Untersuchungen

über

Fusspunktenflächen.

In einer Abhandlung (disquisitiones de curvis pedalibus, dissertatio inauguralis etc. Halis Saxonum. 1862.) habe ich Betrachtungen angestellt über die Enveloppen von Fusspunktencurven, welche durch einen variabelen Pol mit fester Grundcurve und durch einen festen Pol mit variabeler Grundcurve erzeugt werden. Einen Theil dieser Betrachtungen habe ich auf die analogen räumlichen Gebilde ausgedehnt und theile die Ergebnisse dieser Untersuchungen in folgenden Blättern mit.

§ 1.

Fällt man von einem Punkte P auf die Tangentialebenen einer Fläche F Perpendikel, so bilden die Fusspunkte jener Perpendikel eine Fläche, welche man Fusspunktenfläche genannt hat. Diese Flächen, welche von der Natur der Grundfläche F und der Lage des Pols P abhängen, und denen wir demgemäss das Zeichen (P,F) beilegen wollen, sind schon mannigfachen Betrachtungen unterworfen worden. Uns beschäftigt zunächst die Frage: Wenn die Grundfläche nach irgend welchem Gesetz continuirlich Gestalt und Lage ändert, wenn also an Stelle einer Fläche eine Flächenschaar tritt, in welcher Verbindung steht alsdann die Enveloppe dieser Flächen zu der Enveloppe der Fusspunktenflächen, welche zu jedem Element der vorgelegten Schaar der Grundflächen gehören?

Es liege eine Schaar Flächen vor, welche durch zwei willkührliche variabele Grössen erzeugt gedacht ist, also in der Form $\phi(x,y,z,\alpha,\beta)=o$ ihren Ausdruck findet, und es gelte von den einzelnen Flächen die Annahme, dass sie, mögen sie algebraischer oder transcendenter Natur sein, doch keine Kanten oder Spitzen, sondern continuirliche Krümmung haben. Die einzelnen Flächen mögen durch f bezeichnet sein. Stellen wir uns aus der Schaar der Flächen f vier nächst auf einander folgende f_1,f_2,f_3,f_4 vor und denken an f_1,f_2,f_3 die gemeinsame Tangentialebene $T_{1,2,3}$, an f_1,f_2,f_4 die gemeinsame Tangentialebene $T_{1,2,4}$ und an f_1,f_3,f_4 die gemeinsame Tangentialebene $T_{1,3,4}$, so ist klar, dass, wenn die Flächen $f_1,f_2,f_3 f_4$ sich einander ohne Ende nähern, die genannten Ebenen in drei aufeinander folgende Tangentialebenen der Enveloppe der Flächen f übergehen. Fällt man nun von einem Punkte P, der eine beliebige Lage im Raume haben mag, ein Perpendikel auf die Ebene $T_{1,2,3}$, so wird der Fusspunkt π_1 des Perpendikels ein Durchschnittspunkt der drei Fusspunktenflächen (P,f_1), (P,f_2), (P,f_3) sein. Desgleichen ist der Fusspunkt π_2 des Perpendikels von P auf Ebene $T_{1,2,4}$ ein Durchschnittspunkt der drei Fusspunktenflächen (P,f_1),

(P,f_2), (P,f_4), und endlich ist auch π_3, der Fusspunkt des Perpendikels von P auf $T_{1,3,4}$, ein Durchschnittspunkt der Flächen (P,f_1), (P,f_3), (P,f_4). Die drei Puncte π_1,π_2,π_3 liegen alle auf der Fusspunktenfläche (P,f_1) und durch jeden gehen ausser (P,f_1) noch zwei auf (P,f_1) nächst folgende Elemente der Fusspunktenflächen, nämlich durch π_1 die beiden Flächen (P,f_2) und (P,f_3), durch π_2 die Flächen (P,f_2), (P,f_4) und durch π_3 die Flächen (P,f_3), (P,f_4). Wenn daher die einzelnen Flächen f der Schaar unendlich nahe zusammenrücken, so werden auch π_1,π_2,π_3 sich ohne Ende einander nähern und Punkte der Enveloppe der Fusspunktenflächen werden. Zu gleicher Zeit sind aber alsdann π_1,π_2,π_3 auch Punkte der Fusspunktenfläche der Enveloppe der vorgelegten Flächen f. Es folgt mithin der Satz:

Die Fusspunktenfläche der Enveloppe einer Flächenschaar ist identisch mit der Enveloppe der Fusspunktenflächen dieser Schaar.

Fasst man eine Fläche als Umhüllung ihrer Tangentialebenen auf und bemerkt, dass die Fusspunktenfläche einer Ebene sich auf einen Punkt, den Fusspunkt des Perpendikels vom Pol auf die Ebene, reducirt, so tritt die in dem Satz ausgesprochene Identität der Enveloppen unmittelbar in die Augen.

Andrerseits, sieht man eine Fläche F als Erzeugniss ihrer Punkte p an, so entwickelt sich aus jenem Satze die Eigenschaft der Fusspunktenflächen, welche Raabe (Crellisches Journal B. L.) hergeleitet hat. Als Tangentialebenen eines Punktes p sind nämlich alle Ebenen aufzufassen, welche durch den Punkt p gehen; die Fusspunktenfläche eines Punktes p in Beziehung auf einen Pol P ist daher eine Kugel, welche die Strecke Pp zum Durchmesser hat. Da nun in diesem Falle alle Punkte p als die Elemente der die Fläche F erzeugenden Flächenschaar aufzufassen sind, so folgt, dass die Fusspunktenfläche der Fläche F identisch ist mit der Enveloppe der Kugeln, welche die von P nach den Punkten der Fläche F gezogenen Strahlen zu Durchmessern hat. Es ist somit dieser Satz als ein spezieller Fall in obigem Theorem enthalten.

§ 2.

Mit der soeben betrachteten Flächenart steht eine andere Art Flächen in inniger Verbindung, deren Betrachtung man zweckmässiger Weise mit der Untersuchung der Fusspunktenflächen verbindet; ich meine diejenigen Flächen, deren Fusspunktenflächen bestimmte Grundflächen sind. Nach dieser Definition findet ihre Erzeugung in folgender Weise statt. Man ziehe von einem Punkte P nach den Punkten einer Fläche U Strahlen und errichte in den Endpunkten jedes Strahles senkrecht zu diesem Ebenen; diese Ebenen umhüllen die Fläche, deren Fusspunktenfläche die Fläche U ist. Wir wollen diese Fläche als abhängig von P und U durch $[P,U]$ bezeichnen und zunächst einige Eigenschaften für dieselbe herleiten.

