Der dem leuchtenden Punkte zugekehrte Teil der Kugeloberfläche und die Strahlen LP begrenzen daher einen Raum, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3 \pi}{4.(5 + 3\sqrt{3})}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{4}\left\{8 + \sqrt{2} - 4\sqrt{3}\right\}.$$

Aufg. 32. Ein hohler Kugelsector, dessen Achsenschnitt ein Kreisquadrant ist, gehört einer Kugel vom Radius r an. In der Entfernung $\frac{r}{\sqrt{3}}$ vom Mittlpunkte M der Kugel befindet sich innerhalb des Sectors ein leuchtender Punkt L auf demjenigen Radius, welcher den Kugelmittelpunkt mit der Mitte der Calotte verbindet. Welche Strahlen treffen nach der Reflexion an der Calotte und an dem Kegelmantel des Sectors den durch L gehenden Radius senkrecht? a) Wie gross ist der Raum zwischen der Calotte und jenen von L ausgehenden Strahlen? b) Welchen Raum umhüllen die Strahlen auf ihrem Wege bis zur Rückkehr zum leuchtenden Punkte L?

Aufl. Wird die Calotte unter dem Winkel ξ von den Strahlen getroffen, welche in ihrem weitern Verlaufe den Radius ML senkrecht treffen, so ist:

$$\sin 2\xi = \sqrt{3}.\ \sin\xi,$$

also: $\xi = 30^0$. Es ist daher:

a) zwischen der Calotte und den von L ausgehenden Strahlen ein Raum, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3 \pi}{12\sqrt{3}} \cdot \left\{8\sqrt{3} - 13\right\}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi.}{2\sqrt{3}}(4\sqrt{3} - 5).$$

b) die Strahlen selbst umhüllen auf ihrem Wege einen Raum, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3 \pi}{24\sqrt{3}} \cdot \left\{8 - 3\sqrt{3}\right\}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{4.\sqrt{3}}\left\{8 - \sqrt{3}\right\}.$$

III.

Brechung des Lichtes.

Aufg. 33. Auf den Mantel eines rechtwinkelig-gleichschenkligen Kegels vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{2}$ fallen parallel der Kegelachse Lichtstrahlen, welche von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte herkommen. Welchen Kegelteil umschliessen diejenigen Strahlen, welche die Kegelbasis im Fusspunkte der Höhe des Kegels treffen?

Aufl. Diejenigen Strahlen, welche sich im Fusspunkte der Kegelhöhe vereinigen, umhüllen einen Doppelkegel, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3 \pi}{18(2 + \sqrt{3})}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{3\sqrt{2}}.$$

Anm.: Ist der Kegel gleichseitig und der Brechungsexponent $n = \sqrt{3}$, so ist:

$$\text{Vol.} \ \frac{r^3 \pi}{8\sqrt{3}}. \qquad \text{Oberfl.} = r^2 \pi.$$

Aufg. 34. Ein gleichseitiger Kegel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{3}$ ist durch eine Kugel K ausgehöhlt, welche den Kegelmantel längs der Peripherie der Kegelbasis tangiert. Im Mittelpunkte der Kugel K ist ein leuchtender Punkt aufgestellt. Welchen Raum des Kegelrestes begrenzen diejenigen Strahlen, welche nach dem Durchgange durch den Kegel parallel der Kegelhöhe laufen?

Aufl. Aus einem Vollkegel und einem durch einen Kugelabschnitt ausgehöhlten Kegelstumpfe besteht der von den Lichtstrahlen begrenzte Kegelteil, und es ist dessen

$$\text{Inhalt} = \frac{8r^3 \pi}{27\sqrt{3}} \cdot \left\{3\sqrt{3} - 4\right\}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{2r^2 \pi}{9}\left\{17 - 6\sqrt{3}\right\}.$$

Aufg. 35. Ein gleichseitiger Kegel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = 2$ ist durch eine Kugel vom Radius $\frac{r}{2}$, welche um den Mittelpunkt M der Kegelbasis beschrieben ist, ausgehöhlt. In M befindet sich ein leuchtender Punkt. Welchen Raum des ausgehöhlten Kegels umhüllen diejenigen den Kegelmantel treffenden Lichtstrahlen, welche sich in der Kegelspitze vereinigen?

