**Aufl.** Bildet die Linie LM mit den Strahlen LP den Winkel $\varphi$ und mit den Strahlen MP den Winkel $\psi$, so ist:

$$\cos\psi = \sqrt{3}.\ \cos\varphi.$$
$$\operatorname{tang}\varphi = 3.\ \operatorname{tang}\psi.$$

Die Lösung dieser Gleichungen ergiebt:

$$\sin\psi = \frac{1}{2}. \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\psi = 30^0 \qquad \varphi = 60^0.$$

Die Lichtstrahlen LP und MP umschliessen daher einen Doppelkegel, dessen:

$$\text{Inhalt} = 4a^3\pi.$$
$$\text{Oberfl.} = 2a^2\pi\sqrt{3}.\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

---

## II.

## Spiegelung des Lichtes.

**Aufg. 9.** Im Mittelpunkte der Basis eines geraden Hohlkegels, dessen Achsenschnitt an der Spitze den Winkel $a = 30^0$ hat, befindet sich ein leuchtender Punkt. Welche Strahlen durchschneiden nach der Spiegelung an der Mantelfläche des Kegels die Kegelhöhe rechtwinkelig? Wie gross ist der von diesen Strahlen eingeschlossene Raum?

**Aufl.** Die Strahlen, welche nach der Spiegelung an dem Mantel des Kegels die Kegelhöhe rechtwinkelig treffen, umschliessen einen geraden Kegel, dessen:

$$\text{Inhalt} = \frac{r^3\pi}{8}. \qquad \text{Oberfläche} = \frac{r^2\pi\sqrt{3}}{2.(\sqrt{3} - 1)^2}.$$

Die allgemeine Lösung der Aufgabe ergiebt:

$$\text{Inhalt} = \frac{\pi}{6}r^3\sin 2\alpha\cos\alpha. \qquad \text{Oberfl.} = 2r^2\pi\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

---

**Aufg. 10.** Ein gleichseitiger Kegel vom Radius r ist durch eine Kugel K vom Radius $\frac{r}{2}$, welche um den Mittelpunkt M der Kegelbasis beschrieben ist, ausgehöhlt. In M befindet sich ein leuchtender Punkt. Welchen Kegelteil begrenzen diejenigen Strahlen, welche nach zweimaliger Spiegelung an der Mantelfläche des Kegels wieder zu M zurückkehren?

**Aufl.** Von den Lichtstrahlen, die nach zwei Spiegelungen an dem Kegelmantel wieder nach M gelangen, wird ein — durch ein Kugelsegment — ausgehöhlter Kegelstumpf umschlossen, dessen:

$$\text{Inhalt} = \frac{r^3 \pi}{6(1 + \sqrt{3})}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{8}\left(9 - 2\sqrt{3}\right).$$

---

**Aufg. 11.** Ein gleichseitiger Kegel vom Radius r ist durch diejenige Kugel K ausgehöhlt, welche den Kegelmantel längs der Peripherie der Grundfläche tangiert. Im Mittelpunkte der Kugel K befindet sich ein leuchtender Punkt L. Welchen Kegelteil umhüllen diejenigen Strahlen, welche nach zweimaliger Reflexion an der Mantelfläche des Kegels wieder zur Lichtquelle L gelangen?

**Aufl.** Der Kegelteil, welcher von den zur Kegelhöhe senkrechten Lichtstrahlen eingeschlossen wird, ist ein Kegelstumpf, welcher durch ein Kugelsegment ausgehöhlt ist. Die Endfläche des Stumpfes berührt die Kugel K. Von den Strahlen wird daher ein Kegelraum umschlossen, dessen

$$\text{Inhalt} = \frac{8r^3 \pi}{27\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3} - 5\right). \qquad \text{Oberfl.} = \frac{2}{3} r^2 \pi \left(5 - 2\sqrt{3}\right).$$

---

**Aufg. 12.** Auf eine Kugel vom Radius r fallen Lichtstrahlen von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte L. Welche Strahlen bilden nach der Spiegelung an der Kegeloberfläche mit dem nach L gerichteten Kugelradius einen rechten Winkel? Wie gross ist der Kugelraum K, welcher von den nach den Reflexionspunkten der Lichtstrahlen gezogenen Radien begrenzt wird?

