Anhang zu dem Programme vom Jahre 1853.

Aufgabe. Von einem Vierecke, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt, sind gegeben der Radius des innern Berührungskreises (ϱ) und die Radien dreier äußerer Berührungskreise (A, B, C).*) Man soll die Seiten, die Winkel und den Inhalt des Vierecks bestimmen.

Auflösung. Da $\varrho = \dfrac{a \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \dfrac{b \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \dfrac{c \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{2}}$,

$$A = \frac{a \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}, \quad B = \frac{b \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}, \quad C = \frac{c \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{2}},$$

so ist:

$$\frac{\varrho}{A} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}, \quad \frac{\varrho}{B} = \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}, \quad \frac{\varrho}{C} = \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} \operatorname{tang}\frac{\delta}{2}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{B}{A} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{C}{B} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\delta}{2}}.$$

Es ist also:

$$B \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = C \operatorname{tang}\frac{\delta}{2} = -C \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = -\frac{C \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} + C \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}},$$

$$B \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} - B \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} = -C \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} - C \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2},$$

*) Statt der im genannten Programme angegebenen Bezeichnungen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 sind hier A, B, C, D gewählt. Es bezeichnet also A den Radius des Kreises, welcher die Seite a und die Verlängerungen der Seiten b und d berührt, und eben so B, C, D die Radien der Kreise, welche die Seiten b, c, d und die Verlängerungen der beiden anliegenden berühren.

$$\mathrm{B}\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2} - \frac{\mathrm{B}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\gamma}{2} + B\,\mathrm{tang}^2\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\gamma}{2}}{1 - \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2}}$$

$$= - \frac{\mathrm{C}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2} + \mathrm{C}\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2}}{1 - \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2}} - \mathrm{C}\,\mathrm{tang}\,\frac{\gamma}{2},$$

$$\mathrm{B}\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2} - \mathrm{B}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}^2\,\frac{\beta}{2} - B\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\gamma}{2} - \mathrm{B}\,\mathrm{tang}^2\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\gamma}{2}$$

$$= - \mathrm{C}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2} - \mathrm{C}\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2} - \mathrm{C}\,\mathrm{tang}\,\frac{\gamma}{2} + \mathrm{C}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\gamma}{2}.$$

Es ist aber

$$\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}} \quad \text{und} \quad \mathrm{tang}\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}{B};$$

also ist

$$\frac{\varrho^2 \,.\, B}{\mathrm{A}^2\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}} + \varrho\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2} + \frac{\varrho^2}{\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}} - \frac{\varrho \,.\, B}{\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \mathrm{C}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2} + \frac{\varrho \,.\, \mathrm{C}}{\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mathrm{A} \,.\, \mathrm{C}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}{B} - \frac{\varrho \,.\, \mathrm{C}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}{B},$$

d. i.

$$\frac{\mathrm{C}\,(\mathrm{A}+\mathrm{B}) - \varrho\,(\mathrm{B}+\mathrm{C})}{B}\,\mathrm{tang}^2\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho\,[\varrho\,(\mathrm{A}+\mathrm{B}) - \mathrm{A}\,(\mathrm{B}+\mathrm{C})]}{\mathrm{A}^2}.$$

Folglich ist

$$\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\mathrm{A}}\sqrt{\frac{\varrho \,.\, \mathrm{B}\,[\varrho\,(\mathrm{A}+\mathrm{B}) - \mathrm{A}\,(B+\mathrm{C})]}{\mathrm{C}\,(\mathrm{A}+B) - \varrho\,(B+\mathrm{C})}}.$$

Ferner ist

$$\mathrm{tang}\,\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}} = \varrho\sqrt{\frac{\mathrm{C}\,(\mathrm{A}+B) - \varrho\,(B+\mathrm{C})}{\varrho \,.\, B\,[\varrho\,(\mathrm{A}+B) - \mathrm{A}\,(B+\mathrm{C})]}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}}\sqrt{\frac{\varrho \,.\, B\,[\varrho\,(B+\mathrm{C}) - \mathrm{C}\,(\mathrm{A}+B)]}{\mathrm{A}\,(B+\mathrm{C}) - \varrho\,(\mathrm{A}+B)}}.$$

