Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale.

Unter den sogenannten vollständigen elliptischen Integralen der ersten und zweiten Gattung (den Modular- und elliptischen Quadranten nach Gudermann's Benennung) welche zu zwei conjugirten Moduln gehören, findet bekanntlich ein einfacher, zuerst von Legendre aufgefundener Zusammenhang statt, welcher in den jetzt gebräuchlichen Zeichen durch die Gleichung

$$KE' + EK' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

dargestellt wird. In der vorliegenden Abhandlung beabsichtige ich, für die Abel'schen Integrale aller Ordnungen eine Reihe analoger Relationen zu entwickeln, welche, wie ich glaube, nicht bekannt sind. Es findet sich zwar (Crelle's Journal, Bd. 19, S. 312) eine gelegentliche Bemerkung von Jacobi, eine von ihm aufgefundene Verallgemeinerung des Legendre'schen Satzes betreffend; allein nach den Andeutungen, die derselbe a. a. O. giebt, glaube ich annehmen zu dürfen, dass die Relation, welche er im Sinne hat, mit derjenigen übereinstimme, die später Hädenkamp (Crelle's Journal, Bd. 22, S. 184) auf dem von Jacobi angegebenen Wege hergeleitet hat. Die Resultate indess, zu welchen ich gelangt bin, sind nicht nur von dem Hädenkamp'schen verschieden, sondern auch weit einfacher und mit der Legendre'schen Formel übereinstimmender.

Die von mir entwickelten Relationen sind für die Theorie der Abel'schen Transcendenten von besonderer Bedeutung. Ich beschäftige mich seit längerer Zeit mit dieser Theorie und namentlich mit der Hauptaufgabe, die von Jacobi eingeführten umgekehrten Functionen der Abel'schen Integrale erster Gattung wirklich darzustellen. Es ist mir gelungen, diese Aufgabe vollständig zu lösen, auf einem Wege, welcher von dem bisher von Göpel u. A. betretenen gänzlich verschieden ist. Ich gehe nämlich unmittelbar von den Integral-Gleichungen aus, durch welche jene Functionen definirt werden, und zeige zunächst, mit Hülfe des Abel'schen Theorems, dass sie sämtlich Wurzeln ein und derselben algebraischen Gleichung sind, deren Coefficienten ich sodann durch eine Anzahl von Hilfsfunctionen ausdrücke, welche den sogenannten Θ Functionen, auf welche Jacobi die elliptischen Functionen zurückgeführt hat, vollkommen analog sind, und gleich diesen durch unendliche, nach einem einfachen Gesetze gebildete und beständig convergirende Reihen dargestellt werden können. Diese Reihen-

Entwickelungen gewinne ich, indem ich für die genannten Hilfsfunctionen mehrere charakteristische Eigenschaften nachweise, durch welche sie vollständig bestimmt werden. Dazu aber ist die Kenntniss der Relationen, welche der Gegenstand des gegenwärtigen Aufsatzes sind, ein wesentliches Erforderniss. Nun hat zwar der Weg, den ich bei Behandlung der Abel'schen Transcendenten eingeschlagen, das Eigenthümliche, dass man auf ihm selbst in ungesuchter Weise zu jenen Relationen geführt wird, wie ich sie denn in der That auch so zuerst gefunden habe. Es ist aber diese Art der Herleitung einigermassen umständlich, indem namentlich die Bestimmung einiger Constanten Weiläufigkeiten macht. Um so erwünschter war es mir, in einem von Abel in der Abhandlung: *Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendentes* (Oeuvres complètes, Tome II, pag. 54) begründeten Theoreme, durch welches die bekannten Sätze über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der elliptischen Integrale eine sehr bemerkenswerthe Verallgemeinerung erhalten, die eigentliche Quelle zu entdecken, aus der die in Rede stehenden Relationen, so wie noch andere weit allgemeinere, auf eben so einfachem als direktem Wege abgeleitet werden können.

§. 1.

Es sei $R(x)$ eine ganze Function von x ; a, b seien irgend zwei Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, und es werde

$$1. \quad \frac{1}{2} \frac{R(x) - R(y)}{(x-y)^2} - \frac{1}{4} \frac{R'(x) + R'(y)}{x-y} = F(x, y)$$

gesetzt, wo $R'(x), R'(y)$ die ersten Differential-Coefficienten von $R(x), R(y)$ bedeuten, so dass, wie man sich leicht überzeugt, $F(x, y)$ eine ganze Function von x, y ist. Alsdann gilt als ein besonderer Fall des angeführten Abel'schen Theorems die folgende Gleichung, in welcher α, β irgend zwei bestimmte Werthe der Veränderlichen x, y bezeichnen:

$$2. \quad VR(\alpha) \int_b^\beta \frac{dy}{(y-\alpha)VR(y)} - VR(\beta) \int_a^\alpha \frac{dx}{(x-\beta)VR(x)} = 2 \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{F(x, y) dx dy}{VR(x) VR(y)}$$

Als nothwendige Bedingung des Bestehens dieser Gleichung ist noch hinzuzufügen, dass innerhalb der Grenzen der Integration $x - y$ nicht $= 0$ werden darf.

Es ist nämlich

$$\frac{d}{dx} \frac{VR(x)}{y-x} = \left(\frac{1}{2} \frac{R'(x)}{y-x} + \frac{R(x)}{(y-x)^2} \right) \cdot \frac{1}{VR(x)},$$

$$\frac{d}{dy} \frac{VR(y)}{x-y} = \left(\frac{1}{2} \frac{R'(y)}{x-y} + \frac{R(y)}{(x-y)^2} \right) \cdot \frac{1}{VR(y)},$$

also

$$\frac{d}{dx} \frac{VR(x)}{(y-x)VR(y)} - \frac{d}{dy} \frac{VR(y)}{(x-y)VR(x)} = \frac{2F(x,y)}{VR(x)VR(y)},$$

$$2 \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{F(x,y) dx dy}{VR(x)VR(y)} = \int_b^\beta dy \int_a^\alpha \frac{d}{dx} \frac{VR(x)}{(y-x)VR(y)} dx - \int_a^\alpha dx \int_b^\beta \frac{d}{dy} \frac{VR(y)}{(x-y)VR(x)} dy$$

$$= VR(\alpha) \int_b^\beta \frac{dy}{(y-\alpha)VR(y)} - VR(\beta) \int_a^\alpha \frac{dx}{(x-\beta)VR(x)}$$

Es sei nun

$$R(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2n+1})$$

und es werde zunächst angenommen, dass die Zahlen $a_1, a_2, \dots$ sämtlich reell und so geordnet seien, dass

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n+1}$$

Alsdann hat $R(x)$, wenn x zwischen den Grenzen $a_\mu, a_{\mu+1}$ enthalten ist, wo μ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ bedeutet, dasselbe Zeichen wie $(-1)^{\mu-1}$, so dass man setzen kann

$$VR(x) = \pm i^{\mu-1} V[(-1)^{\mu-1} R(x)],$$

wo $V[(-1)^{\mu-1} R(x)]$ den positiven Werth der Quadratwurzel aus der positiven Grösse $(-1)^{\mu-1} R(x)$ bezeichnen soll. Liegt x zwischen $-\infty$ und a_1 , so hat man

$$VR(x) = \pm i V[-R(x)],$$

und wenn x zwischen a_{2n+1} und $+\infty$ enthalten ist

$$VR(x) = \pm V[+R(x)]$$

Um nun einem Integral wie $\int \frac{F(x) dx}{VR(x)}$ eine ganz bestimmte Bedeutung zu geben, werde für das Folgende festgesetzt, dass bei der Integration von den beiden Werthen, welche $VR(x)$ hat, immer derjenige in Anwendung kommen soll, den man erhält, wenn man in den vorstehenden Formeln das obere Zeichen nimmt.