**Aufl.** Der Kugelteil K ist ein Kugelausschnitt, dessen Achsenschnitt ein Kreisquadrant ist. Es ist demnach

$$\text{der Inhalt} = \frac{r^3 \pi \sqrt{2}}{3(1 + \sqrt{2})}. \qquad \text{und die Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{2}\left(4 - \sqrt{2}\right).$$

---

**Aufg. 13.** Die — eine Halbkugel vom Radius r begrenzende — Kreisfläche wird von den Lichtstrahlen eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes senkrecht getroffen. Welchen Kugelteil umschliessen diejenigen Strahlen, welche nach n Spiegelungen an der Kugeloberfläche wieder zu dem unendlich entfernten Lichtpunkte zurückkehren? Zu berücksichtigen sind nur die Fälle:

$$2 \leqq n \leqq 4.$$

**Aufl.** a. Ist $n = 2$, d. h. kehren die Lichtstrahlen schon nach der zweiten Spiegelung an der Kugeloberfläche zu ihrem Ausgangspunkt zurück, so umhüllen dieselben innerhalb der Halbkugel einen geraden Cylinder, dessen:

$$\text{Inh.} = \frac{r^3 \pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Oberfl.} = 2r^2 \pi.$$

b. Sind diejenigen Strahlen den einfallenden parallel, welche nach der $n = 3^{\text{ten}}$ Spiegelung an der Kugeloberfläche aus der Halbkugel austreten, so umschliessen dieselben innerhalb der Halbkugel einen aus einem Cylinder und einem Kegel zusammengesetzten Körper, dessen:

$$\text{Inh.} = \frac{1}{2} r^3 \pi.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{\pi}{4} \cdot r^2 \sqrt{3} \left\{ 4 + \sqrt{3} \right\}.$$

c. Werden endlich die Lichtstrahlen an der Kugeloberfläche $n = 4$mal zurückgeworfen, ehe sie zu ihrem Ausgangsorte zurückkehren, so umhüllen dieselben innerhalb der Halbkugel einen aus einem Cylinder und einem Kegelstumpf zusammengesetzten Körper, dessen:

$$\text{Inh.} = \frac{r^3 \pi. \left(7 + 4\sqrt{2}\right)}{12. \sqrt{1 + \sqrt{2}}}.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{\pi. r^2}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ 1 + 2\sqrt{2} \right\}.$$

---

**Aufg. 14.** In dem einen Endpunkte des Durchmessers einer spiegelnden Hohlkugel vom Radius r befindet sich ein leuchtender Punkt. Welche Lichtstrahlen kehren nach zwei Reflexionen an der Kugeloberfläche wieder zu dem leuchtenden Punkte zurück? Welchen Raum umhüllen dieselben auf ihrem Wege?

**Aufl.** Kehren die Lichtstrahlen schon nach der zweiten Spiegelung zum leuchtenden Punkte zurück, so beschreiben dieselben einen gleichseitigen Kegel, dessen

$$\text{Inh.} = \frac{3}{8} r^3 \pi. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{9}{4} r^2 \pi.$$

Allgemein: Erleiden die Lichtstrahlen an der Oberfläche der Kugel 2n Reflexionen, ehe dieselben ihren Ausgangsort erreichen, so beschreiben dieselben einen Rotationskörper, welcher durch Umdrehung eines regulären $(2n + 1)$=Ecks um die Verbindungslinie einer Polygonecke mit der Mitte der dieser Ecke gegenüberliegenden Polygonseite entsteht. Wird $\frac{360^0}{2n + 1} = 2\gamma$ gesetzt, so ist des Rotationskörpers

$$\text{Inh.} = \frac{4}{3} r^3 \pi \cos\gamma \cos^4 \frac{\gamma}{2}. \qquad \text{Oberfl.} = 4 r^2 \pi \cos^4 \frac{\gamma}{2}.$$

---

**Aufg. 15.** Ein leuchtender Punkt befindet sich in dem einen Endpunkte des Durchmessers einer spiegelnden Hohlkugel vom Radius r. Welche Lichtstrahlen kehren nach fünfmaliger Spiegelung an der Kugeloberfläche wieder zur Lichtquelle zurück? Wie gross ist der körperliche Inhalt und die Oberfläche des von diesen Strahlen umschlossenen Raumes?