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{A \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{B} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{\varrho \,.\, B\,[\varrho\,(A+B) - A\,(B+C)]}{C\,(A+B) - \varrho\,(B+C)}}\,.$$

$$\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} = \frac{B \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}{C} = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{\varrho \,.\, B\,[\varrho\,(B+C) - C\,(A+B)]}{A\,(B+C) - \varrho\,(A+B)}}\,.$$

Da $a = \varrho\,(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2})$ und $a = A\,(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tang}\frac{\beta}{2})$,

so ist $a^2 = \varrho A\,(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} + 2)$.

Es ist aber $\cot\frac{\beta}{2} = \frac{A}{\varrho}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, also

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} = \frac{A}{\varrho}\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{B\,[\varrho\,(A+B) - A\,(B+C)]}{A\,[C\,(A+B) - \varrho\,(B+C)]}$$

und $$\cot\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}} = \frac{A\,[C\,(A+B) - \varrho\,(B+C)]}{B\,[\varrho\,(A+B) - A\,(B+C)]}\,.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} + 2 = \frac{\left(B[\varrho(A+B)-A(B+C)]+A[C(A+B)-\varrho(B+C)]\right)^2}{A\,.\,B\,[C(A+B)-\varrho(B+C)]\,[\varrho(A+B)-A(B+C)]}$$

$$= \frac{(\varrho\,.\,B^2 - A\,.\,B^2 + A^2\,.\,C - \varrho\,.\,A\,.\,C)^2}{A.B\,[C\,(A+B) - \varrho\,(B+C)]\,[\varrho\,(A+B) - A\,(B+C)]}$$

$$= \frac{[(\varrho - A)\,(B^2 - AC)]^2}{A\,.\,B\,[C\,(A+B) - \varrho\,(B+C)]\,[\varrho\,(A+B) - A\,(B+C)]}$$

Mithin ist

$$a = \frac{(\varrho - A)\,(B^2 - A\,.\,C)\sqrt{\varrho}}{\sqrt{B\,[C\,(A+B) - \varrho\,(B+C)]\,[\varrho\,(A+B) - A\,(B+C)]}}\,.$$

Eben so findet man:

$$b = \varrho\,(\cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}) \text{ und } b = B\,(\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}),$$

also $b^2 = \varrho\,.\,B\,(\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} + 2)$.

Nun ist $\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{B \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}{\varrho}$, also

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{B \operatorname{tang}^2\frac{\beta}{2}}{\varrho} = \frac{C(A+B) - \varrho(B+C)}{\varrho(A+B) - A(B+C)},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} + 2 = \frac{\left(C(A+B) - \varrho(B+C) + \varrho(A+B) - A(B+C)\right)^2}{[C(A+B) - \varrho(B+C)]\,[\varrho(A+B) - A(B+C)]}$$

$$= \frac{[(B-\varrho)(C-A)]^2}{[C(A+B) - \varrho(B+C)]\,[\varrho(A+B) - A(B+C)]}.$$

Folglich ist

$$b = \frac{(B-\varrho)(C-A)\sqrt{\varrho \,.\, B}}{\sqrt{[C(A+B) - \varrho(B+C)]\,[\varrho(A+B) - A(B+C)]}}$$

$$= \frac{B(B-\varrho)(C-A)\sqrt{\varrho}}{\sqrt{B\,[C(A+B) - \varrho(B+C)]\,[\varrho(A+B) - A(B+C)]}}.$$

Ferner

$$c = \varrho\left(\cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\delta}{2}\right) \text{ und } c = C\left(\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\right);$$

$$\text{also } c^2 = \varrho \,.\, C\left(\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\cot\frac{\delta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} + 2\right).$$