Dies vorausgesetzt setze man in der Gleichung (2) $a = a_\mu$, $b = a_\nu$ und nehme zunächst an, dass $\nu > \mu + 1$ aber $< 2n + 1$ sei, so darf man $\alpha = a_{\mu+1}$, $\beta = a_{\nu+1}$ nehmen, weil in diesem Fall die Differenz $x-y$ innerhalb der Grenzen der Integration nicht $= 0$ wird. Die linke Seite wird alsdann $= 0$, und man erhält demnach

$$3. \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \frac{F(x,y) dx dy}{VR(x)VR(y)} = 0$$

Wenn aber $\nu = \mu + 1$, so kann man den Werth des Doppel-Integrals

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{F(x, y) dx dy}{VR(x) VR(y)},$$

welches durch S bezeichnet werden möge, mit Hülfe der Gleichung (2) nicht direkt auf dieselbe Weise ermitteln; man gelangt jedoch dazu auf folgendem Wege.

Es werde a_μ durch a , $a_{\mu+1}$ durch c , $a_{\mu+2}$ durch b bezeichnet, so ist

$$S = - \int_a^c \int_b^c \frac{F(x, y) dx dy}{VR(x) VR(y)}$$

Sodann seien s, t zwei positive Zahlen, so gewählt, dass $c - s > a$ und $c + t < b$ bleibt, so ist S die Grenze, welcher sich das Doppel-Integral

$$- \int_a^{c-s} \int_b^{c+t} \frac{F(x, y) dx dy}{VR(x) VR(y)} = S'$$

uähert, wenn s, t unendlich klein werden. Für dieses letztere Integral aber darf man vermöge der Gleichung (2) setzen

$$\frac{1}{2} \int_a^{c-s} \frac{VR(c+t) dx}{(x-c-t) VR(x)} - \frac{1}{2} \int_b^{c+t} \frac{VR(c-s) dy}{(y-c+s) VR(y)}$$

Dieser Ausdruck wandelt sich, wenn $x = c - u$, $y = c + v$ gesetzt wird, in den folgenden um:

$$S' = \frac{1}{2} \int_{c-a}^s \frac{VR(c+t)}{(u+t) VR(c-u)} du - \frac{1}{2} \int_{b-c}^t \frac{VR(c-s)}{(v+s) VR(c+v)} dv$$

Es mögen jetzt σ, τ zwei bestimmte Werthe von s und t bezeichnen, die nur so klein anzunehmen sind, dass sich $VR(c-s)$, $VR(c+t)$ für alle Werthe von s, t , welche nicht grösser als σ, τ sind, durch convergirende Reihen, die nach aufsteigenden Potenzen dieser Veränderlichen fortschreiten, darstellen lassen. Alsdann hat man

$$\begin{aligned} 2S' = & VR(c+t) \cdot \int_{c-a}^{\sigma} \frac{du}{(t+u) VR(c-u)} - VR(c-s) \int_{b-c}^{\tau} \frac{dv}{(s+v) VR(c+v)} \\ & + \int_{\sigma}^s \frac{VR(c+t) du}{(t+u) VR(c-u)} - \int_{\tau}^t \frac{VR(c-s) dv}{(s+v) VR(c+v)} \end{aligned}$$

Die Integrale

$$\int_{c-a}^{\sigma} \frac{du}{(t+u)VR(c-u)}, \int_{b-c}^{\tau} \frac{dv}{(s+v)VR(c+v)}$$

bleiben für alle Werthe von t, s innerhalb der für diese Veränderlichen bezeichneten Grenzen endlich; $VR(c+t), VR(c-s)$ nähern sich aber, wenn t, s unendlich klein werden, der Grenze $VR(c) = 0$. Daraus folgt, dass die Grenze von S' für $t=0, s=0$ dieselbe ist wie die, welcher sich die Formel

$$\frac{1}{2} \int_{\sigma}^s \frac{VR(c+t) du}{(t+u)VR(c-u)} - \frac{1}{2} \int_{\tau}^t \frac{VR(c-s) dv}{(s+v)VR(c+v)}$$

nähert, wenn s, t unendlich klein werden.

Nach den oben für $VR(x)$ getroffenen Bestimmungen kann man nun, da $c-u$ zwischen a_{μ} und $a_{\mu+1}$, $c+v$ zwischen $a_{\mu+1}$ und $a_{\mu+2}$ liegt, setzen

$$VR(c+v) = i^{\mu} V[(-1)^{\mu} R'(c)] \cdot Vv \cdot (1+F(v))$$

$$VR(c-u) = i^{\mu-1} V[(-1)^{\mu} R'(c)] \cdot Vu \cdot (1+F(-u))$$

wo $F(v)$ in eine convergirende Reihe entwickelt werden kann, die nur ganze, positive Potenzen von v enthält, und $F(-u)$ aus $F(v)$ hervorgeht, wenn man $-u$ für v setzt. Vu und Vv sind positiv zu nehmen. Alsdann ist

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^s \frac{VR(c+t) du}{(t+u)VR(c-u)} &= \int_{\sigma}^s \frac{i Vt \cdot (1+F(t)) du}{(t+u)Vu \cdot (1+F(-u))} \\ &= i \int_{\sigma}^s \frac{Vt \cdot du}{(t+u)Vu} + i Vt \int_{\sigma}^s \frac{F(t) - F(-u)}{t+u} \cdot \frac{du}{Vu \cdot (1+F(-u))} \end{aligned}$$

Der zweite Theil auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich, weil $F(t) - F(-u)$ durch $t+u$ dividirbar ist, in eine Reihe von Gliedern entwickeln, welche nur positive Potenzen von s, σ, t enthalten und für $t=0$ verschwinden. Eben so findet man

$$\int_{\tau}^t \frac{VR(c-s) dv}{(s+v)VR(c+v)} = -i \int_{\tau}^t \frac{Vs dv}{(s+v)Vv} + \text{eine Reihe von Gliedern, die für}$$

$s=0$ verschwinden.