Aufl. In der Spitze des Kegels vereinigen sich diejenigen Strahlen, deren Brechungswinkel beim Austritt aus dem Kegel $= 90^0$ ist. Diese Strahlen umhüllen einen Kegelteil, welcher aus einem Vollkegel und einem durch ein Kugelsegment ausgehöhlten Kegelstumpfe besteht, und es ist dessen

$$\text{Inhalt} = \frac{r^3 \pi}{24}\left\{3\sqrt{3} - 2\right\}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{8}\left\{11 - 2\sqrt{3}\right\}.$$

Aufg. 36. Auf der Verlängerung der Achse eines gleichseitigen Kegels vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{3}$ befindet sich ein leuchtender Punkt in einer Entfernung $a = \frac{r}{3\sqrt{3}}$ vom Mittelpunkte der Kegelbasis. Welchen Raum umhüllen diejenigen Strahlen, welche nach dem Durchgange durch den Kegel parallel zur Achse des Kegels gehen?

Aufl. Parallel zur Achse des Kegels treten aus der Mantelfläche diejenigen Strahlen aus, welche auf die Kegelbasis unter dem Winkel $\alpha = 60^0$ einfallen. Der von diesen Strahlen eingeschlossene Kegelteil besteht aus einem Kegel und einem Kegelstumpfe. Das Gesamtvolumen dieses Körpers ist

$$= \frac{5.\pi.r^3\sqrt{3}}{27}, \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{5}{3}r^2\pi.$$

Aufg. 37. Unter dem Winkel $\alpha = 60^0$ fallen auf eine Vollkugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{\frac{3}{2}}$ Lichtstrahlen von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte. In welchem Punkte der optischen Achse vereinigen sich diese Strahlen nach dem Durchgange durch die Kugel? Welchen Kugelteil umhüllen dieselben auf ihrem Wege bis zum Vereinigungspunkte?

Aufl. Der Vereinigungspunkt der unter dem Winkel $\alpha = 60^0$ einfallenden Strahlen hat vom Kugelmittelpunkte den Abstand $r\sqrt{3}$. Die Strahlen begrenzen einen Körper, welcher aus zwei Kugelsegmenten und einem Kegelstumpfe besteht, und es ist des Körpers

$$\text{Vol.} = \frac{r^3\pi}{6}(7 - \sqrt{3}). \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2\pi}{2}\left\{6 - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6}\right\}.$$

Aufg. 38. Von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte fallen Lichtstrahlen auf eine Kugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{2}$. Welchen Kugelraum begrenzen diejenigen in die Kugel eindringenden Strahlen, welche nach einmaliger Reflexion an der Kugeloberfläche im Innern der Kugel in das erste Medium so heraustreten, dass sie wieder zur leuchtenden Quelle zurückkehren?

Aufl. Bedeutet α den Einfalls- und β den Brechungswinkel, so ist $\alpha = 2\beta$. Sieht man von dem Werte $\alpha = o$ ab, so besteht der von den gebrochenen Lichtstrahlen umschlossene Kugelteil aus einem Kugelabschnitte und einem Kegel, und es ist:

$$\text{das Vol.} = r^3\pi. \qquad \text{die Oberfl.} = r^2\pi\sqrt{2}\cdot(1 + \sqrt{2}).$$

Anm. Die allgemeine Lösung ergiebt:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3\pi}{12} \cdot (16 - n^4). \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2\pi}{2} \cdot \sqrt{4 - n^2} \left(n^2 + 2 . \sqrt{4 - n^2}\right).$$

Aufg. 39. Vor einer Kugel mit dem Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ist ein leuchtender Punkt aufgestellt. Welchen Kugelteil begrenzen diejenigen Strahlen, welche die Kugel unter dem Winkel $\alpha = 60^0$ treffen und im Innern der Kugel an der Oberfläche derselben vor dem Austritt in das erste Medium zweimal reflektiert werden? Welchen Abstand hat der leuchtende Punkt vom Kugelmittelpunkte?