Zieht man von dem Punkte P nach drei nahe an einander gelegenen Punkten π_1,π_2,π_3 der Fläche U Strahlen und errichtet in diesen senkrecht auf den bezüglichen Strahlen Ebenen, so liegen die Punkte P,π_1,π_2,π_3 und der Punkt p, der Schnittpunkt jener drei Ebenen, auf einer Kugel, deren Durchmesser die Strecke Pp ist. Nähern sich nun π_2 und π_3 ohne Ende dem Punkte π_1, so geht der Punkt p in einen Punkt der Fläche $[P,U]$ über, während die Kugel, welche Pp zum Durchmesser hat, die Fläche U in dem Punkte π_1 tangirt. Zieht man demnach von P nach einem Punkte π der Fläche U einen Strahl und errichtet auf demselben in π eine senkrechte Ebene e, so erhält man den Berührungspunkt der Ebene e mit der Fläche $[P,U]$ in folgender Weise. Man construire eine Kugel, welche durch P geht und die Fläche U in dem Punkte π berührt; der Mittelpunkt m dieser Kugel ist der Punkt, wo die in π auf U errichtete Normale die Ebene schneidet, welche den Strahl $P\pi$ halbirt und senkrecht auf diesem steht. Der Durchschnittspunkt der Geraden, welche P und m verbindet, mit der Ebene e ist alsdann der gesuchte Berührungspunkt p. Da dieser zu gleicher Zeit der dem Punkte P diametral gegenüberliegende Punkt der Kugel ist, welche durch P geht und in π berührt, so lässt sich die betrachtete Flächenart auch in folgender Weise erzeugt

denken: Rollt eine Kugel mit veränderlichem Radius auf einer Fläche U, so dass dieselbe stets durch den Punkt P geht, so beschreibt der dem festen Punkt P diametral gegenüberliegende Punkt eine Fläche, welche mit der Fläche $[P,U]$ identisch ist.

Diese Erzeugung der Fläche $[P,U]$ hätte aus dem zu Ende von § 1 ausgesprochenen Satze unmittelbar gefolgert werden können, doch schien es mir zweckmässig, dieselbe aus der vorigen Betrachtung herzuleiten.

Es mag noch bemerkt werden, dass die Normalen in dem Punkte π der Fläche U und in dem entsprechenden Punkte p der Fläche $[P,U]$ sich schneiden, und dass der Schnittpunkt derselben der dem Punkte π diametral entgegenstehende Punkt der Kugel ist. Zu gleicher Zeit ist derselbe der Fusspunkt des von P auf die Normale in p gefällten Perpendikels. Denkt man daher die Fläche $[P,U]$ in vorher erwähnter Weise durch Rollen einer Kugel mit veränderlichem Radius erzeugt, so beschreibt der dem Berührungspunkte diametral entgegenstehende Punkt der Kugel eine Fläche, welche als Ort der Schnittpunkte der Normalen in entsprechenden Punkten der Flächen U und $[P,U]$ anzusehen ist. Diese Fläche ist zugleich der Ort der Fusspunkte der von P auf die Normalen der Fläche $[P,U]$ gefällten Perpendikel.

Aus der Definition der Fläche $[P,U]$ als solcher, deren Fusspunktenfläche in Bezug auf P die Grundfläche U ist, folgt unmittelbar mit Anwendung des in § 1 über die Enveloppen der Fusspunktenflächen ausgesprochenen Theorems auch für diese Flächenart der Satz:

Die Fläche $[P,\mathfrak{E}]$ der Enveloppe $\mathfrak{E}$ einer Schaar von Flächen u ist identisch mit der Enveloppe der Flächenschaar $[P,u]$.

§ 3.

Bevor wir zu Anwendungen der in § 1 und § 2 dargethanen Sätze auf einige Specialfälle übergehen, scheint es nothwendig, einige Bemerkungen vorauszuschicken.

Die Fläche $[P,K]$, wo K eine Kugel bedeutet, kann nach § 2 auch erzeugt gedacht werden durch den dem Punkte P diametral entgegengesetzten Punkt einer Kugel k, welche mit variabelem Radius auf der Kugel K in der Weise rollt, dass sie stets durch den festen Punkt P geht. Man stelle sich nun eine Lage der Kugel k vor, nenne den Mittelpunkt derselben m, den P diametral entgegenstehenden Punkt p und bezeichne den Mittelpunkt der Kugel K mit M und den Berührungspunkt beider Kugeln mit π. Liegt nun P innerhalb der Kugel K, so ist $Mm+mP=Mm+m\pi=R$, wo R den Radius der Kugel K bedeutet, und liegt P ausserhalb der Kugel K, so ist $Mm-mP=Mm-m\pi=R$. Im ersteren Falle wird daher der Mittelpunkt von k bei dem Rollen ein längliches Rotationsellipsoid, in letzterem ein zweischaliges Rotationshyperboloid beschreiben, deren Brennpunkte P und M sind, und deren grosse resp. reelle Axe den Werth R hat. Zieht man ferner durch p eine Linie parallel mit Mm, so schneidet diese den durch P gehenden Durchmesser der Kugel K in einem Punkte P_1, welcher eben so weit vom Mittelpunkte M entfernt ist wie P, und es haben die Relationen statt $P_1p+pP=2(Mm+mP)=2R$, wenn der Punkt P innerhalb von K liegt, und $P_1p-pP=2(Mm-mP)=2R$, wenn derselbe ausserhalb liegt. Es ist mithin in jenem Fall die Fläche $[P,K]$ ein längliches Rotationsellipsoid, in diesem ein zweischaliges Rotationshyperboloid. Die Brennpunkte derselben sind P und P_1, und ihre grosse resp. reelle Axe hat den Werth $2R$; es berührt mithin diese Fläche die Kugel K mit ihren Scheiteln und zwar in den Punkten, wo der durch P gelegte Durchmesser der Kugel K dieselbe schneidet. Geht die Kugel K in eine Ebene E über, so entfernt sich der Mittelpunkt des länglichen Rotationsellipsoides resp. des zweischaligen Rotationshyperboloides $[P,K]$ mit dem Mittelpunkte von K in's Unendliche, und es wird daher die Fläche $[P,E]$ ein elliptisches Rotationsparaboloid, welches die Ebene E zur Scheitelebene hat.

Schliesst man aus Vorigem auf die Fusspunktenfläche eines länglichen Rotationsellipsoides resp. eines zweischaligen Rotationshyperboloides in Bezug auf einen Brennpunkt desselben zurück, so ist augenscheinlich, dass dieselbe eine Kugel ist, welche mit der Grundfläche concentrisch ist

und ihre grosse resp. reelle Axe zum Durchmesser hat. Die Fusspunktenfläche eines elliptischen Rotationsparaboloides in Bezug auf seinen Brennpunkt ist die Scheitelebene desselben.