Daraus ergibt sich denn, dass der Werth von S die Grenze ist, in welcher sich die Formel

$$\frac{i}{2} \int_0^s \frac{Vt \, du}{(t+u) V_u} + \frac{i}{2} \int_t^s \frac{Vs \, dv}{(s+v) V_v}$$

nähert, wenn t, s unendlich klein werden. Diese Formel lässt sich aber, wenn man bei dem ersten Integrale die Substitution $\frac{V_u}{V_v} = w$, bei dem andern die Substitution $\frac{V_s}{V_v} = w$ anwendet, und $\frac{V_s}{V_t} = p$, $\frac{V_\sigma}{V_t} = q$ setzt, umwandeln in

$$\frac{1}{i} \int_p^q \frac{dw}{1+w^2},$$

welcher Ausdruck für $s = 0, t = 0$ übergeht in

$$\frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{dw}{1+w^2} = \frac{\pi}{2i}$$

Es ist demnach

$$S = \frac{\pi}{2i},$$

oder

$$4. \quad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{F(x, y) \, dx \, dy}{V R(x) V R(y)} = \frac{\pi}{2i}$$

§. 2.

Die Doppel-Integrale auf der linken Seite der Gleichungen (3, 4) des vorhergehenden §. können, weil $F(x, y)$ in Beziehung auf x sowohl als y eine ganze Function vom $(2n-1)$ ten Grade ist, dargestellt werden als ein Aggregat von Gliedern, von denen jedes ein Product zweier Abel'schen Integrale der ersten und zweiten Gattung ist; die Gleichungen (3, 4) geben also eine Reihe von Relationen unter solchen Integralen, die man in Erweiterung der Legendre'schen Benennung vollständige Abel'sche Integrale nennen kann.

Wenn $R(x)$ vom dritten Grade ist, so ist $F(x, y) = \frac{1}{4}(y-x)$, und es reduciren sich die Gleichungen auf die einzige

$$1. \int_{a_1}^{a_2} \int_{a_2}^{a_3} \frac{(y-x) dx dy}{4 \sqrt{R(x)} \sqrt{R(y)}} = \frac{\pi}{2i}, \text{ oder}$$

$$2. \int_{a_1}^{a_2} \int_{a_2}^{a_3} \frac{(y-x) dx dy}{4 \sqrt{R(x)} \sqrt{[-R(y)]}} = \frac{\pi}{2}$$

Setzt man $\sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-a_1}} = t$, $\sqrt{\frac{y-a_1}{a_2-a_1}} = s$, $k = \sqrt{\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}}$, so ist

$$\frac{dx}{2 \sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{(a_3-a_1)}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

$$\frac{dy}{2 \sqrt{[-R(y)]}} = \frac{1}{\sqrt{(a_3-a_1)}} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2 s^2)}},$$

und die Gleichung (2) geht, wenn man

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = K, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2 t^2)}} = K_1$$

$$\int_0^1 \frac{k^2 s^2 ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}} = J, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 s^2 ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2 s^2)}} = J_1$$

setzt, über in die folgende:

$$3. KJ_1 - JK_1 = \frac{\pi}{2}$$

Diese Gleichung ist identisch mit der oben angeführten Legendre'schen. Denn es ist

$$J = K - E,$$

und wenn man $k' = \sqrt{1-k^2}$, $t = \frac{1}{k} \sqrt{1-k'^2 w^2}$ setzt, so erhält man

$$K_1 = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k'^2 w^2)}} = K',$$

und durch dieselbe Substitution

$$J_1 = E',$$

mithin

$$4. \quad \begin{aligned} KE' - (K - E) K' &= \frac{\pi}{2}, \text{ oder} \\ KE' + EK' - KK' &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ich werde jetzt zeigen, dass man den Gleichungen (3, 4) des §. 1 eine ganz ähnliche Gestalt geben kann, wie der Gleichung (3) dieses §. Zu dem Ende wird es aber nöthig sein, einige Bemerkungen über die Form, unter welcher nach meiner Ansicht die Abel'schen Transcendenten zu behandeln sind, voraus zu schicken.

§. 3.

Dem System der Integral-Gleichungen, von welchem man nach Jacobi in der Theorie des Abel'schen Transcendenten ausgehen muss, kann man immer folgende Form geben, welche mir die angemessenste zu sein scheint, wenn man die Analogie dieser Functionen mit den elliptischen so viel als möglich will hervortreten lassen.

Es werde die Function $R(x)$ in zwei Factoren $P(x)$, $Q(x)$ zerfällt, und zwar sei

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3) \dots (x - a_{2n-1})$$

$$Q(x) = (x - a_2)(x - a_4) \dots (x - a_{2n})(x - a_{2n+1})$$

Ferner werde

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{Q(a_{2a-1})}{(a_{2a} - a_{2a-1}) P'(a_{2a-1})} \right)} = g_a, \quad \frac{g_a P(x)}{x - a_{2a-1}} = F_a(x)$$

gesetzt, wo a , wie überhaupt jeder im Folgenden als Index vorkommende deutsche Buchstabe, eine der Zahlen 1, 2, 3, ..., n bedeutet, und es seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ n Veränderliche, welche als Functionen eben so vieler veränderlichen Argumente $u_1, u_2, \dots, u_n$ durch die Gleichungen

$$1. \quad \begin{cases} u_1 = \sum \int_{a_{2a-1}}^{x_a} \frac{F_1(x) dx}{\sqrt{R(x)}} \\ u_2 = \sum \int_{a_{2a-1}}^{x_a} \frac{F_2(x) dx}{\sqrt{R(x)}} \\ \dots \dots \dots \\ u_n = \sum \int_{a_{2a-1}}^{x_a} \frac{F_n(x) dx}{\sqrt{R(x)}} \end{cases}$$

definiert werden, in denen sich das Summenzeichen auf den Index a bezieht. Es handelt sich darum, die Functionen $x_1, x_2, \dots, x_n$ durch ihre Argumente in einer für alle Werthe der letztern gültig bleibenden Form wirklich auszudrücken.