**Aufl.** Kehren die Strahlen nach der fünften Reflexion an der Kugeloberfläche zu ihrem Ausgangsorte zurück, so begrenzen dieselben einen Körper, welcher bei der Rotation eines regulären Sechsecks um den grössten Durchmesser entsteht. Es ist daher des Körpers

$$\text{Inh.} = r^3 \pi. \qquad \text{Oberfl.} = 2 r^2 \pi \sqrt{3}.$$

Allgemein: Werden die Lichtstrahlen $(2n-1)$ mal an der Kugeloberfläche zurückgeworfen, ehe dieselben zur Lichtquelle zurückkehren, so umhüllen dieselben einen Rotationskörper, welcher durch Umdrehung eines regulären 2n=Ecks um den grössten Durchmesser entsteht. Setzt man zur Abkürzung $\frac{180^0}{n} = \gamma$, so ist der

$$\text{Inhalt des Körpers} = \frac{4}{3} r^3 \pi \cos^2 \gamma.$$

$$\text{und die Oberfl.} = 4 r^2 \pi \cos\gamma.$$

---

**Aufg. 16.** Die Höhe h eines geraden Kegels, dessen Achsenschnitt den Winkel $\alpha = 120^0$ hat, ist über die Spitze des Kegels verlängert. Auf dieser Verlängerung der Höhe befindet sich in einem Abstande h von der Kegelspitze ein leuchtender Punkt L. An welchen Stellen P der spiegelnden Mantelfläche des Kegels werden die Lichtstrahlen so zurückgeworfen, dass dieselben mit der Kegelhöhe rechte Winkel bilden? Wie gross ist der Kegelraum zwischen der Basis des Kegels und der Gesamtheit der Punkte P?

**Aufl.** Senkrecht zu der Körperhöhe stehen nach der Spiegelung diejenigen Lichtstrahlen, deren Reflexionswinkel $\alpha = 60^0$. Die Reflexionspunkte P liegen daher auf einem Kreise und zerlegen den Kegel in zwei Teile, deren Mantelflächen im Verhältnis von 1 zu 3, deren Inhalte im Verhältnis von 1 zu 7 zu einander stehen.

---

**Aufg. 17.** Über der Spitze eines geraden Kegels, dessen Achsenschnitt den Winkel $\alpha = 120^0$ hat, befindet sich auf der Verlängerung der Kegelhöhe h in dem Abstande 2h von der Spitze des Kegels ein leuchtender Punkt L. Welchen Raum umhüllen diejenigen Strahlen LP, welche nach der Spiegelung an der Mantelfläche des Kegels von dem Fusspunkte der Kegelhöhe zu kommen scheinen?

**Aufl.** Ist $\alpha$ der Reflexionswinkel der Strahlen LP, so ist:

$$\sin(\alpha + 30^0) = 2.\sin(\alpha - 30^0),$$

also: $\alpha = 60^0$. Die Reflexionspunkte P sind daher die Peripheriepunkte der Kegelbasis. Es ist mithin bei dem von den Strahlen LP eingehüllten Raume:

$$\text{der Inh.} = 3\pi h^3 \qquad \text{die Oberfl.} = 9h^2\pi.$$

---

**Aufg. 18.** Im Mittelpunkte der Basis eines hohlen regulären Tetraeders mit der Kante a befindet sich ein leuchtender Punkt. Welche Lichtstrahlen schneiden nach der Reflexion an den Seitenflächen des Tetraeders die Tetraederhöhe senkrecht? Wie gross ist das Volumen desjenigen Polyeders, welches jene Lichtstrahlen zu Seitenkanten hat?