Aufl. Der von den Lichtstrahlen begrenzte Teil der Kugel besteht aus einem Kugelsegment und einem quadratischen Cylinder, da der Brechungswinkel $\beta = 45^0$. Es ist daher:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3\pi}{12}\left\{8 + \sqrt{2}\right\} \qquad \text{und die Oberfl.} = r^2\pi\,(4 - \sqrt{2}).$$

Der leuchtende Punkt hat vom Mittelpunkte der Kugel den Abstand $a = \frac{r\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 1}$.

Aufg. 40. Vor einer Kugel vom Radius r, deren Brechungsexponent $n = \sqrt{3}$ ist, befindet sich in einem Abstande $a = r\sqrt{3}$ vom Mittelpunkte der Kugel ein leuchtender Punkt. Welchen Kugelteil umhüllen diejenigen Strahlen, welche nach dem Durchgange durch die Kugel die optische Achse wieder in dem Abstande $a = r\sqrt{3}$ vom Kugelmittelpunkte treffen?

Aufl. Ist α der Einfalls- und β der Brechungswinkel, so ist:

$$\sin\alpha = \sqrt{3} . \sin(\alpha - \beta) = \sqrt{3} . \sin\beta.$$

Daher ist: $\alpha = 60^0$ und $\beta = 30^0$. Der von den Strahlen umhüllte Kugelteil besteht aus zwei Kugelsegmenten und einem Kreiscylinder, und es ist dessen

$$\text{Vol.} = \frac{r^3\pi}{6}\left\{8 - 3\sqrt{3}\right\} \qquad \text{Oberfl.} = r^2\pi\,(4 - \sqrt{3}).$$

Aufg. 41. Eine Vollkugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $\sqrt{3}$ ist den Lichtstrahlen eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes ausgesetzt. Bei welchen von den die Kugel treffenden Lichtstrahlen steht der reflectierte Teil auf dem gebrochenen senkrecht? Welchen Kugelteil begrenzen die in die Kugel eindringenden Strahlen?

Aufl. Ist α der Einfallswinkel, so ist: $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Die gebrochenen Strahlen treffen also die optische Achse gerade in dem Punkte, in welchem dieselbe auf der der Lichtquelle entgegengesetzten Seite die Kugeloberfläche durchschneidet, und begrenzen einen Kugelteil, dessen

$$\text{Vol.} = \frac{7}{12} r^3 \pi. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{5}{2} r^2 \pi.$$

Aufg. 42. Auf eine Kugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ fallen von einem leuchtenden Punkte, welcher vom Mittelpunkte der Kugel den Abstand $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ hat, Lichtstrahlen unter dem Winkel $\alpha = 90^0$. Wo treffen sich diese Strahlen nach ihrem Austritt aus der Kugel? Welchen Kugelteil umhüllen dieselben auf ihrem Wege durch die Kugel?

Aufl. Nach dem Austritt aus der Kugel sind die Strahlen einander parallel. Von der Kugel begrenzen dieselben einen Kugelteil, welcher aus einer Halbkugel, einem Kugelsegment und einem Kegelstumpfe besteht, und es ist dessen

$$\text{Vol.} = \frac{r^3 \pi}{12}(16 - \sqrt{3}). \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{2}(11 - 2\sqrt{3}).$$

Aufg. 43. Lichtstrahlen eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes treffen senkrecht die Kreisfläche, welche eine Halbkugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{3}$ begrenzt. Welche Strahlen werden bei der Brechung und Reflexion vollständig polarisiert? Wie gross ist der Raum, welcher von der Gesamtheit der zurückgeworfenen und der gebrochenen Strahlen eingeschlossen wird?

Aufl. Bei der Brechung werden diejenigen Strahlen vollständig polarisiert, bei welchen der reflectierte Teil auf dem gebrochenen senkrecht steht. Die reflectierten und die gebrochenen Strahlen umhüllen einen Doppelkegel, dessen

$$\text{Vol.} = \frac{r^3\pi}{6\sqrt{3}}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2\pi}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}.$$

Aufg. 44. Eine Kugel vom Radius r und dem Brechnungsexponenten $n = \sqrt{3}$ ist durch die Oberfläche einer zweiten, ebenso grossen Kugel, deren Mittelpunkt M auf der Oberfläche der ersteren Kugel liegt, ausgehöhlt. In M befindet sich ein leuchtender Punkt. Welchen Teil des linsenförmigen Kugelrestes begrenzen diejenigen Strahlen, welche nach dem Durchgange durch die Linse der optischen Achse parallel gehen?