Zunächst erhält man für dieselben unendliche Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von $u_1, u_2, \dots, u_n$ fortschreiten, und zwar ist, wenn man durch $(u_1, u_2, \dots, u_n)_a$ eine homogene Function des a ten Grades von $u_1, u_2, \dots$ bezeichnet,

$$2. \quad V \frac{x_a - a_{2a-1}}{a_{2a} - a_{2a-1}} = u_a + (u_1, u_2, \dots, u_n)_3 + (u_1, u_2, \dots, u_n)_5 + \dots$$

Diese Reihen convergiren zwar nicht beständig, aber doch für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots$, die ihrer absoluten Grösse nach bestimmte Grenzen nicht überschreiten. Sodann kann man mit Hülfe des Abel'schen Theorems nachweisen, dass $x_1, x_2, \dots, x_n$ Wurzeln ein und derselben Gleichung n ten Grades sind, der man die Form

$$3. \quad \frac{a_2 - a_1}{x - a_1} p_1^2 + \frac{a_4 - a_3}{x - a_3} p_2^2 + \dots + \frac{a_{2n} - a_{2n-1}}{x - a_{2n-1}} p_n^2 = 1$$

geben kann, wo $p_1, p_2, \dots, p_n$ eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \dots, u_n$ sind, die ganz den Charakter rationaler Functionen besitzen. In Reihen nach Potenzen von $u_1, u_2, \dots$ entwickelt hat p_a genau dieselbe Gestalt wie die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (2), woraus erhellt, dass p_a eine ungrade Function von $u_1, u_2, \dots$ ist. Ferner hat man

$$4. \quad p_a = V \frac{(a_{2a-1} - x_1)(a_{2a-1} - x_2) \dots (a_{2a-1} - x_n)}{(a_{2a-1} - a_{2a}) P'(a_{2a-1})}$$

Für $n = 1$ ergibt sich, wenn man x, u, p für x_1, u_1, p_1 schreibt,

$$u = \int_{a_1}^x \frac{\frac{1}{2} V(a_3 - a_1) \cdot dx}{V(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)},$$

$$p = V \frac{x - a_1}{a_2 - a_1},$$

woraus

$$u = \int_0^p \frac{dp}{V(1-p^2)(1-k^2 p^2)}, \quad k^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}$$

folgt, so dass $p = \sin \operatorname{am} u$, oder nach Gudermann's kürzerer Bezeichnung (Theorie der Modular-Functionen) $p = \operatorname{sn} u$ ist. In Erweiterung dieser letztern Bezeichnung setze ich

$$p_a = \operatorname{sn}(u_1, u_2, \dots, u_n)_a,$$

so wie ferner

$$5. \sqrt{\frac{(a_{2a} - x_1)(a_{2a} - x_2) \dots (a_{2a} - x_n)}{P(a_{2a})}} = \text{cn}(u_1, u_2, \dots, u_n)_a$$

$$6. \sqrt{\frac{(a_{2n+1} - x_1)(a_{2n+1} - x_2) \dots (a_{2n+1} - x_n)}{P(a_{2n+1})}} = \text{dn}(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Auf diese Weise sind in die Theorie der Abelschen Transcendenten $(2n+1)$ Functionen eingeführt, welche mit den drei elliptischen Functionen $\sin \text{am } u = \text{sn } u$, $\cos \text{am } u = \text{cn } u$, $\Delta \text{am } u = \text{dn } u$, in welche sie für $n=1$ übergehen, eine grosse Aehnlichkeit haben. So z. B. lässt sich $\text{sn}(u+v)$ rational durch $\text{sn } u$, $\frac{d \text{sn } u}{du}$, $\text{sn } v$, $\frac{d \text{sn } v}{dv}$ ausdrücken mittelst der Formel

$$\text{sn}(u+v) = \frac{\text{sn } u^2 - \text{sn } v^2}{\text{sn } u \frac{d \text{sn } v}{dv} - \text{sn } v \frac{d \text{sn } u}{du}} = \frac{\text{sn } u^2 - \text{sn } v^2}{\text{sn } u \text{cn } v \text{dn } v - \text{sn } v \text{cn } u \text{dn } u},$$

und ähnliche Formeln gelten für $\text{cn}(u+v)$ und $\text{dn}(u+v)$. Für die angegebenen Functionen mehrerer Veränderlichen aber findet man, $\frac{a_{2a} - a_{2a-1}}{2g_a} = e_a$ setzend:

$$2. \sum_a e_a \left(\text{sn}(u_1, u_2, \dots)_a \frac{d \text{sn}(v_1, v_2, \dots)_a}{dv_b} - \text{sn}(v_1, v_2, \dots)_a \frac{d \text{sn}(u_1, u_2, \dots)_a}{du_b} \right) \cdot \text{sn}(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots)_a \\ = e_b \cdot \left(\text{sn}^2(u_1, u_2, \dots)_b - \text{sn}^2(v_1, v_2, \dots)_b \right)$$

Setzt man in dieser Gleichung b der Reihe nach $= 1, 2, \dots, n$, so erhält man n Gleichungen, mittelst welcher die n Functionen $\text{sn}(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots)_a$ rational durch $\text{sn}(u_1, u_2, \dots)_a$, $\text{sn}(v_1, v_2, \dots)_a$ und deren partiellen Differential-Coefficienten, welche letztere algebraische Functionen jener sind, ausgedrückt werden können. Aehnliches gilt für die durch cn , dn bezeichneten Functionen. Bezeichnet man ferner

$$8. \int_{a_{2b-1}}^{a_{2b}} \frac{F_a(x) dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ durch } K_{a,b},$$

$$9. \int_{a_{2b}}^{a_{2b+1}} \frac{F_a(x) dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ durch } \frac{\bar{K}_{a,b}}{i}$$

und setzt 10. $\sum_{c=b}^{c=n} \bar{K}_{a,c} = \bar{K}_{a,b} + \bar{K}_{a,b+1} + \dots + \bar{K}_{a,n} = K'_{a,b},$

so haben diese $2 \cdot n^2$ bestimmten Integrale $K_{a,b}$, $K'_{a,b}$ für die Theorie der Abel'schen Transcendenten eine ganz ähnliche Bedeutung wie die Grössen K, K' für die elliptischen Functionen. So z. B. findet man, wenn man

$$11. \quad \omega_a = m_1 K_{a,1} + m_2 K_{a,2} + \dots + m_n K_{a,n} \\ + (n_1 K'_{a,1} + n_2 K'_{a,2} + \dots + n_n K'_{a,n}) i$$

setzt, wo $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots$ ganze (positive oder negative) Zahlen bedeuten, für die Functionen sn, cn, dn die charakteristischen Gleichungen

$$12. \quad \begin{cases} sn(u_1 + 2\omega_1, u_2 + 2\omega_2, \dots, u_n + 2\omega_n)_a = (-1)^{m_a + n_1 + n_2 + \dots + n_{a-1}} sn(u_1, u_2, \dots, u_n)_a \\ cn(u_1 + 2\omega_1, u_2 + 2\omega_2, \dots, u_n + 2\omega_n)_a = (-1)^{m_a + n_1 + n_2 + \dots + n_a} cn(u_1, u_2, \dots, u_n)_a \\ dn(u_1 + 2\omega_1, u_2 + 2\omega_2, \dots, u_n + 2\omega_n)_a = (-1)^{n_1 + n_2 + \dots + n_n} dn(u_1, u_2, \dots, u_n)_a \end{cases}$$

in welchen Formeln, wenn $a = 1$ ist, $n_0 = 0$ zu setzen ist.

Die Functionen sn, cn, dn stehen übrigens in einem einfachen algebraischen Zusammenhange, vermöge dessen je $(n+1)$ derselben durch die übrigen ausgedrückt werden können.