**Aufl.** Das Polyeder ist eine dreiseitige Pyramide mit regulärer Basis, und es ist die Seitenkante desselben $= \frac{a}{6}\sqrt{3}$ und der Radius des um seine Basis beschriebenen Kreises $= \frac{7a}{18\sqrt{3}}$. Daher ist das Volumen des Körpers:

$$V = \frac{7^2 . a^3}{2^2 . 3^7 . \sqrt{2}}.$$

---

**Aufg. 19.** Ein leuchtender Punkt befindet sich im Mittelpunkte der Basis einer geraden vierseitigen Pyramide mit lauter gleichen Kanten a. Welche Lichtstrahlen schneiden nach der Reflexion an den Seitenflächen der Pyramide die Pyramidenhöhe senkrecht? Wie gross ist der körperliche Inhalt desjenigen Polyeders, welches jene Strahlen zu Seitenkanten hat?

**Aufl.** Diejenigen Strahlen, welche nach der Spiegelung an den Seitenflächen der Pyramide die Körperhöhe senkrecht treffen, bilden die Kanten einer geraden Pyramide mit regulärer Basis, und es ist die Seitenkante der Pyramide $= \frac{a}{2}$ und der Radius des um die Basis beschriebenen Kreises $= \frac{a}{6}$. Daher ist das Volumen des Körpers:

$$V = \frac{a^3}{3.\sqrt[4]{2}}.$$

---

**Aufg. 20.** Innerhalb eines hohlen regulären Tetraeders mit den Kanten a befindet sich in der Mitte der Tetraederhöhe ein leuchtender Punkt. Welche Lichtstrahlen treffen nach der Reflexion an den Seitenflächen des Tetraeders die Tetraederbasis senkrecht? Wie gross ist das Volumen desjenigen innerhalb des Tetraeders liegenden Polyeders, dessen Seitenkanten jene Lichtstrahlen sind?

**Aufl.** Das Polyeder besteht aus einem dreiseitigen Prisma und einer dreiseitigen Pyramide, und es ist der Radius des um die gemeinsame Basis der beiden Körperteile beschriebenen Kreises $= \frac{4a}{9\sqrt{3}}$, die Seitenkante der Pyramide $\frac{a}{\sqrt{6}}$ und die Höhe des Prismas $= \frac{2a}{9\sqrt{6}}$. Daher ist das Volumen des von den Lichtstrahlen als Seitenkanten begrenzten Körpers

$$V = \frac{13.(a\sqrt{2})^3}{3^7}.$$

---

**Aufg. 21.** In der Mitte der Höhe einer geraden vierseitigen Pyramide mit lauter gleichen Kanten a befindet sich ein leuchtender Punkt. Welche Strahlen treffen nach der Spiegelung an den Seitenflächen der Pyramide die vierseitige Pyramidenbasis senkrecht? Wie gross ist der Inhalt desjenigen innerhalb der Pyramide fallenden Polyeders, dessen Seitenkanten jene zur Basis senkrecht stehenden Strahlen sind?

**Aufl.** Diejenigen Strahlen, welche nach der Reflexion an den Seiten der Pyramide die Körperbasis senkrecht treffen, bilden die Kanten eines Polyeders, welches aus einem vierseitigen Prisma und einer vierseitigen Pyramide besteht; der Radius des um die gemeinsame Basis der beiden Körperteile beschriebenen Kreises ist $= \frac{a}{3}$, die Seitenkante der Pyramide $= \frac{a}{2\sqrt{2}}$ und die Höhe des Prismas $= \frac{a}{3\sqrt{2}}$. Daher ist das Volumen des ganzen Körpers:

$$V = \frac{7a^3}{3^4\sqrt{2}}.$$

---

**Aufg. 22.** Ein leuchtender Punkt bildet den Scheitel der einen Ecke eines regulären Oktaeders von der Kante a. Welche Strahlen durchschneiden nach der Spiegelung an den Seitenflächen des Oktaeders die durch die leuchtende Ecke gehende Körperdiagonale senkrecht? Wie gross ist der körperliche Inhalt desjenigen Polyeders, welches jene Lichtstrahlen zu Seitenkanten hat?