Zieht man von einem Punkt P aus nach einem Kreise $\varkappa$ Strahlen und errichtet in den Endpunkten derselben zu den bezüglichen Strahlen senkrechte Ebenen e, so erhält man als Umhüllung dieser Ebenen eine Fläche $[P,\varkappa]$, welche geradlinig ist, wie überhaupt eine Fläche $[P,U]$ stets eine geradlinige sein wird, sobald die Grundfläche U sich auf eine Curve reducirt. Um genauer die Art der Fläche $[P,\varkappa]$ feststellen zu können, denke man eine Kugel k_1, welche durch den Kreis $\varkappa$ und den Punkt P bestimmt ist, und eine zweite Kugel k_2, welche nur an die Bedingung geknüpft ist, auf ihrer Oberfläche den Kreis $\varkappa$ zu haben. Mit Hülfe der ersten Kugel folgert man, dass alle Ebenen e durch den dem Punkte P diametral gegenüber liegenden Punkt P_1 der Kugel k_1 gehen, und mit Hülfe der letzteren ist ersichtlich, dass zu gleicher Zeit die Ebenen e ein längliches Rotationsellipsoid oder zweischaliges Rotationshyerboloid berühren, welches mit der Kugel k_2 concentrisch ist, den Durchmesser derselben zur grossen resp. reellen Axe und den Punkt P zum Brennpunkt hat. Es ist demnach die Fläche $[P,\varkappa]$ ein elliptischer oder hyperbolischer Kegel. Der Durchschnitt des Kegels mit der Ebene des Kreises ist aber derjenige Kegelschnitt, welcher die Fusspunkte der Perpendikel von P und P_1 auf die Kreisebene zu Brennpunkten und den Durchmesser des Kreises $\varkappa$ zur grossen resp. rellen Axe hat. In der That, die Spuren der Ebenen e auf der Kreisebene erhält man, indem man von dem Fusspunkt π des Perpendikels, welches von P auf die Ebene des Kreises gefällt ist, Strahlen nach dem Kreise zieht und in ihren Endpunkten senkrechte in der Kreisebene liegende Gerade construirt. Diese Geraden umhüllen einen Kegelschnitt, der mit dem Kreise concentrisch ist, den Durchmesser desselben zur grossen resp. reellen Axe und den Punkt π zum Brennpunkt hat. Dass der Punkt π_1, der Fusspunkt des Perpendikels von der Spitze des Kegels auf die Kreisebene, der andere Brennpunkt des Kegelschnitts ist, folgt, wenn man den Durchmesser PP_1 der Kugel k_1 auf die Kreisebene projicirt und bemerkt, dass der Mittelpunkt der Kugel zur Projection den Mittelpunkt des Kreises hat.

Tritt an Stelle des Kreises $\varkappa$ eine Gerade γ, so stehen die Geraden, welche die geradlinige Fläche $[P,\gamma]$ bilden, senkrecht auf der Ebene, welche durch P und γ bestimmt ist, und zwar gehen sie durch die Parabel, welche P zum Brennpunkt und γ zur Scheitellinie hat. Es ist daher die Fläche $[P,\gamma]$ ein parabolischer Cylinder.

Aus diesen Bemerkungen, auf welche später recurrirt werden muss, ergiebt sich mit Leichtigkeit die Lösung zweier Aufgaben, deren ich noch kurz Erwähnung thun will. Es liege zunächst die Aufgabe vor, von einem beliebigen Punkte P_1 an ein längliches Rotationsellipsoid oder zweischaliges Rotationshyperboloid V einen Tangentenkegel zu legen. Da die Fusspunktenfläche von V in Beziehung auf einen Brennpunkt P eine mit V concentrische Kugel ist, welche die grosse resp. reelle Axe von V zum Durchmesser hat, und da die Fusspunktenfläche des Punktes P_1 in Bezug auf P eine Kugel ist, welche PP_1 zum Durchmesser hat, so werden die Fusspunkte der Perpendikel von P auf die Ebenen, welche von P_1 an die Fläche V zu legen sind, sowohl auf der Kugel (P,V) als auf der Kugel (P,P_1) liegen. Man construire demnach, um zu dem Tangentenkegel zu gelangen, die Kugel (P,V) und die Kugel (P,P_1), ziehe von P nach dem Durchschnittskreise derselben Strahlen und errichte in ihren Endpunkten zu denselben bezüglich senkrechte Ebenen; diese Ebenen gehen alsdann durch den Punkt P_1 und berühren die vorliegende Fläche V. Es ist also der Tangentenkegel von P_1 an die Fläche V nichts anderes als der Kegel $[P,\varkappa]$, wo $\varkappa$ den Durchschnittskreis von (P,V) und (P,P_1) bedeutet. Ist V ein elliptisches Rotationsparaboloid, so tritt an die Stelle der Kugel (P,V) die Scheitelebene desselben; im Uebrigen bleibt der Gang für die Lösung der Aufgabe derselbe. — Sollen durch eine Gerade γ diejenigen Ebenen gelegt werden, welche ein längliches Rotationsellipsoid oder ein zweischaliges Rotationshyperboloid V berühren, so construire man in Beziehung auf den Brennpunkt P desselben die Kugel (P,V) und den Kreis (P,γ); alsdann werden die Durchschnittspunkte der Kugel (P,V) mit dem Kreise (P,γ) in Verbindung mit der Geraden γ

zwei Ebenen bestimmen, welche der Aufgabe genügen. Ist V ein elliptisches Rotationsparaboloid, so tritt an die Stelle der Kugel (P,V) die Scheitelebene desselben, und die Durchschnittspunkte des Kreises (P,γ) mit dieser Ebene werden in Verbindung mit γ die gesuchten Ebenen bestimmen.

§ 4.

Nach diesen Vorbetrachtungen wird in diesem Paragraphen der in § 1 aufgestellte Satz über die Enveloppe der Fusspunktenflächen, welche zu einer Schaar Grundflächen gehören, auf einige Flächenschaaren von specieller Natur angewandt und gezeigt werden, wie aus demselben mit Leichtigkeit einige interessante Sätze über die Rotationsflächen gewonnen werden können, welche durch Drehung einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel um die grosse resp. reelle Axe erzeugt werden.

Es liege eine Schaar letztgenannter Flächen vor, welche einen gemeinsamen Brennpunkt P haben und zwei Ebenen E_1 und E_2 berühren. Da nach dem in § 1 entwickelten Theorem die Fusspunktenfläche der Enveloppe dieser Flächenschaar identisch ist mit der Enveloppe der Fusspunktenflächen dieser Schaar, und da nach § 3 die Fusspunktenfläche eines länglichen Rotationsellipsoides oder zweischaligen Rotationshyperboloides, genommen in Beziehung auf den Brennpunkt P, eine Kugel ist, so werden die Fusspunktenflächen obiger Flächenschaar Kugeln sein, welche durch die Fusspunkte π_1 und π_2 der Perpendikel gehen, welche von P auf E_1 und E_2 gefällt sind; denn die Fusspunktenflächen von E_1 und E_2 in Bezug auf P reduciren sich auf jene zwei Punkte. Es ist nun je eine Kugel dieser Schaar eine Fusspunktenfläche eines länglichen Rotationsellipsoides oder zweischaligen Rotationshyperboloides jener Schaar, und zwar ist sie mit der ihr zugehörigen Fläche concentrisch. Da nun der Ort der Mittelpunkte der Kugelschaar die Ebene ist, welche durch die Mitte der Strecke $\pi_1\pi_2$ geht und senkrecht auf derselben steht, so folgt der Satz;

Die Mittelpunkte der Schaar von länglichen Rotationsellipsoiden und zweischaligen Rotationshyperboloiden, welche einen Brennpunkt P gemein haben und zwei Ebenen E_1 und E_2 berühren, liegen auf einer Ebene, und zwar geht diese Mittelpunktsebene durch die Mitte der Strecke, welche die Fusspunkte der von P auf E_1 und E_2 gefällten Perpendikel verbindet, und steht auf derselben senkrecht.

