\left(\frac{3 + \sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3 - \sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = 3 \\ x_3 = \sqrt[3]{\left(\frac{-1 + 5\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-1 + 5\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = -1 \end{cases}$$

$$\text{für } \varepsilon = +3\,;\ x^3 - 9x + 0 = 0 \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{(+3\sqrt{-\frac{1}{3}})^3} + \sqrt[3]{(-3\sqrt{-\frac{1}{3}})^3} = 0 \\ x_2 = \sqrt[3]{\left(\frac{3 - 3\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3 + 3\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = 3 \\ x_3 = \sqrt[3]{\left(\frac{-3 + 3\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-3 - 3\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = -3 \end{cases}$$

$$\text{für } \varepsilon = +4\ ;\ x^3 - 19x + 30 = 0 \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{(+1+4\sqrt{-\frac{1}{3}})^3} + \sqrt[3]{(+1-4\sqrt{-\frac{1}{3}})^3} = +2 \\ x_2 = \sqrt[3]{\left(\frac{3-7\sqrt{-\frac{1}{3}}}{3}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3+7\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = 3 \\ x_3 = \sqrt[3]{\left(\frac{-5+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{-5-\sqrt{-\frac{1}{3}}}{2}\right)^3} = -5 \end{cases}$$

§ 10.

Sollen alle Wurzeln rational werden, ist aber nur ein bestimmtes B gegeben, welches natürlich negativ sein muß, so setze man $3\alpha^2 + \varepsilon^2 = B$, so wird $\varepsilon^2 = B - 3\alpha^2$, mithin $2\alpha(\alpha^2 - \varepsilon^2) = 2\alpha(4\alpha^2 - B)$ also die Gleichung

$$17) \qquad x^3 - Bx + 2\alpha(4\alpha^2 - B) = 0$$

Hier soll $\varepsilon = +\sqrt{B - 3\alpha^2}$ eine rationale Zahl sein, dies ist aber nur möglich, wenn $B = \varepsilon^2 + 3\alpha^2$ angenommen wird, es ist also die Aufgabe nicht allgemein möglich, sondern es muß B eine von den Zahlen 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 27, 28, 31, 36, 37 ꝛc., worunter alle Quadratzahlen, sein. Ist z. B. $B = 28$, so wird ε drei Werthe haben können, nämlich für $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ und $\alpha = 3$, wodurch $\varepsilon = 5$ oder 4 oder 1. Hieraus folgt die einzige Gleichung

$$x^3 - 28x \mp 48 = 0 \qquad x_1 = \mp 2\ ;\ x_2 = \pm 6,\ x_3 = \mp 4.$$

Ist hingegen C (absolut) gegeben, so ist $\pm C = 2\alpha(\alpha^2 - \varepsilon^2)$ zu setzen, also $\varepsilon^2 = \frac{2\alpha^3 \mp C}{2\alpha}$ also $\varepsilon = \pm\sqrt{\alpha^2 - \frac{C}{2\alpha}}$ es muß also erstens C eine grade Zahl sein, und wenn $C = 2m\alpha$ gesetzt wird, muß zweitens $\sqrt{\alpha^2 \mp m}$ rational werden. Wäre z. B. $C = 12$, so enthält es die graden Factoren 2, 4, 6 und es wird der Reihe nach $\varepsilon = \sqrt{\alpha^2 \mp \frac{C}{2\alpha}} = \sqrt{1 \pm 6}$ oder $\sqrt{4 \pm 3}$ oder $\sqrt{9 \pm 2}$, mithin ist blos $\sqrt{4 - 3}$ rational; es ist also $\alpha = \pm 2$, $\varepsilon = 1$ zu setzen und die Gleichung ist

$$x^3 - 13x \pm 12 = 0$$

welche wir schon oben auf umgekehrtem Wege gefunden haben.

Nachtrag.

§ 11.

Eine kubische Gleichung $x^3 + Bx - C = 0$ läßt sich analog einer quadratischen Gleichung durch Ergänzung zum vollständigen Kubus so auflösen:

Wird in obiger Gleichung $x = y + \varphi$ gesetzt, so erhält man die Gleichung

$$y^3 + 3\varphi y + (3\varphi^2 + B)\,y + \varphi^3 + B\varphi - C = 0.$$

Nun läßt sich jede kubische Gleichung $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ leicht zum Kubus ergänzen, wenn in ihr $b^2 = 3ac$ ist; setzen wir nämlich $(3\varphi^2 + B)^2 = 9\varphi(\varphi^3 + B\varphi - C)$, so ergiebt sich

$$\varphi = \frac{3}{2B}\left(C \pm \sqrt{C^2 + \frac{4}{27}B^3}\right)$$

Wählen wir das obere Zeichen und substituiren in die Gleichung für y, so erhalten wir

$$y^3 + \frac{9\left(\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}+C\right)}{2B}y^2 + \frac{27\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\left(\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}+C\right)}{2B^2}y$$
$$+\frac{27\left(C^2+\frac{4}{27}B^3\right)\left(\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}+C\right)}{2B^3}=0$$

Setzen wir hierin $y=\frac{1}{z}$ so ergiebt sich

$$z^3+\frac{Bz^2}{\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}+\frac{B^2z}{3\left(C^2+\frac{4}{27}B^3\right)}=-\frac{2B^3}{27\left(C^2+\frac{4}{27}B^3\right)\left(\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}+C\right)}$$

Man sieht, daß jetzt das Quadrat des Coefficienten von z^2 gleich dem dreifachen Coefficienten von z ist; um also einen vollständigen Kubus zu erhalten, ist nur nöthig beiderseits $\left(\frac{B}{3\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}\right)^3$ zu addiren. Hierdurch wird

$$\left(z+\frac{B}{3\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}\right)^3=-\frac{\left(C-\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\right)^2}{4\left(C^2+\frac{4}{27}B^3\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Also $z=-\frac{B}{3\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}-\frac{\sqrt[3]{2\left(C-\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\right)^2}}{2\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}$

Da nun $x=y+\varphi=\frac{1}{z}+\varphi$, so ergiebt sich

$$x=\frac{3\left(C+\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\right)}{2B}-\frac{6\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}{2B+3\sqrt[3]{2\left(C-\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\right)^2}}$$

Ganz auf analoge Weise erhält man für

$$\varphi=\frac{3}{2B}\left(C-\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\right)$$

$$x=\frac{3\left(C-\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\right)}{2B}+\frac{6\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}{2B+3\sqrt[3]{2\left(C+\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\right)^2}}$$

Diese Formeln sind identisch mit der Cardanischen. Denn setzt man

$$\frac{3\left(C+\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\right)}{2B}-\frac{6\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}{2B+3\sqrt[3]{2\left(C-\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\right)^2}}=\sqrt[3]{\frac{C+\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{C-\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}{2}}$$

und entfernt zunächst den zweiten Nenner, so ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{9}{2B}\left(C+\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\right)\sqrt[3]{2\left(C-\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}\right)^2}=2B\sqrt[3]{\frac{C+\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}{2}}$$

$$\text{oder}\ \sqrt[3]{\frac{C+\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}{2}}=\sqrt[3]{\frac{C+\sqrt{C^2+\frac{4}{27}B^3}}{2}}$$