Was nun ferner die Abel'schen Integrale der zweiten Gattung anlangt, so lassen sich dieselben durch n neue Functionen der Argumente $u_1, u_2, \dots$ ausdrücken, von denen ich die a te durch $J(u_1, u_2, \dots, u_n)_a$ bezeichne und auf folgende Weise definire. Man denke sich $x_1, x_2, \dots$ mittelst der Gleichung (3) durch $u_1, u_2, \dots$ ausgedrückt und setze

$$13. \quad J(u_1, u_2, \dots, u_n)_a = \sum_b \int_{a_{2b-1}}^{x_b} \frac{a_{2a} - a_{2a-1}}{x - a_{2a-1}} \cdot \frac{F_a(x) dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad *)$$

*) Anm. In dieser und in einigen folgenden Formeln habe ich mir erlaubt, die allgemein eingeführte Bezeichnung für ein bestimmtes Integral in einem Sinne zu gebrauchen, in welchem sie auch dann noch anwendbar bleibt, wenn die Function unter dem Integral-Zeichen an einer der Grenzen der Integration oder an beiden unendlich wird. Es sei nämlich $F(x)$ eine Function von x , die für alle Werthe dieser Veränderlichen innerhalb eines gegebenen Intervalls, dessen Grenzen a, b sind, endlich bleibt, und es lasse sich dieselbe für alle Werthe von x in der Nähe von a durch eine Reihe von der Form

$$S A (x - a)^m,$$

so wie für die Werthe von x in der Nähe von b durch eine Reihe

$$S B (x - b)^n$$

darstellen. Sind nun α, β zwei bestimmte Werthe von x innerhalb des gegebenen

mit der Bestimmung, dass x und $\sqrt{R(x)}$ bei jeder einzelnen Integration dieselben Werthe durchlaufen wie in den Gleichungen (1). Auf diese Weise erklärt ist $J(u_1, u_2, \dots)_a$ eine für alle Werthe der Argumente $u_1, u_2, \dots$ völlig bestimmte, eindeutige Function. Drückt man $dx_1, dx_2, \dots$ durch $du_1, du_2, \dots$ aus, so ergibt sich (14) für $J(u_1, u_2, \dots, u_n)_a$ der Ausdruck

$$\int \left(\frac{du_a}{\operatorname{sn}^2(u_1, u_2, \dots)_a} + \sum_b \frac{\operatorname{sn}^2(u_1, u_2, \dots)_b}{\operatorname{sn}^2(u_1, u_2, \dots)_a} \frac{e_b(a_{2a} - a_{2a-1}) du_b - e_a(a_{2b} - a_{2b-1}) du_a}{e_a(a_{2a-1} - a_{2b-1})} \right),$$

wo für b der Werth a auszuschliessen ist. Durch diese Gleichung ist $J(u_1, u_2, \dots)_a$ vollständig bestimmt, wenn noch hinzugefügt wird, dass in der Entwicklung dieser Function nach fallenden Potenzen von u_1 kein von $u_1, u_2, \dots, u_n$ unabhängiges Glied vorkommen darf. Für den Fall der elliptischen Functionen hat man

$$J(u) = \int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u},$$

während man gewöhnlich die elliptischen Integrale zweiter Gattung auf die Function $\int_0^u \operatorname{dn}^2 u \cdot du$ zurückführt, was keinen wesentlichen Unterschied macht. Für die Abel'schen Integrale zweiter Gattung haben aber die hier gewählten Formen den Vorzug, dass sich viele Formeln einfacher gestalten, als es der Fall sein würde, wenn man, was ohne Schwierigkeit angeht, Functionen von u_1, u_2 einführt, welche dem angeführten elliptischen Integral conform sind.

Intervalls, der erste in der Nähe von a , der andere in der Nähe von b angenommen, so kann man, wenn unter den Exponenten m, n keiner $= -1$ ist (auf welchen Fall ich mich hier beschränke), setzen

$$\int_a^\beta F(x) dx = C + S \frac{1}{n+1} B (\beta - b)^{n+1} - S \frac{1}{m+1} A (\alpha - a)^{m+1},$$

wo C einen von α, β unabhängigen Werth hat. Wenn die Exponenten $m+1, n+1$ sämmtlich positiv sind, so ist

$$C = \int_a^b F(x) dx$$

Weil aber C auch dann noch einen bestimmten endlichen Werth hat, wenn einige der Exponenten $m+1, n+1$ negativ sind, so scheint es mir gestattet und angemessen zu sein, die Formel $\int_a^b F(x) dx$ allgemein als das constante Glied in der

Entwicklung von $\int_a^\beta F(x) dx$ nach Potenzen von $(\alpha - a)$ und $(\beta - b)$ zu definiren. In diesem Sinne ist im Verlauf der Abhandlung die Bezeichnung $\int_a^b$ überall aufzufassen.

Man bezeichne nun

$$15. \int_{a_{2b}-1}^{a_{2b}} \frac{a_{2a}-a_{2a-1}}{x-a_{2a-1}} \frac{F_a(x) dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ durch } J_{a,b}$$

$$\int_{a_{2b}}^{a_{2b}-1} \frac{a_{2a}-a_{2a-1}}{x-a_{2a-1}} \frac{F_a(x) dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ durch } \frac{\bar{J}_{a,b}}{i}$$

und

$$16. \sum_{c=b}^{c=n} \bar{J}_{a,c} = \bar{J}_{a,b} + \bar{J}_{a,b+1} + \dots + \bar{J}_{a,n} \text{ durch } J'_{a,b},$$

so erhält man $2 \cdot n^2$ bestimmte Integrale $J_{a,b}$, $J'_{a,b}$, welche man in Erweiterung der Legendre'schen Benennung vollständige Abel'sche Integrale zweiter Gattung nennen kann, und die in der Theorie der Abel'schen Transcendenten dieselbe Bedeutung haben wie die Grössen

$$K - E, E'$$

auf welche sie sich für $n=1$ reduciren, für die elliptischen Functionen. Während z. B.

$$J(u) = \int_0^u \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} = \int_0^u k^2 \operatorname{sn}^2 u \cdot du - \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = u - \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du - \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u},$$

und daher, wenn m, n ganze Zahlen sind,

$$J(u + 2mK + 2nK'i) = J(u) + 2m(K - E) + 2nE'i$$

ist, so erhält man, wenn man setzt,

$$17. \begin{cases} \omega_a = \sum_b (m_b K_{a,b} + n_b K'_{a,b} i) \\ \varepsilon_a = \sum_b (m_b J_{a,b} + n_b J'_{a,b} i) \end{cases}$$

$$18. J(u_1 + 2\omega_1, u_2 + 2\omega_2, \dots, u_n + 2\omega_n)_a = J(u_1, u_2, \dots, u_n)_a + 2\varepsilon_a$$

Nach diesen vorläufigen Auseinandersetzungen, deren nähere Begründung einer ausführlichen Bearbeitung der Abel'schen Transcendenten vorbehalten bleiben muss, werde ich nun nachweisen, dass die Gleichungen (3, 4) des §. 1. eine Reihe einfacher Relationen unter den $4 \cdot n^2$ Grössen $K_{a,b}$, $K'_{a,b}$, $J_{a,b}$, $J'_{a,b}$ enthalten.