So oft unter den Flächen der Schaar, welche in dem soeben ausgesprochenen Satze vorliegt, ein längliches Rotationsellipsoid oder ein zweischaliges Rotationshyperboloid in ein elliptisches Rotationsparaboloid degenerirt, so oft entspricht einem solchen als Fusspunktenfläche eine Ebene, welche durch die beiden Punkte π_1 und π_2 geht. Wir haben demnach den Satz:

Die elliptischen Rotationsparaboloide, welche einen Brennpunkt P gemein haben und zwei Ebenen E_1 und E_2 berühren, haben zu Scheitelebenen die Elemente eines Ebenenbüschels, dessen Axe die verbindende Gerade der Fusspunkte der Perpendikel ist, welche von dem Brennpunkte P auf die Ebenen E_1 und E_2 gefällt sind.

Letztere Flächenschaar ist im Gegensatz zu den seither betrachteten, welche als doppelte Flächenschaaren aufzufassen waren, eine einfache Flächenschaar, d. h. während früher die einzelnen Elemente der Flächenschaar durch die Veränderungen zweier willkührlichen Variabelen erzeugt zu denken waren, entstehen hier die einzelnen Flächen durch Veränderung von nur einer willkührlichen Variabelen; die Schaar derselben findet also ihre allgemeine Darstellung in der Form $\phi(x,y,z,a) = o$. Wir wollen, nachdem wir einmal diese Bemerkung gemacht haben, in dem Folgenden die Flächenschaaren durch die Beifügungen „einfache“ und „doppelte“ nicht unterscheiden, da in den einzelnen Fällen leicht ersichtlich ist, ob eine einfache oder doppelte Flächenschaar vorliegt.

Den länglichen Rotationsellipsoiden und zweischaligen Rotationshyperboloiden, welche einen gemeinsamen Brennpunkt P haben und drei Ebenen E_1, E_2, E_3 berühren, entsprechen als Fusspunktenflächen in Beziehung auf den Punkt P die Kugeln, welche durch die drei Fusspunkte π_1, π_2, π_3 der Perpendikel gehen, welche von P auf die Ebenen E_1, E_2, E_3 gefällt sind. Da nun jede einzelne

Fläche jener Art mit der ihr zugehörigen Fusspunktenkugel concentrisch ist, und da die Mittelpunkte genannter Kugelschaar auf einer Geraden liegen, welche durch den Mittelpunkt des dem Dreieck $\pi_1\pi_2\pi_3$ umgeschriebenen Kreises geht und senkrecht auf der Ebene desselben steht, so lässt sich folgender Satz aussprechen:

Die Mittelpunkte der länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen gemeinsamen Brennpunkt P haben und drei Ebenen E_1, E_2, E_3 berühren, liegen auf einer Geraden. Diese Gerade geht durch den Mittelpunkt des dem Dreieck $\pi_1\pi_2\pi_3$ umgeschriebenen Kreises, wo π_1, π_2, π_3 die Fusspunkte der Perpendikel bedeuten, welche von P auf die drei Ebenen E_1, E_2, E_3 gefällt sind, und steht auf der Ebene dieses Kreises senkrecht. Unter den Elementen der Flächenschaar degenerirt eines in ein elliptisches Rotationsparaboloid, und die Scheitelebene desselben ist die durch die drei Punkte π_1, π_2, π_3 bestimmte Ebene.

Man folgert ferner ohne Schwierigkeit:

Das längliche Rotationsellipsoid oder zweischalige Rotationshyperboloid, von dem ein Brennpunkt P gegeben ist, und welches vier Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 berührt, ist concentrisch mit der der Fusspunktenpyramide $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$ umgeschriebenen Kugel und hat den Durchmesser derselben zur grossen resp. reellen Axe. Liegt der Punkt P innerhalb jener Kugel, so genügt ein längliches Rotationsellipsoid den aufgestellten Bedingungen, liegt er ausserhalb, ein zweischaliges Rotationshyperboloid.

Es liege eine Schaar von länglichen Rotationsellipsoiden und zweischaligen Rotationshyperboloiden vor, welche einen gemeinsamen Brennpunkt P haben, sich in einem beliebigen Punkte p schneiden und eine Ebene E berühren. Die Fusspunktenflächen dieser Schaar, genommen in Beziehung auf den Brennpunkt P, sind eine Schaar Kugeln, welche durch den Fusspunkt π des von P auf E gefällten Perpendikels gehen und die Kugel, welche Pp zum Durchmesser hat, berühren. Die Mittelpunkte dieser Kugelschaar liegen nach § 3 auf einem länglichen Rotationsellipsoid resp. auf einem zweischaligen Rotationshyperboloid, welches π und den Mittelpunkt von Pp zu Brennpunkten und die Strecke $\frac{Pp}{2}$ zur grossen resp. reellen Axe hat. Da nun zu je einem Elemente der vorliegenden Flächenschaar eine Kugel dieser Schaar als Fusspunktenfläche gehört, nnd diese mit ihm concentrisch ist, so gilt der Satz:

Die Mittelpunkte der länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen Brennpunkt P gemein haben, eine Ebene E berühren und sich in einem Punkte p schneiden, liegen wieder auf einem länglichen Rotationsellipsoide resp. auf einem zweischaligen Rotationshyperboloide. Dasselbe hat den Fusspunkt π des von P auf E gefällten Perpendikels und den Mittelpunkt der Strecke Pp zu Brennpunkten, die Strecke $\frac{Pp}{2}$ aber zur grossen resp. reellen Axe. Liegt π innerhalb der Kugel, welche Pp zum Durchmesser hat, so ist die Mittelpunktsfläche ein längliches Rotationsellipsoid, liegt er ausserhalb, ein zweischaliges Rotationshyperboloid. Unter den Elementen jener Flächenschaar degenerirt in letzterem Falle eine einfache Schaar in elliptische Rotationsparaboloide, und zwar gehören zu denselben als Scheitelebenen die von π an die Kugel (P,p) gelegten Tangentialebenen.