**Aufl.** Die Lichtstrahlen, welche nach der Reflexion an der Oktaederseite die Körperdiagonale senkrecht treffen, bilden die Kanten einer geraden dreiseitigen Pyramide von der Höhe $\frac{2}{3}a\sqrt{2}$ und der Seitenkante a; der Radius des um die gleichseitige Basis dieser Pyramide beschriebenen Kreises beträgt $\frac{a}{3}$ und der Inhalt der Pyramide ist:

$$V = \frac{4.a^3\sqrt{2}}{3^4}.$$

---

**Aufg. 23.** Im Scheitel der einen Ecke eines regulären Hexaeders befindet sich ein leuchtender Punkt. Welche Lichtstrahlen treffen nach der Reflexion an den Würfelseiten die durch den leuchtenden Punkt gehende Körperdiagonale senkrecht? Wie gross ist das Polyeder, dessen Seitenkanten jene nach der Reflexion an den Hexaederseiten die Würfeldiagonale senkrecht durchschneidenden Strahlen sind?

**Aufl.** Diejenigen Lichtstrahlen durchschneiden nach der Spiegelung an den Seiten des Würfels die Körperdiagonale senkrecht, welche die der leuchtenden Ecke gegen

überliegenden Würfelseiten in den Mittelpunkten treffen. Diese Strahlen bilden die Kanten einer geraden dreiseitigen Pyramide, bei welcher:

$$\text{die Seitenkante} = a\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

$$\text{die Höhe} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

und der Radius des um die gleichseitige Basis beschriebenen Kreises $= \frac{a}{\sqrt{6}}$ ist.

Der Inhalt der Pyramide beträgt:

$$\frac{a^3}{12}.$$

---

**Aufg. 24.** Die stumpfere Spitze eines geraden Doppelkegels, an welcher der Achsenschnitt einen Winkel von $2\alpha = 120^0$ ergiebt, ist der Sitz eines leuchtenden Punktes. Welchen Raum umschliessen diejenigen Lichtstrahlen, welche nach der Reflexion an der Mantelfläche des Kegels die Kegelachse senkrecht durchschneiden?

**Aufl.** Diejenigen Strahlen, welche nach der Spiegelung an dem Mantel des Doppelkegels die Körperachse senkrecht treffen, umhüllen einen geraden Kegel. Ist a die Seite des stumpferen Teils des Doppelkegels, so ist

$$\text{das Vol. des Lichtkegels} = \frac{2\pi a^3 \cos\alpha \cos^2 2\alpha}{3\sin^2\alpha} = \frac{a^2\pi}{9}.$$

$$\text{und die Oberfl. desselben} = 2\pi a^2 \cos(180^0 - 2\alpha) = a^2\pi.$$

---

**Aufg. 25.** Von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte fallen Lichtstrahlen senkrecht zur Basis eines geraden Kegels, dessen Achsenschnitt ein rechtwinkeliges Dreieck ist. Welche der von der Kegelhöhe gleich weit entfernten Strahlen umhüllen bei ihrer Reflexion an der spiegelnden Mantelfläche des Kegels einen Kegelteil

a) vom grössten Volumen?

b) von der grössten krummen Oberfläche?

**Aufl.** Umhüllt wird von den Strahlen ein Cylinder. Ist x der Abstand der Strahlen von der Kegelachse, so ist

a) das Cyl.-Vol $= x^2\pi(r - x)$.

b) der Cylinder-Mantel $= 2x\pi(r - x)$.

Am grössten, nämlich: $\frac{4}{27}r^3\pi$, ist daher das Vol., wenn: $x = \frac{2}{3}r$.

Der Mantel wird dagegen am grössten, wenn $x = \frac{r}{2}$; er ist dann $= \frac{r^2\pi}{2}$.

**Aufg. 26.** Senkrecht zur Basis eines gleichseitigen Kegels vom Radius r fallen Lichtstrahlen von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte. Welche von den Strahlen, die sich nach der Reflexion am Kegelmantel in demselben Punkte der Kegelhöhe vereinigen, umhüllen einen Kegelteil

a) vom grössten Volumen?

b) von der grössten krummen Oberfläche?