Aufl. Von den Strahlen, welche nach dem Austritt aus der Linse der Centrale der beiden Kugelflächen parallel gehen, wird ein Körperteil umhüllt, welcher aus einem Kugelsegment und einem an der kleinern Endfläche ausgehöhlten Kegelstumpfe besteht, und es ist:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3\pi}{12}\left\{4\sqrt{3}-1\right\}. \qquad \text{die Oberfl.} = r^2\pi(4-\sqrt{3}).$$

Aufg. 45. Der Lichtbrechungsexponent einer Halbkugel vom Radius r ist $\sqrt{3}$. Senkrecht über dem Mittelpunkte M der diese Halbkugel begrenzenden Kreisfläche befindet sich ein leuchtender Punkt L in einem Abstande $LM = \frac{r}{3}$ von dem Mittelpunkte M. Welchen Kugelteil umhüllen nach dem Eintritt in die Kugel diejenigen Strahlen, welche beim Verlassen der Lichtquelle mit LM den Winkel $\alpha = 60^0$ einschliessen?

Aufl. An dem krummen Oberflächenteile der Halbkugel werden die in die Kugel eingetretenen Strahlen teils gespiegelt, teils gebrochen. a) Der reflectierte Teil kehrt nach einer nochmaligen Reflexion an der Kugeloberfläche schliesslich zur Lichtquelle zurück. b) Der gebrochene Teil verlässt die Halbkugel parallel der Linie LM. Es ist daher:

$$\text{a) das Vol.} = \frac{19}{72}r^3\pi. \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{23}{12}r^2\pi.$$

$$\text{b) das Vol.} = \frac{17}{36}r^3\pi. \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{13}{6}r^2\pi.$$

Aufg. 46. Vor einer Kugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = 2$ befindet sich in einem Abstande $a = nr = 2r$ vom Mittelpunkte der Kugel ein leuchtender Punkt. Welche Strahlen treten so in die Kugel ein, dass sie nach einer einmaligen Reflexion an der Kugeloberfläche in das ursprüngliche Medium so austreten, dass sie wieder zum Lichtpunkte zurückkehren? Welchen Raum umhüllen dieselben auf ihrem Wege durch die Kugel?

Aufl. Ist α der Einfalls- und β der Brechungswinkel, so ist:

$$\frac{r}{a} = \frac{\sin(\alpha - 2\beta)}{\sin\alpha}.$$

Da: $a = nr$, so ist: $\alpha = 3\beta$ und $\cos 2\beta = \frac{n-1}{2}$.

Daher umhüllen die nach einmaliger Spiegelung im Innern der Kugel wieder zur Lichtquelle zurückkehrenden Strahlen einen Raum, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{\pi r^3}{12} \cdot (3 - n)(5 + n) = \frac{7}{12} r^3 \pi.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \sqrt{3 - n} \cdot \left\{(n + 1) + 2.\sqrt{3 - n}\right\} = \frac{5}{2} r^2 \pi.$$

Aufg. 47. Innerhalb einer Kugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten

1) $n = \sqrt{2}$. 2) $n = \sqrt{3}$.

befindet sich im Abstande

1) $a = \frac{r}{\sqrt{3}}$. 2) $a = \frac{r}{2}$.

vom Mittelpunkte M ein leuchtender Punkt P. In welche Teile wird die Kugel durch diejenigen Strahlen zerlegt, welche nach dem Austritt aus der Kugel von dem Endpunkte des Radius MP zu kommen scheinen?