§. 4.

Es seien a, b, c, d irgend vier Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, und es werde

$$\sum_a \left(\frac{a_{2a} - a_{2a-1}}{y - a_{2a-1}} - \frac{a_{2a} - a_{2a-1}}{x - a_{2a-1}} \right) \frac{F_a(x) F_a(y)}{V R(x) V R(y)} \text{ durch } U$$

$$\int_a^b \int_c^d U dx dy \text{ durch } T$$

bezeichnet. Substituiert man für $F_a(x)$, $F_a(y)$ die in §. 3. gegebenen Ausdrücke, so erhält man zunächst

$$U = \frac{1}{4} \sum_a \frac{Q(a_{2a-1})}{P'(a_{2a-1})} \left(\frac{1}{(a_{2a-1} - x)^2 (a_{2a-1} - y)} - \frac{1}{(a_{2a-1} - y)^2 (a_{2a-1} - x)} \right) \frac{P(x) P(y)}{V R(x) V R(y)}$$

und daraus, indem man

$$\sum_a \frac{Q(a_{2a-1})}{(a_{2a-1} - x)(a_{2a-1} - y) P'(a_{2a-1})} \text{ durch } V \text{ bezeichnet,}$$

$$U = \frac{1}{4} \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dV}{dy} \right) \frac{P(x) P(y)}{V R(x) V R(y)}.$$

Es ist aber, nach bekannten Sätzen über die Zerlegung der Brüche

$$\frac{Q(t)}{(t-x)(t-y)P(t)} = \frac{Q(x)}{(x-y)P(x)} \cdot \frac{1}{t-x} - \frac{Q(y)}{(x-y)P(y)} \cdot \frac{1}{t-y} + \sum_a \frac{Q(a_{2a-1})}{(a_{2a-1}-x)(a_{2a-1}-y)P'(a_{2a-1})} \cdot \frac{1}{t-a_{2a-1}}$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von t und setzt die beiden Coefficienten von t^{-1} einander gleich, so ergibt sich

$$V = 1 - \frac{Q(x)}{(y-x)P(x)} + \frac{Q(y)}{(x-y)P(y)}$$

Setzt man daher $\frac{Q(x)}{P(x)} = N(x)$, wo dann $R(x) = P^2(x) \cdot N(x)$ wird, so ist

$$V = 1 - \frac{N(x) - N(y)}{x-y}, \text{ und daher}$$

$$U = \left(\frac{1}{2} \frac{N(x) - N(y)}{(x-y)^2} - \frac{1}{4} \frac{N'(x) + N'(y)}{x-y} \right) \cdot \frac{1}{V N(x) V N(y)}$$

Dieser Ausdruck für U lässt sich (s. §. 1 im Anfange) umgestalten in den folgenden:

$$2U = \frac{d}{dx} \frac{V N(x)}{(y-x) V N(y)} - \frac{d}{dy} \frac{V N(y)}{(x-y) V N(x)}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\frac{VN(x)}{(y-x)VN(y)} &= \frac{P(y)}{P(x)} \frac{VR(x)}{(y-x)VR(y)} \\ &= \frac{VR(x)}{(y-x)VR(y)} + \frac{P(y)-P(x)}{y-x} \frac{VR(x)}{P(x)VR(y)} \\ \frac{VN(y)}{(x-y)VN(x)} &= \frac{VR(y)}{(x-y)VR(x)} + \frac{P(x)-P(y)}{x-y} \frac{VR(y)}{P(y)VR(x)},\end{aligned}$$

und daher, wenn man $\frac{P(x)-P(y)}{x-y} = G(x, y)$ setzt,

$$\begin{aligned}2U &= \frac{d}{dx} \frac{VR(x)}{(y-x)VR(y)} - \frac{d}{dy} \frac{VR(y)}{(x-y)VR(x)} \\ &+ \frac{d}{dx} \frac{G(x, y)VR(x)}{P(x)VR(y)} - \frac{d}{dy} \frac{G(x, y)VR(y)}{P(y)VR(x)}\end{aligned}$$

Bezeichnen nun α, β zwei bestimmte Werthe von x in dem Intervall a, b , und zwar der erste in der Nähe von a , der andere in der Nähe von b gelegen, und ebenso γ, δ zwei Werthe von y in dem Intervall c, d , der erste in der Nähe von c , der andere in der Nähe von d gelegen, so ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung mit Beachtung der im §. 1 bewiesenen Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \frac{VR(x)}{(y-x)VR(y)} - \frac{d}{dy} \frac{VR(y)}{(x-y)VR(x)} &= \frac{2F(x, y)}{VR(x)VR(y)}, \\ \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} U dx dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} \frac{F(x, y) dx dy}{VR(x)VR(y)} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\delta} \left(\frac{G(\beta, y)VR(\beta)}{P(\beta)VR(y)} - \frac{G(\alpha, y)VR(\alpha)}{P(\alpha)VR(y)} \right) dy \\ &- \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{G(x, \delta)VR(\delta)}{P(\delta)VR(x)} - \frac{G(x, \gamma)VR(\gamma)}{P(\gamma)VR(x)} \right) dx\end{aligned}$$

Denkt man sich jetzt beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von $\alpha - a$, $\beta - b$, $\gamma - c$, $\delta - d$ entwickelt, so ist das constante Glied auf der linken Seite die oben

durch T bezeichnete Grösse; auf der rechten Seite aber findet sich als constantes

Glied das Doppel-Integral $\int_a^b \int_c^d \frac{F(x, y) dx dy}{VR(x) VR(y)}$

Mithin

$$1. \int_a^b \int_c^d \frac{F(x, y) dx dy}{VR(x) VR(y)} = \int_a^b \int_c^d U dx dy =$$

$$\sum_a \left\{ \int_a^b \frac{F_a(x) dx}{VR(x)} \int_c^d \frac{y - a_{2a-1}}{a_{2a} - a_{2a-1}} \frac{F_a(y) dy}{VR(y)} - \int_c^d \frac{F_a(y) dy}{VR(y)} \int_a^b \frac{x - a_{2a-1}}{a_{2a} - a_{2a-1}} \frac{F_a(x) dx}{VR(x)} \right\}$$