Es ist ferner leicht ersichtlich:

Die Mittelpunkte der länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen gemeinsamen Brennpunkt P haben, zwei Ebenen E_1 und E_2 berühren und sich in einem Punkte p schneiden, liegen auf einem Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt ist der Durchschnitt eines länglichen Rotationsellipsoides resp. eines zweischaligen Rotationshyperboloides, welches den Halbirungspunkt der Strecke Pp und einen der Fusspunkte π_1 oder π_2 der von P auf E_1 und E_2 gefällten Perpendikel zu Brennpunkten, die Strecke $\frac{Pp}{2}$ aber zur grossen resp. reellen Axe

hat, mit einer Ebene, welche die Strecke $\pi_1\pi_2$ halbirt und senkrecht auf derselben steht. Unter den Elementen der vorliegenden Flächenschaar treten höchstens zwei elliptische Rotationsparaboloide auf, und diesen entsprechen als Scheitelebenen die Tangentialebenen, welche durch die Axe $\pi_1\pi_2$ an die Kugel (P,p) zu legen sind. Schneidet die Gerade $\pi_1\pi_2$ die Kugel (P,p), so tritt in der Schaar kein elliptisches Rotationsparaboloid auf, berührt sie dieselbe, so kommt ein solches vor, und schneidet sie weder, noch berührt sie die Kugel, so sind in der Schaar zwei elliptische Rotationsparaboloide vorhanden. Bei der ersten Lage der Geraden $\pi_1\pi_2$ zur Kugel (P,p) ist die Mittelpunktscurve eine Ellipse, bei der zweiten eine Parabel, bei der letzten eine Hyperbel.

Die Mittelpunkte der länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen Brennpunkt P gemein haben, eine Ebene E berühren und durch zwei Punkte p_1 und p_2 gehen, liegen auf dem Durchschnitt zweier Flächen derselben Gattung V_1 und V_2, welche gleichfalls einen gemeinsamen Brennpunkt haben. Dies ist der Fusspunkt π des Perpendikels, welches von P auf die Ebene E gefällt ist; der zweite Brennpunkt von V_1 ist der Mittelpunkt der Strecke Pp_1, der von V_2 der Mittelpunkt der Strecke Pp_2; die grosse resp. reelle Axe von V_1 hat den Werth $\frac{Pp_1}{2}$, und die von V_2 den Werth $\frac{Pp_2}{2}$. Die beiden Flächen sind längliche Rotationsellipsoide, wenn der Punkt π innerhalb der beiden Kugeln (P,p_1) und (P,p_2) liegt, zweischalige Rotationshyperboloide, wenn er ausserhalb derselben liegt, und liegt er innerhalb der einen Kugel und ausserhalb der anderen, so ist die Mittelpunktscurve der Durchschnitt eines länglichen Rotationsellipsoides mit einem zweischaligen Rotationshyperboloide. Es degeneriren bei der zweiten Lage des Punktes π zwei Elemente der Flächenschaar in elliptische Rotationsparaboloide, und diesen entsprechen als Scheitelebenen die zwei gemeinsamen Tangentialebenen der Kugeln (P,p_1) und (P,p_2), welche durch den Punkt π gehen.

Die länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche ausser dem Brennpunkte P noch zwei Punkte p_1 und p_2 gemein haben, haben zu Fusspunktenflächen eine Schaar Kugeln, welche die beiden sich schneidenden Kugeln (P,p_1) und (P,p_2) berühren. Nennt man die Radien dieser Kugeln r_1 und r_2 und bezeichnet man die Abstände des Mittelpunkts einer Kugel aus der Schaar von den Mittelpunkten der Kugeln (P,p_1) und (P,p_2) mit λ_1 und λ_2, so finden die Relationen statt $\lambda_1-\lambda_2=\pm(r_1-r_2)$ und $\lambda_1+\lambda_2=(r_1+r_2)$. Es liegen daher die Mittelpunkte der Kugelschaar auf einem zweischaligen Rotationshyperboloide und auf einem mit diesem confocalen länglichen Rotationsellipsoide. Die gemeinsamen Brennpunkte sind die Mittelpunkte der Kugeln (P,p_1) und (P,p_2), die reelle Axe des ersteren hat den absoluten Werth von (r_1-r_2), die grosse Axe des letzteren den Werth (r_1+r_2). Es gilt daher der Satz:

Die länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche ausser dem Brennpunkte P noch zwei Punkte p_1 und p_2 gemein haben, haben ihre Mittelpunkte auf zwei confocalen Flächen derselben Gattung, von denen die eine ein längliches Rotationsellipsoid, die andere ein zweischaliges Rotationshyperboloid ist. Die gemeinsamen Brennpunkte der Mittelpunktsflächen sind die Mittelpunkte der Strecken Pp_1 und Pp_2 und die grosse Axe des ersteren ist gleich der halben Summe jener Strecken, die reelle Axe des letzteren gleich der halben Differenz derselben. Eine einfache Schaar von elliptischen Rotationsparaboloiden ist in der vorliegenden Flächenschaar enthalten, und diesen gehören als Scheitelbenen zu die den Kugeln (P,p_1) und (P,p_2) gemeinsamen Tangentialebenen. Es umhüllen daher die Scheitelebenen der elliptischen Rotationsparaboloide, welche ausser einem Brennpunkt noch zwei Punkte der Oberfläche gemein haben, einen geraden Kreiskegel.

Ferner folgt:

Die Mittelpunkte der länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche ausser dem Brennpunkte P noch drei Punkte p_1, p_2, p_3 gemein haben, liegen auf der Durchschnittscurve zweier confocaler Flächen dieser Gattung mit zwei confocalen Flächen derselben

Gattung, und zwar sind die Brennpunkte jener zwei Flächen die Mittelpunkte der Strecken Pp_1 und Pp_2, die Brennpunkte dieser die Mittelpunkte Pp_2 und Pp_3. Von den ersteren beiden wie von den letzteren beiden ist eine Fläche stets ein längliches Rotationsellipsoid, die andere ein zweischaliges Rotationshyperboloid. Die beiden länglichen Rotationsellipsoide haben zu grossen Axen bezüglich die Werthe $\frac{Pp_1+Pp_2}{2}$ *und* $\frac{Pp_2+Pp_3}{2}$, *und die beiden zweischaligen Rotationshyperboloide haben zu reellen Axen bezüglich die Werthe* $\frac{Pp_1-Pp_2}{2}$ *und* $\frac{Pp_2-Pp_3}{2}$. *Elliptische Rotationsparaboloide treten nur zwei in der vorliegenden Flächenschaar auf, da die drei sich schneidenden Kugeln* (P,p_1), (P,p_2), (P,p_3) *nur zwei reelle gemeinsame Tangentialebenen zulassen. Diese sind die Scheitelebenen jener elliptischen Rotationsparaboloide.*

Ein längliches Rotationsellipsoid resp. ein zweischaliges Rotationshyperboloid, von dem ein Brennpunkt P gegeben ist, und welches durch vier gegebene Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 *geht, ist concentrisch mit einer Kugel, welche die vier Kugeln* (P,p_1), (P,p_2), (P,p_3) (P,p_4) *berührt, und hat zur grossen resp. reellen Axe den Durchmesser derselben. Es genügen so viel Flächen obiger Gattung den aufgestellten Bedingungen, als sich Berührungskugeln an jene vier Kugeln legen lassen, und zwar sind so viel längliche Rotationsellipsoide unter ihnen vorhanden, als es Berührungskugeln giebt, welche den Punkt P innerhalb haben, und so viel zweischalige Rotationshyperboloide, als Berührungskugeln da sind, welche den Punkt P ausserhalb haben.*

§ 5.