Aufl. Ist β der Einfalls- und α der Brechungswinkel, so ergiebt sich aus den Gleichungen:

$$\sin\alpha = n \sin\beta$$

und

$$\frac{r}{a} = \frac{\sin(2\alpha - \beta)}{\sin\beta}$$

für α die Gleichung:

$$\sin^2\alpha = \frac{(r + a)^2 - 4a^2 n^2}{4a(r - an^2)}.$$

Hieraus folgt für die besonderen Fälle:

1) Die aus der Kugel austretenden Strahlen halbieren die Kugeloberfläche. Der körperliche Inhalt des kleineren Kugelteils beträgt:

$$\frac{r^3 \pi}{3\sqrt{3}} \cdot \left\{ 2\sqrt{3} - 1 \right\}.$$

2) Nach der Brechung scheinen diejenigen Strahlen aus dem Endpunkte des Radius MP zu kommen, welche vor der Brechung senkrecht auf MP standen. Bei dem kleineren Kugelteile ist:

$$\text{die Calotte} = r^2 \pi.$$

$$\text{das Vol.} = \frac{5}{24} r^3 \pi.$$

Aufg. 48. Auf der Oberfläche eines kugelförmigen Hohlraumes vom Radius r befindet sich ein leuchtender Punkt P. In welche Teile wird dieser Raum durch diejenigen Strahlen zerlegt, welche nach ihrem Austritt aus der Kugel in ein optisch dichteres Medium vom Brechungsexponenten $n = \sqrt{3}$ auf dem durch P gehenden Kugeldurchmesser senkrecht stehen?

Aufl. Bilden die Strahlen mit dem Einfallslot den Winkel α, so führt das Brechungsgesetz zu der Gleichung:

$$\sin\alpha + \sqrt{3} \cdot \cos 2\alpha = 0,$$

woraus:

$$\alpha = 60^0$$

folgt. Bei dem kleineren der beiden Teile, in welche die Kugel durch die der Aufgabe genügenden Strahlen zerlegt wird, ist demnach:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3 \pi}{12}. \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{(\sqrt{3} - 1)^2}.$$

Aufg. 49. Ein leuchtender Punkt P befindet sich innerhalb einer Hohlkugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{3}$ in einer Entfernung $a = \frac{r}{\sqrt{3}}$ vom Kugelmittelpunkte M. In welche Teile zerlegen die Kugel diejenigen Strahlen, welche nach ihrem Austritt in die optisch dünnere Umgebung der Kugel auf MP senkrecht stehen?

Aufl. Ist β der Einfallswinkel der Strahlen, welche nach ihrer Brechung auf MP senkrecht stehen, so führt die Figur und die Berücksichtigung des Brechungsgesetzes zu der Gleichung:

$$1 + \sin\beta = 6\sin^2\beta,$$

welcher der Wert: $\beta = 30^0$ genügt. Es ist daher bei dem kleineren Kugelteile, welcher von den erwähnten Lichtstrahlen begrenzt wird,

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3\pi}{36}(24 - 13\sqrt{3}). \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{r^2\pi}{6}(12 - 5\sqrt{3}).$$

Aufg. 50. Innerhalb einer Kugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = 2$ befindet sich in einer Entfernung $a = \frac{r}{\sqrt{3}}$ vom Kugelmittelpunkte M ein leuchtender Punkt P. Welchen Kugelraum umschliessen diejenigen Strahlen, welche nach dem Austritt aus der Kugel parallel mit PM gehen?

Aufl. Ist α der Winkel, welchen die Strahlen nach ihrem Austritt aus der Kugel in das die Kugel umgebende optisch dünnere Medium mit dem Einfallslot bilden, so führt die Figur und die Berücksichtigung des Brechungsgesetzes von Snellius zu der Gleichung:

$$\cos\alpha = \frac{a^2n^2 - a^2 - r^2}{2ar},$$

wenn man den Fall $\alpha = 0$ unberücksichtigt lässt. Die parallel zu PM aus der Kugel austretenden Strahlen umhüllen demnach einen Kugelteil, bei welchem:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3\pi}{3.\sqrt{3}}(1 + 2\sqrt{3}). \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{2r^2\pi}{\sqrt{3}}(1 + \sqrt{3}).$$

Anm.: Ist $n = 1 + \sqrt{3}$ und $a = \frac{r\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$, so ist:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3\pi}{6\sqrt{2}}\left\{\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 5\right\}.$$

$$\text{die Oberfl.} = r^2\pi.\left\{3 - \sqrt{2}\right\}.$$