Nimmt man nun $a = a_{2b-1}$, $b = a_{2b}$, $c = a_{2c-1}$, $d = a_{2c}$, so erhält man aus der vorstehenden Gleichung (nach §. 1, Gl. 3)

$$2. \sum_a (K_{a,b} J_{a,c} - J_{a,b} K_{a,c}) = 0^*)$$

Nimmt man $a = a_{2b}$, $b = a_{2b+1}$, $c = a_{2c}$, $d = a_{2c+1}$, so ergibt sich

$$3. \sum_a (\bar{K}_{a,b} \bar{J}_{a,c} - \bar{J}_{a,b} \bar{K}_{a,c}) = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung m für b, n für c und summirt von $m = b$ bis $m = n$, und von $n = c$ bis $n = n$, so findet man

$$4. \sum_a (K'_{a,b} J'_{a,c} - J'_{a,b} K'_{a,c}) = 0$$

Nimmt man ferner $a = a_{2b-1}$, $b = a_{2b}$, $c = a_{2b}$, $d = a_{2b+1}$, so findet sich (nach §. 1, Gl. 4)

$$5. \sum_a (K_{a,b} \bar{J}_{a,b} - J_{a,b} \bar{K}_{a,b}) = \frac{\pi}{2},$$

und für $a = a_{2b-2}$, $b = a_{2b-1}$, $c = a_{2b-1}$, $d = a_{2b}$

*) Wenn in einer Formel, wie hier, mehrere deutsche Buchstaben a, b, c... vorkommen, welche, wie schon oben bemerkt worden ist, hier ausschliesslich ganze Zahlen, aus der Reihe 1, 2, 3, ..., n genommen, bezeichnen sollen, so bezieht sich das Summenzeichen auf denjenigen von ihnen, der unter dem $\sum$ ausdrücklich angezeigt ist, und der dann sämtliche in der angegebenen Reihe enthaltenen Werthe durchlaufen muss, während jeder andere einen stehenden Werth hat. Sind unter dem Summenzeichen mehrere Buchstaben bezeichnet, so muss jeder derselben, unabhängig von den übrigen, dieselben Werthe durchlaufen.

$$6. \quad \sum_a (\overline{K}_{a,b-1} J_{a,b} - \overline{J}_{a,b-1} K_{a,b}) = \frac{\pi}{2}, \text{ oder}$$

$$7. \quad \sum_a (K_{a,b} \overline{J}_{a,b-1} - J_{a,b} \overline{K}_{a,b-1}) = -\frac{\pi}{2}$$

Nimmt man endlich $a = a_{2b-1}$, $b = a_{2a}$, $c = a_{2c}$, $d = a_{2c+1}$, und es ist entweder $c > b$ oder $c < b-1$, so giebt die Gleichung (3) des §. 1

$$8. \quad \sum_a (K_{a,b} \overline{J}_{a,c} - J_{a,c} \overline{K}_{a,c}) = 0$$

Setzt man in dieser Gleichung m für c und summirt von $m=c$ bis $m=n$, so erhält man, wenn c von b verschieden ist,

$$9. \quad \sum_a (K_{a,b} J'_{a,c} - J_{a,b} K'_{a,c}) = 0$$

Denn wenn $b > a$ ist, so ist jedes Glied, das bei der Summation in Betracht kommt, nach (9) $= 0$; wenn aber $b < a$ ist, so sind nur diejenigen Glieder nicht $= 0$, welche man für $m=b-1$ und $m=b$ erhält; deren Summe aber ist in Folge der Gleichungen (5, 6, 7) ebenfalls $= 0$.

Setzt man in der Gleichung (9) $c=b+1$ und addirt alsdann zu ihr die Gleichung (5), und bemerkt, dass $K'_{a,b} = \overline{K}_{a,b} + K'_{a,b+1}$, $J'_{a,b} = \overline{J}_{a,b} + J'_{a,b+1}$ ist, so erhält man

$$10. \quad \sum_a (K_{a,b} J'_{a,b} - J_{a,b} K'_{a,b}) = \frac{\pi}{2}$$

§. 5.

Die Gleichungen (2, 4, 9, 10) des vorhergehenden §., welche hier noch einmal zusammengestellt werden mögen:

$$1. \quad \sum_a (K_{a,b} J_{a,c} - J_{a,b} K_{a,c}) = 0,$$

$$2. \quad \sum_a (K'_{a,b} J'_{a,c} - J'_{a,b} K'_{a,c}) = 0,$$

$$3. \quad \sum_a (K_{a,b} J'_{a,c} - J_{a,b} K'_{a,c}) = 0, \text{ wenn } c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} b,$$

$$4. \quad \sum_a (K_{a,b} J'_{a,b} - J_{a,b} K'_{a,b}) = \frac{\pi}{2},$$

enthalten eine Reihe von $(2n^2 - n)$ Relationen unter den $4n^2$ Grössen $K_{a,b}$, $J_{a,b}$, $K'_{a,b}$, $J'_{a,b}$. Die erste Gleichung nämlich, deren linke Seite identisch $= 0$ wird, wenn man $c = b$ nimmt, und nur ihr Zeichen wechselt, wenn diese beiden Indices unter einander vertauscht werden, giebt $\frac{n(n-1)}{2}$ Relationen; eben so viele die zweite; die dritte aber giebt deren $n(n-1)$, und die vierte n , alle zusammen also enthalten $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) + n = 2n^2 - n$ Relationen.

Ich werde jetzt aus diesen Relationen noch einige andere herleiten, welche bei den in der Einleitung angedeuteten Reihen-Entwickelungen der Abel'schen Transcendenten gebraucht werden.

Es bezeichne G die Determinante des Systems

$$\begin{array}{cccc} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n} \end{array}$$

und $\bar{G}_{a,b}$ den Coefficienten von $K_{a,b}$ in dem Ausdrucke von G , so ist, wenn

$$5. \quad G_{a,b} = \frac{\bar{G}_{a,b}}{G}$$

gesetzt wird,

$$6. \quad \sum_a G_{a,b} K_{a,c} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } c > b, \\ 1, & \text{wenn } c = b \text{ ist,} \end{cases}$$

$$7. \quad \sum_c G_{a,c} K_{b,c} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } b > a, \\ 1, & \text{wenn } b = a \text{ ist.} \end{cases}$$

Nun hat man (Gl. 1)

$$\sum_c K_{c,m} J_{c,n} = \sum_c K_{c,n} J_{c,m}, \text{ also}$$

$$\sum_{m,c,n} G_{a,m} G_{b,n} K_{c,m} J_{c,n} = \sum_{n,c,m} G_{a,m} G_{b,n} K_{c,n} J_{c,m}$$