Es ist noch übrig, den zu Ende von § 2 ausgesprochenen Satz auf specielle Schaaren von länglichen Rotationsellipsoiden und zweischaligen Rotationshyperboloiden anzuwenden und einige Folgerungen für dieselben daraus zu ziehen.

Den Tangentialebenen e, welche eine Fläche U umhüllen, entspricht als Flächenschaar $[P,e]$ eine Schaar von elliptischen Rotationsparaboloiden, welche den Punkt P zum gemeinsamen Brennpunkt und die Tangentialebenen e bezüglich zu Scheitelebenen haben. Die Scheitelpunkte dieser elliptischen Rotationsparaboloide sind die Fusspunkte der von P auf die Tangentialebenen e gefällten Perpendikel, also die Punkte der Fläche $(P.U)$. Da nun nach dem in § 2 ausgesprochenen Satze die Schaar der elliptischen Rotationsparaboloide $[P.e]$ die Fläche $[P,U]$ umhüllen, so lässt sich der Satz folgern:

Sieht man einen Punkt P als den gemeinsamen Brennpunkt von elliptischen Rotationsparaboloiden an, deren Scheitelpunkte die Punkte einer Fläche F sind, so umhüllen diese Rotationsparaboloide eine Fläche Φ, *welche mit F in der Weise zusammenhängt, dass die zweimal in Beziehung auf den Pol P genommene Fusspunktenfläche von* Φ *die Fläche F ist.*

Einer Schaar Kugeln k, welche zwei Ebenen E_1 und E_2 berühren, entspricht als Flächenschaar $[P,k]$ eine Schaar länglicher Rotationsellipsoide und zweischaliger Rotationshyperboloide, welche den Punkt P zum gemeinsamen Brennpunkt haben und die beiden elliptischen Rotationsparaboloide $[P,E_1]$ und $[P,E_2]$ berühren. Jede Kugel k ist mit der ihr zugehörigen Fläche $[P,k]$ concentrisch. Da nun die Mittelpunkte von k auf zwei Ebenen liegen, welche durch den Durchschnitt der Ebenen E_1 und E_2 gehen und Winkel und Nebenwinkel derselben halbiren, so lässt sich der Satz aussprechen:

Die länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen gemeinsamen Brennpunkt P haben und zwei elliptische Rotationsparabolide, welche denselben Punkt zum Brennpunkt haben, berühren, haben ihre Mittelpunkte auf zwei senkrecht aufeinander stehenden Ebenen. Diese Ebenen gehen durch den Durchschnitts der Scheitelebenen E_1 *und* E_2 *jener Rotationsparaboloide und halbiren Winkel und Nebenwinkel dersetben. Unter den länglichen Rotationsellipsoiden und zweischaligen Rotationshyperboloiden degenerirt eine einfache Schaar in*

Ebenen, von denen jede doppelt zu rechnen ist, und diese Ebenen umhüllen einen parabolischen Cylinder. Die erzeugenden Geraden dieses Cylinders gehen durch die Parabel, deren Brennpunkt P und deren Scheitellinie die Kante von E_1 und E_2 ist, und stehen senkrecht auf der Ebene derselben. Jede Tangentialebene dieses parabolischen Cylinders ist zu gleicher Zeit Tangentialebene jener beiden elliptischen Rotationsparaboloide und umgekehrt, jede diesen beiden Flächen gemeinsame Tangentialebene berührt jenen Cylinder; es ist also jener parabolische Cylinder der Ort der gemeinsamen Tangenten jener beiden Flächen.

Man folgert ferner ohne Schwierigkeit:

Die Mittelpunkte der länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen gemeinsamen Brennpunkt P haben und drei elliptische Rotationsparaboloide, welche denselben Brennpunkt haben, berühren, liegen auf vier Geraden, welche durch den Schnittpunkt der Scheitelebenen E_1, E_2, E_3 jener Rotationsparaboloide gehen. Sie sind die Durchschnitte der zwei Ebenen, welche den von E_1 und E_2 gebildeten Winkel und Nebenwinkel halbiren, mit den zwei Halbirungsebenen des Winkels und Nebenwinkels, welcher durch E_2 und E_3 gebildet wird. Es degenerirt ein Element der Flächenschaar in eine Ebene, welche doppelt zu denken ist, und welche jene drei elliptischen Rotationsparaboloide berührt, und zwar giebt es nur diese eine Ebene, welche gemeinsame Tangentialebene jener drei Flächen ist. Auch sie geht durch den Schnittpunkt der drei Scheitelebenen und steht senkrecht auf der Linie, welche diesen Schnittpunkt mit dem Brennpunkt P verbindet.

Die länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen Brennpunkt P gemein haben und vier elliptische Rotationsparaboloide, welche denselben Punkt P zum Brennpunkt haben, berühren, sind concentrisch mit den einem Tetraeder eingeschriebenen Kugeln, welches aus den vier Scheitelebenen jener Rotationsparaboloide gebildet ist, und haben zu grossen resp. reellen Axen bezüglich die Durchmesser dieser Kugeln. Acht längliche Rotationsellipsoide resp. zweischalige Rotationshyperboloide genügen den aufgestellten Bedingungen.

Einer Schaar Kugeln k, welche zwei Kugeln K_1 und K_2 berühren, entspricht als Flächenschaar $[P,k]$ eine Schaar von länglichen Rotationsellipsoiden und zweischaligen Rotationshyperboloiden, welche den Punkt P zum gemeinsamen Brennpunkt haben und zwei Flächen derselben Gattung V_1 und V_2, welchen ebenfalls P als Brennpunkt zugehört, berühren. Da die Mittelpunkte jener Kugelschaar auf zwei confocalen Rotationsflächen zweiten Gerades liegen, welche zu Brennpunkten die Mittelpunkte der Kugeln K_1 und K_2 und zu grossen resp. reellen Axen die Summe und die Differenz ihrer Radien haben, so folgt, wenn man erwägt, dass die Mittelpunktsfläche der Kugelschaar identisch ist mit der Mittelpunktsfläche der Schaar $[P,k]$, der Satz:

Die Mittelpunkte der länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen gemeinsamen Brennpunkt P haben, und zwei Flächen V_1 und V_2 derselben Gattung, welche gleichfalls P zum Brennpunkt haben, berühren, liegen auf zwei confocalen Flächen eben derselben Gattung. Diese Mittelpunktsflächen haben zu Brennpunkten die Mittelpunkte der Flächen V_1 und V_2, und zu grossen resp. reellen Axen die Strecken $\frac{a_1+a_2}{2}$ und $\frac{a_1-a_2}{2}$, wo a_1 und a_2 die grossen resp. reellen Axen von V_1 und V_2 bezeichnen. Im Allgemeinen degenerirt eine einfache Schaar von länglichen Rotationsellipsoiden und zweischaligen Rotationshyperboloiden in elliptische Rotationsparaboloide. Die Scheitelebenen derselben sind die gemeinsamen Tangentialebenen zweier Kugeln K_1 und K_2, welche bezüglich mit V_1 und V_2 concentrisch sind und die grossen resp. reellen Axen derselben zu Durchmessern haben. Es umhüllen daher die Scheitelebenen der elliptischen Rotationsparaboloide, welche in der obigen Flächenschaar auftreten, zwei gerade Kreiskegel, und diese Kegel sind die gemeinsamen Tangentenkegel der Kugeln K_1 und K_2.