**Aufl.** In demselben Punkte der Kegelhöhe vereinigen sich nach der Spiegelung am Kegelmantel diejenigen die Kegelbasis treffenden Strahlen, welche von der Kegelhöhe denselben Abstand haben. Ist dieser Abstand $= x$, so ist bei dem von den Strahlen umhüllten Kegelteile, der aus einem Cylinder und einem Vollkegel besteht,

$$\text{a) das Vol.} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left\{9rx^2 - 8x^3\right\}.$$

$$\text{b) die krumme Oberfläche} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left\{3rx - 2x^2\right\}.$$

Beide Ausdrücke werden am grössten, wenn: $x = \frac{3}{4}r$, und es ist:

$$\text{a) das Vol.} = \frac{9\pi r^3}{16\sqrt{3}}. \qquad \text{b) der krumme Oberflächenteil} = \frac{9r^2\pi}{4\sqrt{3}}.$$

---

**Aufg. 27.** Die Basis eines Kegels vom Radius r, dessen Achsenschnitt den Winkel $\alpha = 120^0$ hat, wird von den Lichtstrahlen eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes senkrecht getroffen. Welche von den sich in einem Punkte der Kegelhöhe vereinigenden Strahlen werden an der spiegelnden Mantelfläche des Kegels so zurückgeworfen, dass sie vom Kegel einen Teil vom grössten Volumen begrenzen?

**Aufl.** Alle Strahlen, welche sich in demselben Punkte der Kegelhöhe vereinigen, umhüllen einen Cylinder, welcher an der einen Endfläche durch einen Kegel ausgehöhlt ist. Ist x der Abstand der einfallenden Strahlen von der Kegelhöhe, so ist das Volumen des von den Strahlen umhüllten Körpers

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(3rx^2 - 4x^3\right).$$

Den grössten Wert: $\frac{r^3\pi}{12\sqrt{3}}$ erreicht dieses Volumen, wenn: $x = \frac{r}{2}$; die reflectirten Lichtstrahlen sammeln sich im Fusspunkte der Kegelhöhe. Der krumme Oberflächenteil des von den Strahlen begrenzten Körpers beträgt:

$$\frac{r^2\pi}{\sqrt{3}}.$$

---

**Aufg. 28.** Innerhalb einer Hohlkugel vom Radius r befindet sich ein leuchtender Punkt in der Entfernung $a = \frac{r}{3}\sqrt{5}$ vom Mittelpunkte der Kugel. Welchen Raum begrenzen diejenigen Strahlen, welche nach zweimaliger Reflexion an der Oberfläche der Kugel wieder zum Lichtpunkte zurückkehren?

**Aufl.** Ist $\alpha$ der Reflexionswinkel, so ist zunächst:

$$\frac{r}{a} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha}.$$

Da $a = \frac{r}{3}\sqrt{5}$, so ergiebt die Lösung dieser Gleichung: $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$.

Diejenigen Strahlen, welche nach zwei Spiegelungen an der Kugeloberfläche zum Lichtpunkte zurückkehren, umhüllen daher einen Kegel, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{32 r^3 \pi}{45.\sqrt{5}}.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{32}{15} r^2 \pi.$$

---

**Aufg. 29.** Ein leuchtender Punkt hat vom Mittelpunkte einer Hohlkugel vom Radius r den Abstand $a = \frac{2}{3}r$. Welchen Raum umhüllen diejenigen Strahlen, welche nach dreimaliger Reflexion an der Oberfläche der Kugel wieder zum leuchtenden Punkte zurückkehren?

**Aufl.** Ist $\beta$ der Reflexionswinkel, so ist:

$$\frac{r}{a} = \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta}.$$

Daraus folgt:

$$\cos 2\beta = \frac{r - a}{2a} = \frac{1}{4}.$$

Die Strahlen, welche nach dreimaliger Spiegelung an der Kugeloberfläche zum Lichtpunkte zurückkehren, begrenzen demnach einen Doppelkegel, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{25}{48} \cdot r^3 \pi.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{25.r^2 \pi}{4\sqrt{6}}.$$

**Anm.:** a) Nimmt man $a = \frac{r}{2}$, so umhüllen die nach der dritten Spiegelung an der Kugeloberfläche der Kugel wieder zum Lichtpunkte zurückkehrenden Strahlen

einen einfachen geraden Kegel, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $r\sqrt{3}$ ist.

b) Die allgemeine Lösung ergiebt:

$$\text{Vol.} = \frac{\pi . r^2 (a + r)^2 (3a - r)}{12a^2}.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{r.\pi}{2a^2} (a + r)^2 \sqrt{a(3a - r)}.$$

---

**Aufg. 30.** Vor einer Kugel mit dem Radius r befindet sich ein leuchtender Punkt L in einem Abstande $a = r\sqrt{3}$ vom Kegelmittelpunkte M. Welche Strahlen LP gehen nach der Reflexion an der Kugeloberfläche parallel der auf LM senkrecht stehenden Tangentialebene der Kugel? Wie gross ist der Kugelteil K, welcher von der Gesamtheit der Strahlen MP begrenzt wird?