Summirt man auf beiden Seiten in Bezug auf die einzelnen Indices in der Ordnung, in welcher sie unter dem Summenzeichen geschrieben stehen, so erhält man mit Hülfe der Gleichung (7)

$$8. \quad \sum_n G_{b,n} J_{a,n} = \sum_a G_{a,m} J_{b,m}$$

Setzt man daher

$$9. \quad \sum_c G_{b,c} J_{a,c} = F_{a,b}, \text{ so ist}$$

$$10. \quad F_{a,b} = F_{b,a}$$

Multiplieirt man die Formel $G_{c,n} J_{a,n}$ durch $K_{c,b}$ und summirt dann in Bezug auf c, n , so findet man mit Hülfe der Gleichungen (9, 6)

$$11. \quad J_{a,b} = \sum_c F_{a,c} K_{c,b}$$

Ferner ist (Gl. 3, 4)

$$\sum_m (K_{m,c} J'_{m,b} - J_{m,c} K'_{m,b}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } c > b, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } c = b, \end{cases}$$

$$\text{daher } \sum_{m,c} G_{a,c} (K_{m,c} J'_{m,b} - J_{m,c} K'_{m,b}) = \frac{\pi}{2} G_{a,b}$$

$$\text{Aber } \sum_{c,m} G_{a,c} K_{m,c} J'_{m,b} = J'_{a,b},$$

$$\sum_{c,m} G_{a,c} J_{m,c} K'_{m,b} = \sum_m F_{m,a} K'_{m,b} = \sum_c F_{c,a} K'_{c,b},$$

$$\text{also } 12. J'_{a,b} = \frac{\pi}{2} G_{a,b} + \sum_c F_{c,a} K'_{c,b}$$

Endlich ist (Gl. 2)

$$\sum_c K'_{c,b} J'_{c,a} = \sum_c K'_{c,a} J'_{c,b},$$

und daher, wenn man $J'_{c,a}$ und $J'_{c,b}$ mittelst der Formel (12) ausdrückt, indem man das einmal c, a, m für a, b, c und das anderemal c, b, m für a, b, c schreibt, und bemerkt, dass

$$\sum_{c,m} F_{m,c} K'_{c,b} K'_{m,a} = \sum_{c,m} F_{m,c} K'_{c,a} K'_{m,b}$$

ist, weil man auf der rechten Seite dieser Gleichung m und c mit einander vertauschen und dann wieder $F_{m,c}$ für $F_{c,m}$ setzen darf,

$$13. \sum_c G_{c,a} K'_{c,b} = \sum_c G_{c,b} K'_{c,a}$$

Diese Gleichung ist besonders bemerkenswerth, weil in ihr nur Abel'sche Integrale der ersten Gattung vorkommen.

Bezeichnet man den Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung durch $H_{a,b}$, wo denn

$$14. H_{a,b} = H_{b,a}$$

ist, so erhält man noch

$$15. K'_{a,b} = \sum_c H_{c,a} K_{c,b}$$

Durch die hier entwickelten Formeln wird übrigens auch der Beweis geliefert, dass die $(2n^2 - n)$ Gleichungen (1, 2, 3, 4) unabhängig von einander sind, d. h. dass keine von ihnen eine Folge der übrigen ist. Dies wird der Fall sein, wenn sich sämtliche in denselben vorkommende $4n^2$ Grössen durch $(2n^2 + n)$ andere, willkürlich angenommene, ausdrücken lassen.

Nimmt man nun aber die n^2 Grössen $K_{a,b}$ willkürlich, die durch $F_{a,b}$, $H_{a,b}$ bezeichneten aber so an, dass den Bedingungs-Gleichungen (10, 14) Genüge geschieht, und drückt dann durch diese Grössen, deren Anzahl $(2n^2 + n)$ ist, mittelst der Formeln (11, 12, 15) $J_{a,b}$, $J'_{a,b}$, $K'_{a,b}$ aus, und substituirt die so erhaltenen Ausdrücke

derselben in die Gleichungen (1, 2, 3, 4), so überzeugt man sich mit Hülfe der Relationen (6, 7) leicht, dass in jeder dieser Gleichungen die linke Seite identisch $= 0$ wird.

Es ist bei den vorstehenden Entwicklungen ausdrücklich angenommen worden, dass die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ sämtlich reell und ihrer Grösse nach geordnet seien. Gleichwohl behalten die gewonnenen Resultate unverändert und ohne Ausnahme ihre Gültigkeit, wenn auch diese Bedingungen nicht erfüllt sind; es bedarf alsdann nur einer geeigneten Modification der in §. 1 getroffenen Bestimmungen hinsichtlich der Festsetzung desjenigen Werthes von $\sqrt{R(x)}$, der bei jeder einzelnen Integration genommen werden muss. Ich kann jedoch, des beschränkten Raumes wegen, in nähere Erörterungen über diesen Gegenstand nicht eingehen. Ebenso muss ich es mir versagen, über den in der Einleitung erwähnten Gebrauch der entwickelten Relationen auch nur andeutungsweise etwas Näheres anzugeben. Ich begnüge mich schliesslich — besonders um darauf hinzuweisen, dass auch die zuletzt gegebenen Entwicklungen nicht ohne Bedeutung sind — den allgemeinen Ausdruck der Hilfsfunctionen hinzustellen, auf welche die Abel'schen Transcendenten zurückgeführt werden können.

Es seien $t_1, t_2, \dots, t_n$ unbeschränkt veränderliche Grössen; $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ ganze Zahlen, von denen jede entweder $= 0$, oder $= 1$ zu nehmen ist; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, veränderliche ganze Zahlen, deren jede unabhängig von den übrigen jeden zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ enthaltenen Werth annehmen kann; man bezeichne ferner $\pi H_{a,b}$ durch $\mathcal{H}_{a,b}$, $\frac{\pi}{2} G_{a,b}$ durch $\eta_{a,b}$, und bilde die unendliche Reihe

$$S e^{\Sigma} \left(-\mathcal{H}_{a,b} \left(\alpha_a - \frac{1}{2} \nu_a \right) \left(\alpha_b - \frac{1}{2} \nu_b \right) + \left(\alpha_a - \frac{1}{2} \nu_a \right) (t_a + \mu_a \pi i) \right),$$

wo sich das Summenzeichen Σ auf a, b , S aber auf $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ bezieht. Bezeichnet man die durch diese Reihe dargestellte Function von $t_1, t_2, \dots$ durch $H(t_1, t_2, \dots, t_n)$, so hat dieselbe je nach den verschiedenen Werthen, die man den Zahlen μ_a, ν_a geben kann, 4^n verschiedene Formen, welche den Jacobi'schen Θ Functionen, in welche sie für $n = 1$ übergehen, durchaus analog sind. Führt man nun statt $t_1, t_2, \dots$ die Argumente $u_1, u_2, \dots$ ein, indem man

$$t_a = \eta_{1,a} u_1 + \eta_{2,a} u_2 + \dots + \eta_{n,a} u_n$$

setzt, so erhält man die erwähnten Hilfsfunctionen von $u_1, u_2, \dots, u_n$, durch welche

die von mir eingeführten Functionen $sn(u_1, u_2, \dots)_a$, $cn(u_1, u_2, \dots)_a$, $dn(u_1, u_2, \dots)$, und noch mehrere andere, mit diesen im Zusammenhange stehende, ausgedrückt werden können und zwar eine jede als ein Quotient zweier derselben. Das Nähere hierüber gedenke ich in der erforderlichen Ausführlichkeit in einem grössern Werke zu geben, welches ausser allgemeinen Untersuchungen über die Integrale algebraischer Functionen insbesondere die Grundzüge einer umfassenden Theorie der Abel'schen Transcendenten enthalten soll.

Braunsberg, 17. Juli 1849.

Karl Weierstrass.