Ferner ist noch hervorzuheben:

Die Mittelpunkte der länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide,

welche einen gemeinsamen Brennpunkt P haben, und drei Flächen V_1, V_2, V_3 derselben Gattung, deren einer Brennpunkt ebenfalls P ist, berühren, liegen auf dem Durchschnitt zweier Paar confocaler Flächen dieser Gattung. Die Brennpunkte des einen Paares sind die Mittelpunkte von V_1 und V_2, die des anderen die Mittelpunkte von V_2 und V_3, und die grossen resp. reellen Axen des ersteren Paars haben bezüglich die Werthe $\frac{a_1+a_2}{2}$ und $\frac{a_1-a_2}{2}$, die des letzteren die Werthe $\frac{a_2+a_3}{2}$ und $\frac{a_2-a_3}{2}$, wo a_1, a_2, a_3 die grossen resp. rellen Axen von V_1, V_2, V_3 bezeichnen. Unter der vorliegenden Flächenschaar treten im Allgemeinen acht elliptische Rotationsparaboloide auf: ihre Scheitelebenen sind die gemeinsamen Tangentialebenen der drei Kugeln K_1, K_2, K_3 welche mit V_1, V_2, V_3 bezüglich concentrisch sind und die grossen resp. reellen Axen derselben zu Durchmessern haben.

Ein längliches Rotationsellipsoid oder zweischaliges Rotationshyperboloid, welches den Punkt P zum Brennpunkt hat und vier Flächen derselben Gattung V_1, V_2, V_3, V_4, welche denselben Punkt P zum Brennpunkt haben, berührt, ist concentrisch mit einer Berührungskugel der vier Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4, welche mit V_1, V_2, V_3, V_4 bezüglich concentrisch sind und die grossen resp. reellen Axen derselben zu Durchmessern haben, und hat den Durchmesser dieser Berührungskugel zur grossen resp. reellen Axe. Im Allgemeinen giebt es sechzehn Flächen obiger Gattung, welche den aufgestellten Bedingungen entsprechen, da sich sechzehn Berührungskugeln an K_1, K_2, K_3, K_4 denken lassen. Von diesen Flächen sind so viele längliche Rotationsellipsoide, als es Berührungskugeln giebt, welche den Punkt P innerhalb haben, und so viele zweischalige Rotationshyperboloide, als Berührungskugeln vorhanden sind, welche denselben ausserhalb haben.

Den Kugeln k, welche eine Kugel K und eine Ebene E berühren, entsprechen als Flächen $[P,k]$ längliche Rotationsellipsoide und zweischalige Rotationshyperboloide, welche P zum Brennpunkt haben und das längliche Rotationsellipsoid resp. zweischalige Rotationshyperboloid $[P,K]$ und das elliptische Rotationsparaboloid $[P,E]$ berühren. Es sei R der Radius der Kugel K und M ihr Mittelpunkt. Der Ort der Mittelpunkte der Kugeln k ist derselbe, als der Ort derjenigen Punkte, welche von M denselben Abstand haben als von je einer der beiden mit E perallelen Ebenen E_1 und E_2, die um die Strecke R von E entfernt sind. Es besteht daher die Mittelpunktsfläche der Kugeln k aus zwei confocalen elliptischen Rotationsparaboloiden, welche M zum Brennpunkt und die beiden Ebenen E_1 und E_2 zu Directrixebenen haben. Daher der Satz:

Die länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen Brennpunkt P gemein haben, eine Fläche derselben Gattung V und ein elliptisches Rotationsparaboloid W, welche gleichfalls P zum Brennpunkt haben, berühren, haben ihre Mittelpunkte auf zwei confocalen elliptischen Rotationsparaboloiden. Der gemeinsame Brennpunkt derselben ist der Mittelpunkt der Fläche V und ihre Directrixebenen sind zwei mit der Scheitelebene von W parallele Ebenen, welche von derselben um die halbe grosse resp. reelle Axe der Fläche V abstehen.

Man mag ferner bemerken:

Die Mittelpunkte der länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen Brennpunkt P gemein haben, eine Fläche derselben Gattung V und zwei elliptische Rotationsparaboloide W_1 und W_2, denen gleichfalls der Punkt P als Brennpunkt angehört, berühren, liegen auf vier Kegelschnitten. Zwei von diesen liegen in einer Ebene, die beiden anderen in einer zu dieser senkrechten Ebene. Diese beiden Ebenen halbiren Winkel und Nebenwinkel der Scheitelbenen von W_1 und W_2, und die Kegelschnitte in denselben sind die Durchschnitte dieser Ebenen mit zwei confocalen elliptischen Rotationsparaboloiden, welche den Mittelpunkt von V zum Brennpunkt haben, und deren Directrixebenen mit der Scheitelebene von W_1 parallel und von derselben um die halbe grosse resp. reelle Axe der Fläche V entfernt sind.

Die Mittelpunkte der länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen Brennpunkt P gemein haben, zwei Flächen derselben Gattung V_1 und V_2 und ein elliptisches Rotationsparabolid W, welche gleichfalls P zum Brennpunkt haben, berühren, liegen auf der Durchschnittscurve zweier Paar confocaler elliptischer Rotationsparaboloide. Das eine Paar hat zum Brennpunkt den Mittelpunkt von V_1, das andere den von V_2; die Directrixebenen beider sind mit der Scheitelebene von W parallel, und zwar sind, wenn a_1 und a_2 die grossen resp. reellen Axen von V_1 und V_2 bezeichnen, die des ersten Paars um $\frac{a_1}{2}$, die des zweiten um $\frac{a_2}{2}$ von dieser Scheitelebene entfernt.