Nun ist $\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\cot\frac{\delta}{2} = \frac{C \operatorname{tang}^2\frac{\gamma}{2}}{\varrho} = \frac{C[\varrho(A+B) - A(B+C)]}{B[C(A+B) - \varrho(B+C)]}$;

$$\text{also } \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\cot\frac{\delta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} + 2 = \frac{\left(C[\varrho(A+B) - A(B+C)] + B[C(A+B) - \varrho(B+C)]\right)^2}{B.C\,[C(A+B) - \varrho(B+C)]\,[\varrho(A+B) - A(B+C)]}$$

$$= \frac{[(C-\varrho)(B^2 - A.C)]^2}{B.C\,[C(A+B) - \varrho(B+C)]\,[\varrho(A+B) - A(B+C)]}.$$

Folglich ist

$$c = \frac{(C-\varrho)(B^2 - AC)\sqrt{\varrho}}{\sqrt{B\,[C(A+B) - \varrho(B+C)]\,[\varrho(A+B) - A(B+C)]}}.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich

$$d = \varrho\,(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\delta}{2}) \text{ und } d = D\,(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tang}\frac{\delta}{2}),$$

$$\text{also } d^2 = \varrho\,.\,D\,(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\delta}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} + 2).$$

Da aber $A\,.\,C = B\,.\,D$,*) so wird

$$d^2 = \frac{\varrho\,.\,A\,.\,C}{B}\,(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\delta}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} + 2).$$

$$\text{Nun ist } \cot\frac{\delta}{2} = \frac{C\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}{\varrho} = \frac{A\,.\,C\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\varrho\,.\,B}, \text{ also}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\delta}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} + 2 = \frac{(C[\varrho(A+B) - A(B+C)] + A[C(A+B) - \varrho(B+C)])^2}{A\,.\,C\,[\varrho(A+B) - A(B+C)]\,[C(A+B) - \varrho(B+C)]}$$

$$= \frac{[(C-A)\,(\varrho\,.\,B - A\,.\,C)]^2}{A\,.\,C\,[\varrho\,(A+B) - A(B+C)]\,[C\,(A+B) - \varrho\,(B+C)]}.$$

Folglich ist

$$d = \frac{(C-A)\,(\varrho\,.\,B - A\,.\,C)\,\sqrt{\varrho}}{\sqrt{B\,[C\,(A+B) - \varrho\,(B+C)]\,[\varrho\,(A+B) - A\,(B+C)]}}.$$

---

*) Bei jedem Vierecke nämlich, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt, sind die Rechtecke aus den Radien der Kreise, welche die gegenüber liegenden Seiten berühren, einander gleich. Denn es ist

$$A\,.\,C = \frac{ac\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} \text{ und } B\,.\,D = \frac{bd\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}}{\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

Nach §. 14 ist aber $a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = b\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $c\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$ $= d\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, also $ac\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2} = bd\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$ oder $\frac{ac}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{bd}{\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}}$. Folglich $A\,.\,C = B\,.\,D$.

Endlich ist

$$J = (a + c)\,\varrho = \frac{\varrho\,(C - A)\,(B^2 - AC)\sqrt{\varrho}}{\sqrt{B\,[C\,(A+B) - \varrho\,(B+C)]\,[\varrho\,(A+B) - A\,(B+C)]}}.$$

Aufgabe. Von einem Vierecke, in und um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, sind gegeben die Radien dreier äußerer Berührungskreise (A, B, C). Man soll die Seiten, die Winkel, den Inhalt des Vierecks, den Radius des innern Berührungskreises und den Radius des umschriebenen Kreises finden.