**Aufl.** Ist x der Einfallswinkel der Lichtstrahlen LP beim Auftreffen auf die Kugeloberfläche, so ist:

$$\sin x + \sqrt{3}. \cos 2x = 0.$$

Daher: $x = 60^0$. Der Kugelteil K ist demnach ein Kugelsektor, dessen Achsenschnitt ein Kreissextant ist. Mithin ist:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3 \pi}{3(2 + \sqrt{3})} \qquad \text{und die Oberfl. } \frac{r^2 \pi}{2} \left(5 - 2\sqrt{3}\right).$$

---

**Aufg. 31.** Auf eine Kugel vom Radius r fallen Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkte L, welcher von dem Kugelmittelpunkte M den Abstand $LM = \frac{r}{\sqrt{3} - 1}$ hat. Welche Strahlen LP scheinen nach der Spiegelung an der Kugeloberfläche von dem Punkte zu kommen, in welchem LM die Kugel schneidet? Wie gross ist der Raum, welcher zwischen der Kugel und der Gesamtheit der Strahlen LP liegt?

**Aufl.** LM treffe die Kugel im Punkte O. Ist $\alpha$ der Reflexionswinkel der Strahlen, welche von O zu kommen scheinen, so ist:

$$\sin 3\alpha + (\sqrt{3} - 1). \sin \alpha = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\alpha = 75^0.$$

Der dem leuchtenden Punkte zugekehrte Teil der Kugeloberfläche und die Strahlen LP begrenzen daher einen Raum, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3 \pi}{4.(5 + 3\sqrt{3})}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{4}\left\{8 + \sqrt{2} - 4\sqrt{3}\right\}.$$

---

**Aufg. 32.** Ein hohler Kugelsector, dessen Achsenschnitt ein Kreisquadrant ist, gehört einer Kugel vom Radius r an. In der Entfernung $\frac{r}{\sqrt{3}}$ vom Mittlpunkte M der Kugel befindet sich innerhalb des Sectors ein leuchtender Punkt L auf demjenigen Radius, welcher den Kugelmittelpunkt mit der Mitte der Calotte verbindet. Welche Strahlen treffen nach der Reflexion an der Calotte und an dem Kegelmantel des Sectors den durch L gehenden Radius senkrecht? a) Wie gross ist der Raum zwischen der Calotte und jenen von L ausgehenden Strahlen? b) Welchen Raum umhüllen die Strahlen auf ihrem Wege bis zur Rückkehr zum leuchtenden Punkte L?

**Aufl.** Wird die Calotte unter dem Winkel $\xi$ von den Strahlen getroffen, welche in ihrem weitern Verlaufe den Radius ML senkrecht treffen, so ist:

$$\sin 2\xi = \sqrt{3}.\ \sin\xi,$$

also: $\xi = 30^0$. Es ist daher:

a) zwischen der Calotte und den von L ausgehenden Strahlen ein Raum, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3 \pi}{12\sqrt{3}} \cdot \left\{8\sqrt{3} - 13\right\}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi.}{2\sqrt{3}}(4\sqrt{3} - 5).$$

b) die Strahlen selbst umhüllen auf ihrem Wege einen Raum, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3 \pi}{24\sqrt{3}} \cdot \left\{8 - 3\sqrt{3}\right\}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{4.\sqrt{3}}\left\{8 - \sqrt{3}\right\}.$$

---

## III.

## Brechung des Lichtes.

**Aufg. 33.** Auf den Mantel eines rechtwinkelig-gleichschenkligen Kegels vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{2}$ fallen parallel der Kegelachse Lichtstrahlen, welche von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte herkommen. Welchen Kegelteil umschliessen diejenigen Strahlen, welche die Kegelbasis im Fusspunkte der Höhe des Kegels treffen?