Einer Schaar Ebenen e, welche eine Gerade G gemeinschaftlich haben, entspricht als Flächenschaar $[P,e]$ eine Schaar von elliptischen Rotationsparaboloiden, welchen die Ebenen e bezüglich als Scheitelebenen zugehören. Die Umhüllung der Flächen $[P,e]$ ist der parabolische Cylinder $[P,G]$. Dies folgt einerseits unmittelbar aus dem in § 2 ausgesprochenen Satze, andrerseits wird es durch folgende Betrachtung leicht ersichtlich. Zieht man nämlich Strahlen von P nach der Geraden G und errichtet in ihren Endpunkten senkrechte Ebenen, so werden diese Ebenen nach § 3 sowohl den parabolischen Cylinder $[P,G]$ umhüllen, als auch werden sie Tangentialebenen an jedem Glied der Schaar $[P,e]$ sein. Es ist demnach jede Gerade des Cylinders zugleich Tangente jeder Fläche $[P,e]$. Daher folgt:

Ist einem parabolischen Cylinder ein elliptisches Rotationsparaboloid in dem Sinne eingeschrieben, dass jede Gerade des Cylinders Tangente jenes elliptischen Rotationsparaboloides ist, so lässt sich eine einfache Schaar von elliptischen Rotationsparaboloiden, welche mit jenem denselben Brennpunkt haben, dem Cylinder in demselben Sinne einschreiben, und zwar gehen die Scheitelebenen derselben alle durch eine Gerade G. Sie ist die Scheitellinie der Parabel, welche die Spur des Cylinders auf der Ebene bildet, die durch den gemeinsamen Brennpunkt senkrecht gegen die erzeugenden Geraden des Cylinders geführt ist.

Bemerkt man, dass die Ebenen, welche durch zwei Punkte π_1 und π_2 gehen, die verbindende Gerade $\pi_1\pi_2$ gemein haben, und dass die Flächen $[P,\pi_1]$ und $[P,\pi_2]$ zwei Ebenen sind, welche bezüglich durch π_1 und π_2 gehen und auf den Strahlen $P\pi_1$ und $P\pi_2$ senkrecht stehen, so folgt einerseits der Satz, der in § 4 über die Lage der Scheitelebenen von elliptischen Rotationsparaboloiden, welche einen Brennpunkt gemein haben und zwei Ebenen berühren, angeführt wurde, andrerseits lässt sich noch folgende Bemerkung machen:

Die elliptischen Rotationsparaboloide, welche einen Brennpunkt P gemein haben und zwei Ebenen berühren, tangiren diese Ebenen in zwei parallelen Geraden. Die Enveloppe der vorliegenden Flächenschaar ist ein parabolischer Cylinder, welcher die Ebenen E_1 und E_2 in jenen Geraden berührt. Die erzeugenden Geraden dieses Cylinders stehen senkrecht auf der Ebene, welche durch den Punkt P und die Fusspunkte π_1 und π_2 der von P auf die Ebenen E_1 und E_2 gefällten Perpendikel bestimmt ist, und seine Spur in dieser Ebene ist die Parabel, welche den Punkt P zum Brennpunkt und die verbindende Gerade $\pi_1\pi_2$ zur Scheitellinie hat.

Den Kugeln k, welche durch einen Kreis $\varkappa$ gehen, entsprechen als Flächen $[P,k]$ längliche Rotationsellipsoide und zweischalige Rotationshyperboloide, welche P zum Brennpunkt haben und die Fläche $[P,\varkappa]$ zur Enveloppe. Dies folgt sowohl unmittelbar aus § 2, als auch wird es durch folgende Erwägungen leicht deutlich. Zieht man nämlich von P Strahlen nach den Punkten der Peripherie des Kreises $\varkappa$ und errichtet in den Endpunkten derselben senkrechte Ebenen, so umhüllen diese nach § 3 einerseits den elliptischen resp. hyperbolischen Kegel $[P,\varkappa]$, andrerseits jedes Element der Schaar $[P,k]$. Es wird demnach jedes längliche Rotationsellipsoid oder zweischalige Rotationshyperboloid $[P,k]$ den Kegel $[P,\varkappa]$ zu einem Tangentenkegel haben. Erwägt man daher, dass die Mittelpunkte obiger Kugelschaar auf der Geraden liegen, welche im Mittelpunkt des Kreises $\varkappa$

senkrecht auf seiner Ebene errichtet ist, und dass mit je einem Elemente dieser Schaar ein Element jener Schaar $[P,k]$ concentrisch ist, so lässt sich der Satz aussprechen:

Ist einem Kegel zweiten Grades ein längliches Rotationsellipsoid oder ein zweischaliges Rotationshyperboloid V in dem Sinne eingeschrieben, dass jener Kegel ein Tangentenkegel der Fläche V ist, so lässst sich eine einfache Schaar von Flächen derselben Gattung, welche einen Brennpunkt von V zum gemeinsamen Brennpunkt haben, noch in demselben Sinne dem Kegel einschreiben, und zwar liegen die Mittelpunkte aller dieser Flächen auf einer Geraden. Um die Lage der Geraden zu bestimmen, construire man zwei Kugeln, von denen die eine die Entfernung des Brennpunktes von der Spitze des Kegels zum Durchmesser hat, die andere um den Mittelpunkt der Fläche V mit ihrer halben grossen resp. reellen Axe beschrieben ist; alsdann ist die im Mittelpunkt des Durchschnittskreises jener Kugeln auf der Ebene desselben errichtete Senkrechte der Ort der Mittelpunkte der Flächenschaar. Ein Element der Schaar degenerirt in ein elliptisches Rotationsparaboloid, und dieses hat die Ebene jenes Durchschnittskreises zur Scheitelebene.

Erwägt man, dass die Kugeln, welche sich in drei Punkten π_1, π_2, π_3 schneiden, den durch π_1, π_2, π_3 bestimmten Kreis gemeinschaftlich haben, und dass die Flächen $[P,\pi_1]$, $[P,\pi_2]$, $[P,\pi_3]$ Ebenen sind, welche bezüglich durch π_1, π_2, π_3 gehen und auf den Strahlen $P\pi_1, P\pi_2, P\pi_3$ senkrecht stehen, so stellt sich einerseits der Satz heraus, der in § 4 in Betreff der Mittelpunkte der länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen Brennpunkt gemein haben und drei Ebenen berühren, erwähnt wurde, andrerseits lässt sich noch Folgendes hervorheben:

Die länglichen Rotationsellipsoide und zweischaligen Rotationshyperboloide, welche einen Brennpunkt P gemein haben und drei Ebenen E_1, E_2, E_3 berühren, tangiren jede dieser drei Ebenen in einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt P_1 dieser Ebenen geht. Die Enveloppe der Flächenschaar ist ein Kegel zweiten Grades, dessen Spitze der Punkt P_1 ist, und welcher die drei Ebenen E_1, E_2, E_3 in jenen drei Geraden berührt. Er schneidet die Ebene, welche durch die Fusspunkte π_1, π_2, π_3 der von P auf E_1, E_2, E_3 gefällten Perpendikel geführt ist, in einem Kegelschnitt, dessen Brennpunkte die Projectionen von P und P_1 auf diese Ebene sind, und welcher zur grossen resp. reellen Axe den Durchmesser des Kreises hat, der dem Fusspunktendreieck $\pi_1\pi_2\pi_3$ umgeschrieben ist.

Ad. Schumann.