Auflösung. In jedem Vierecke der bezeichneten Art ist das Quadrat des Radius des innern Berührungskreises gleich dem Rechtecke aus den Radien der äußern Berührungskreise, welche zu zwei gegenüber liegenden Seiten gehören. Denn es ist

$$\frac{\varrho}{A} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} \text{ und } \frac{\varrho}{C} = \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2},$$

$$\text{also } \frac{\varrho^2}{A\,.\,C} = 1 \text{ oder } \varrho^2 = A\,.\,C, \text{ und } \varrho = \sqrt{A\,.\,C}\,.$$

Bei der vorhergehenden Aufgabe war gefunden

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\varrho\,.\,B\,[\varrho\,(A+B) - A\,(B+C)]}{C\,(A+B) - \varrho\,(B+C)}};$$

also ist hier

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\varrho\,.\,B\,(\varrho\,.\,A + \varrho\,.\,B - A\,.\,B - \varrho^2)}{\varrho^2 + B\,.\,C - \varrho\,.\,B - \varrho\,.\,C}} = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\varrho\,.\,B\,(A - \varrho)\,(\varrho - B)}{(\varrho - C)\,(\varrho - B)}}$$

$$= \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\varrho\,.\,B\,(A - \varrho)}{\varrho - C}} = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\varrho^2\,.\,B\,(A - \varrho)}{\varrho^2 - \varrho\,.\,C}}$$

$$= \frac{1}{A}\sqrt{\frac{A\,.\,B\,.\,C\,(A - \varrho)}{A\,.\,C - \varrho\,.\,C}} = \frac{1}{A}\sqrt{A\,.\,B},$$

d. i.

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \cot\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{B}{A}}.$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{A}\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{A.C}}{A}\cot\frac{\alpha}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{C}{A}}; \text{ also}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \cot\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{C}{B}}.$$

$$a = A\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\right) = A\left(\sqrt{\frac{B}{A}} + \sqrt{\frac{C}{B}}\right).$$

$$b = B\operatorname{tang}\left(\frac{\beta}{2} + \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\right) = B\left(\sqrt{\frac{C}{B}} + \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{B.C} + \sqrt{A.B}\right.$$

$$c = C\left(\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\right) = C\left(\sqrt{\frac{A}{B}} + \sqrt{\frac{B}{C}}\right).$$

$$d = D\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\right) = \frac{A.C}{B}\left(\sqrt{\frac{B}{A}} + \sqrt{\frac{B}{C}}\right).$$

$$J = (a+c)\,\varrho = \left(\sqrt{A.B} + A\sqrt{\frac{C}{B}} + C\sqrt{\frac{A}{B}} + \sqrt{B.C}\right)\sqrt{A.C}$$

$$= \frac{A(B.C)\sqrt{B.C} + C(A+B)\sqrt{AB}}{B}$$

$$= \frac{A(B+C)\sqrt{c} + C(A+B)\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Endlich ist

$$r = \frac{1}{2\sin\beta}\sqrt{(a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

Es ist aber

$$a - b = (A - B)\sqrt{\frac{C}{B}},\quad ab = A(B+C) + (A+B)\sqrt{A.C},$$

und $\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{C}{B}}$, also $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{C}{B+C}$ und $\sin\beta = \frac{2\sqrt{B.C}}{B+C}$.

Folglich ist

$$(a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{C(A-B)^2}{B} + 4AC + \frac{4C(A+B)\sqrt{A.C}}{B+C}$$

$$= \frac{C(A+B)^2}{B} + \frac{4C(A+B)\sqrt{A.C}}{B+C}$$

$$= \frac{C(A+B)\left[(A+B)(B+C) + 4B\sqrt{A.C}\right]}{B(B+C)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$r = \frac{B + C}{4\sqrt{B.C}} \sqrt{\frac{C(A+B)[(A+B)(B+C) + 4B\sqrt{A.C}]}{B(B+C)}}$$

$$= \frac{1}{4B} \sqrt{(A+B)(B+C)[(A+B)(B+C) + 4B\sqrt{A.C}]}$$

$$= \frac{1}{4B} \sqrt{(A+B)^2(B+C)^2 + 4B(A+B)(B+C)\sqrt{A.C}},$$

oder

$$r = \frac{(A+B)(B+C)}{4B} \sqrt{1 + \frac{4B\sqrt{A.C}}{(A+B)(B+C)}}.$$

Kolberg.